МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ЗМІСТУ І МЕТОДІВ НАВЧАННЯ
ДЕРЖАВНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМАЛЬНІ МЕТАЛУРГІЙНІ СИСТЕМИ

*Рекомендовано Міністерством освіти України
як навчальний посібник
для студентів металургійних спеціальностей*

За редакцією **В. Б. Охотського**

Київ 1998

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ЗМІСТУ І МЕТОДІВ НАВЧАННЯ
ДЕРЖАВНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМАЛЬНІ МЕТАЛУРГІЙНІ СИСТЕМИ

Київ 1998

УДК 669

Моделювання та оптимальні металургійні системи: Навч. посібник / Кол. авт. за заг. ред. В. Б. Охотського. — К.: ІЗМН, 1998. — 156 с.

Розглянуто загальні положення моделювання та оптимізації технологічних систем. Наведено приклади моделювання та оптимальних металургійних систем відповідно до дисципліни "Моделювання та оптимальні технологічні системи".

Посібник призначено для студентів вищих навчальних закладів, викладачів та науковців, що займаються розробкою моделей металургійних процесів та оптимізацією металургійних систем.

Колектив авторів: *В. Б. Охотський, В. М. Ковшов, А. Г. Кучер, О. В. Соценко, С. Й. Пінчук* — доктора технічних наук, професори; *Ю. К. Літовченко, А. А. Міленін, А. І. Карнаух* — кандидати технічних наук, доценти

Рецензенти: *В. І. Кузьменко* (ДДУ) — д-р фіз.-мат наук, проф. *Г. Т. Циганков* (ДХТУ) — д-р техн. наук, проф

ISBN 5-7763-9060-5

ПЕРЕДМОВА

Металургія є провідною галуззю промисловості України, яка наприкінці XX ст. виробляє майже п'яту частину всієї промислової продукції. Металургійні комбінати і заводи експортують металургійну продукцію в обсягах, що забезпечують близько третини валютних надходжень до України.

Економічні обставини обмежують екстенсивний розвиток металургії, тому її перспективою є вдосконалення агрегатів та технологій, у тому числі шляхом оптимізації.

Програма вищої освіти з металургії передбачає у нормативній частині професійно-орієнтованих дисциплін й таку, як "Моделювання та оптимізація технологічних систем". Беручи до уваги методологічну доцільність конкретизації змісту освіти з наближенням того, що вивчається, до відповідних спеціальностей та спеціалізацій, весь матеріал поділено на частину, що містить загальні положення і найуживаніші у металургійних системах методи розв'язання завдань на створення моделей та оптимізацію, та частину, де наводиться застосування останніх у відповідних металургійних системах і окремі характерні для деяких з них підходи до розв'язання цих завдань. Такий підхід не тільки поліпшить засвоєння матеріалу для студентів, але й зробить книгу цікавою для фахівців, які досліджують відповідні проблеми.

Розд.1, 2 та підрозд. 3.2 підготував проф. *В. Б. Охотський*, підрозд. 3.1 — проф. *В. М. Ковшов*, 3.3 — проф. *А. Г. Кучер*, 3.4 — проф. *О. В. Соценко*, 3.5 — доц. *Ю. К. Літовченко*, 3.6 — доц. *А. А. Міленін*, 3.7 — доц. *А. І. Карнаух*, 3.8 — проф. *С. Й. Пінчук*.

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

1.1. Система, її склад

Системою називається сукупність елементів, які перебувають у відносинах та зв'язках один з одним. Вони бувають матеріальні та абстрактні. Перші поділяються на системи неорганічної природи та на живі системи. Хімічні системи, в тому числі металургійні, належать до перших, а люди, які займаються цими системами, — до других. Абстрактними системами є поняття, гіпотези, теорії, наукові знання.

Система складається з елементів, кожен з яких самостійна і умовно неподільна одиниця. В металургійних процесах елементами є метал, шлак, окремі фази, а також окремі частини агрегату, наприклад, горн або шахта доменної печі, пальник нагрівальної печі, валки прокатного стану тощо. Між окремими елементами системи існує матеріальний, енергетичний та інформаційні зв'язки. Наприклад, тепло передається від полум'я та футеровки нагрівальної печі до металевої заготовки. Між металом та шлаком відбувається перенесення речовин — кремнію, марганцю, сірки, фосфору, а реверс обертання валків прокатного стану здійснюється завдяки інформаційному та енергетичному зв'язку у вигляді електричного струму, що пов'язує пульт управління з виконавчими механізмами електропривода. Сукупність елементів і зв'язків утворює сукупність системи.

Окрема частина елементів, що мають певну цілісність і цілеспрямованість і взаємодіють між собою, може бути виділена у функціональну підсистему. Такою є, наприклад, форма у ливарній системі, загартовувальне середовище у термообробній технології та ін.

У металургійних системах існує певна ієрархія фізико-хімічних ефектів. На першому рівні — це взаємодія між атомами, молекулами, вільними радікалами, іонами, комплексами, яка відбувається у системі метал — шлак доменного, сталеплавильного або ливарного процесів, полум'ї нагрівальної печі у гомогенних твердих фазах металу за його прокатки, термообробки або спікання порошків.

На другому рівні взаємодія відбувається між окремими молекулярними глобулями і неметалевими включеннями та рідким металом, зернами твердого металу, молями палива та повітря за горіння тощо.

На третьому рівні розглядаються окремі створення: краплі, бульби, частинки матеріалів і т. ін.

В обробці металів тиском метал взагалі може розглядатися як ідеалізоване суцільне середовище. В цьому випадку математичне моделювання процесів обробки тиском виконують за допомогою математичного апарату теорії пластичності.

З кожним рівнем масштаб процесу, що розглядається, поступово зростає аж до макрорівня металургійного агрегату в цілому.

Системи бувають однорідними, якщо складаються з одного виду елементів, в яких протікають однакові фізико-хімічні перетворення, або неоднорідні, якщо в елементах, що їх складають, відбуваються різні процеси.

За засобом функціонування системи поділяються на безперервні (деякі види прокатки), безперервно-періодичні (безперервний доменний процес з періодичним випуском), періодичні (конвекторний та мартенівський процеси, виготовлення відливки, загартування деталі, пресування порошку в окрему деталь).

За наслідками функціонування системи можуть бути безвідходними, якщо все, що виробляється, використовується, або маловідходними, якщо якась частина продукту не використовується.

Системам притаманні певні властивості. Надійність — властивість виконувати функції, що вимагаються, зберігає в часі значення встановлених показників. Безвідказність — властивість зберігати працездатність у часі. Чуйність — властивість змінювати свої параметри під зовнішнім впливом. Перешкодозахищеність — властивість стало функціонувати в умовах дії внутрішніх і зовнішніх перешкод. Сталість — збереження властивостей, що вимагаються після певних підбурюючих впливів.

Якщо зобразити систему у вигляді прямокутника (рис. 1.1), то вона може характеризуватися певною кількістю вхідних, що контролюються (x_1, x_2, x_3,...), або не контролюються (z_1, z_2, z_3,...), що можуть змінюватися за бажанням та впливати на процеси в системі (u_1, u_2, u_3,...), та вихідних, що контролюються (y_1, y_2, y_3,...), або параметрів системи.

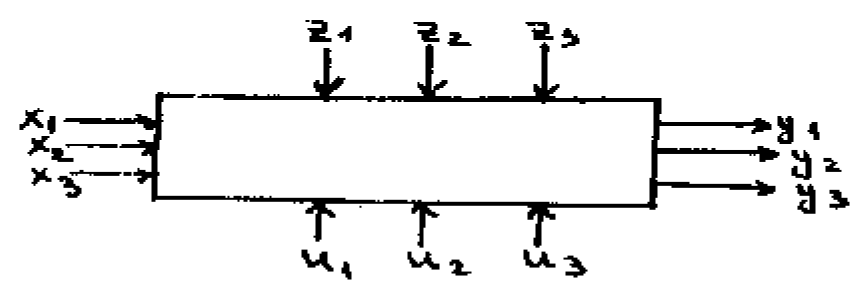

Рис. 1.1. Схема моделі

Вхідні параметри u є такими, якими можна управляти, якщо вони вимірюються, стабілізуються або автоматично змінюються за заданою програмою. Такими є гранулометричний та хімічний склад шихти при виплавці чавуну, сталі та литва, або при спіканні, геометрична форма та розміри об'єму металу, що обробляється тиском або термічно.

Параметри системи x вимірюються, але впливати на них не можна та вони не залежать від режиму процесу. Такими є, наприклад, деякі розміри металургійних агрегатів, що були обрані свого часу і на цей момент не можуть бути змінені. Хоч за бажанням, якщо це необхідно, з часом їх можна буде змінити, але протягом наступного здійснення процесу вони знову залишаться незмінними.

Якщо параметри не залежать від режиму процесу, вони називаються зовнішніми, а якщо залежать, — внутрішніми.

Параметри поділяються на конструктивні, до яких належать геометричні характеристики конструкцій елементів системи, та технологічні, тобто фізико-хімічні величини, які характеризують властивості, механізм та кінетику металургійних процесів.

Існують також параметри стану, до яких належать концентрація, температура витрати речовини та властивостей, таких як в'язкість, густина, поверхневий натяг тощо.

Фізико-хімічні (технологічні) процеси, що відбуваються у металургійній системі, можуть бути стаціонарними, якщо параметри системи не змінюються в часі, або нестаціонарними, якщо змінюються. Перші звичайно відбуваються у відкритих системах, які обмінюються речовиною, енергією та імпульсом з навколишнім середовищем, як наприклад, доменна піч, в яку завантажується шихта, або безперервний прокатний стан, до якого надходить заготовка. До других належать періодичні процеси, коли обмін речовиною з навколишнім середовищем відбувається через певні проміжки часу: завалка шихти до конвертера або розміщення деталі, що термооброблюється до відповідного середовища.

Взагалі стаціонарні процеси в деяких обставинах можуть відбуватися як нестаціонарні. Це буває, коли змінюється режим процесу (його прискорення або уповільнення) або на стадії його запуску чи зупинки. Наприклад, у доменному стаціонарному процесі за зміни витрат кисню, який прискорює процес, або за пуском чи зупинкою доменної печі.

Відповідно до виду процесів системи, в яких вони відбуваються, належать до статичних або динамічних.

Сукупність впливів, що відбуваються в процесі перетворення вхідних змінних у вихідні, складає технологічний оператор. Він, як правило, є суперпозицією, тобто результатом накладення цілого ряду елементарних технологічних операторів хімічного та фазового перетворення, дифузійного, конвективного і турбулентного переносу речовини та тепла, змішання, коалесценції і диспергування фаз та ін.

У процесі може спостерігатися збурення, тобто такі зміни стану процесу, які потребують перерахунку режиму здійснення процесу. Вони можуть бути плавними та стрибкоподібними. Якщо період між збуреннями $T_{зб}$ та час відповідного перехідного процесу $T_{пер}$, що відбувається внаслідок цього, співвідносяться таким чином, що $T_{пер} << T_{зб}$, то режим процесу може розглядатися як стаціонарний. Навпаки, при $T_{пер} >> T_{зб}$ процес відбувається у динамічному режимі.

Збурення складають шум процесу. За відсутності збурень процеси називаються детермінованими, тобто такими, що визначаються. Якщо збурення значно впливають на режим процесу, останній називається стохастичним. У детермінованих процесах вихідні параметри y залежать тільки від вхідних x та u, а у стохастичних — також і від параметрів z.

Якість функціонування металургійної системи визначається сукупністю властивостей, що характеризують технічний стан і ступінь пристосованості системи до виконання мети функціонування, що задається. Вона характеризується критерієм ефективності, за яким оцінюється ступінь пристосування системи до поставленої мети.

У сучасній науці системи досліджуються в межах системного підходу, що є направленням методології наукового пізнання і соціальної практики. В його основі лежить розглядання об'єктів як систем. Він орієнтує дослідження на розкриття цілісності об'єкта, виявлення типів зв'язку у ньому та зведення їх в єдину теоретичну картину. Системний підхід обгрунтований взаємозв'язком, взаємодією та взаємообумовленістю явищ та об'єктів у світі та суспільстві. Тому явища та об'єкти, що вивчаються, розглядаються не тільки як самостійні системи, а й як підсистеми деякої більш великої системи.

Відносно металургійних систем системний підхід є методологічним направленням, головною метою якого є розробка загальної стратегії, а також неформалізованих, або евристичних, і формалізованих дій комплексного дослідження та створення складних металургійних процесів та систем різних типів і класів. Системний підхід виходить з того, що взаємозв'язок та взаємодія металургійних процесів, що входять у деяку металургійну систему, забезпечують появу в ній принципово нових властивостей, які не притаманні окремим металургійним процесам.

Кожний металургійний процес (доменний, сталеплавильний, прокатний, ливарний, термообробний та ін.) формалізується як фізико-хімічне багатофазне та багатокомпонентне суцільне середовище, розподілене у просторі і змінне в часі, в кожній точці гомогенної частини якого та на межі розподілу фаз відбувається перенесення речовини, енергії та імпульсу за наявності джерел останніх. До фізико-хімічної системи надходять потоки суцільного середовища, що характеризуються векторами вхідних змінних, до яких належать склад, температура, тиск, швидкість, густина, в'язкість, характеристики дісперсності та ін. У межах фізико-хімічної системи вони зазнають фізико-хімічного перетворення у вихідні змінні.

Ця сукупність взаємопов'язаних процесів оформлена у вигляді металургійних агрегатів (доменна і мартенівська пічі, кисневий конвертер, прокатний стан, нагрівальна піч тощо), в яких відбувається певна послідовність технологічних операцій.

Металургійне підприємство (комбінат або завод) теж можна розглядати як систему значного масштабу, яка складається з великої кількості взаємопов'язаних підсистем, окремих виробництв (доменного, сталеплавильного, прокатного, допоміжних та ін.), між якими існують відношення підпорядкованості у вигляді ієрархічної структури з трьома основними ступенями: перший — типові металургійні процеси металургійної технології (механічні, гідродинамічні, теплові, дифузійні, хімічні) у певному агрегатному оформленні та локальні системи управління ними; другий — виробничі цехи і системи автоматичного управління цехами, в якому цех є сукупністю типових технологічних процесів і агрегатів; третій — системи оперативного управління сукупністю цехів, системи організації виробництва, планування запасу сировини і реалізації готової продукції.

Відповідно системами ще більшого масштабу є металургійна галузь, до якої входять окремі металургійні виробництва, народне господарство, що складається з окремих галузей; нарешті, світова економіка, яка зв'язує в більшому чи меншому ступеню економіку окремих країн.

Зі збільшенням масштабу системи підвищується значущість інформаційних зв'язків порівняно з іншими.

1.2. Модель та моделювання

Модель — це будь-яке зображення, опис, схема, креслення якого-небудь об'єкта, процеса або явища, що є оригіналом моделі, які використовуються як представник останнього.

Відповідно моделювання — це дослідження явища, процесу, системи шляхом побудови та вивчення їх моделей, а також використання моделей для визначення або уточнення характеристик нових об'єктів, що створюються. На ідеї моделювання базується будь-який метод наукового дослідження — як теоретичний, за яким використовуються різного роду абстрактні моделі, так і експериментальні, що використовують предметні моделі.

Якщо модель повністю тотожна об'єкту, що моделюється, вона називається ізоморфною. Ізоморфні моделі містять у собі всі характеристики і особливості, теоретично притаманні реальному об'єкту.

Гомоморфні моделі є спрощеним віддзеркаленням найважливіших характеристик системи.

Моделі поділяються на класи. Узагальнені моделі дають загальну якісну уяву відносно процесу. Вони можуть бути іконографічними,схемографічними, що являють собою графічне зображення об'єкта, або операційно-описувальними, процедурно-описувальними, якщо дають послідовне словесне описування процесу. До таких належать креслення або технологічні інструкції. Іноді йдеться про концептуальні, феноменологічні моделі, які є словесним описом процесу.

Інший клас створюють математичні моделі, що дають кількісний опис об'єкта. Якщо математична модель є сукупністю математичних співвідношень у вигляді рівнянь та нерівностей, вона називається символічною, а якщо має графічний вигляд з кількісним визначенням, як наприклад номограми, то іконографічною.

Відповідно до системи математична модель є формалізацією останньої, що виражає зв'язок між вихідними і вхідними параметрами системи, параметрами стану і збуджуючими параметрами.

Якщо модель базується на загальних законах, вона називається детермінованою. У металургійних системах найбільш вживані закони зберігання маси, енергії та імпульсу, тобто кількості руху. Такі моделі також називаються фізико-хімічними, аналітичними. При їх складанні використовуються кінетичні закономірності перенесення маси і тепла, а також хімічних і фазових перетворень. Параметри цих моделей визначаються розрахунковим шляхом і не потребують експерименту.

2—7-1197

Моделі, що складаються шляхом статистичної обробки результатів експерименту, називаються емпіричними або статистичними.

Металургійні системи звичайно багатофакторні й дуже складні в теоретичному описанні. Властивості фаз не завжди точно визначені та анізотропні. Все це значно утруднює складання детермінованих моделей. Але поступово, в міру зростання обізнаності в процесах, що відбуваються у системі, кількість детермінованих моделей зростатиме, що підвищуватиме спроможність прогнозувати наслідок процесів.

Можливості емпіричних моделей обмежені тим масивом даних, які оброблялись. Тому, незважаючи на простоту складання таких моделей, їх застосування обумовлює значну розбіжність результатів прогнозування.

Найбільш поширені детерміновано-стохастичні моделі, які складаються на підставі загальних законів та перевірених теоретичних знань щодо закономірностей процесу, але вживають параметри, які визначаються шляхом експерименту. Це допомагає враховувати дію неконтрольованих збуджуючих дій на процес. Такі моделі інколи також називаються комбінованими або полуемпіричними.

Якщо параметри моделі залишаються незмінними у просторі, тоді це є моделі з зосередженими параметрами, а якщо змінюються — з розподіленими параметрами.

Залежно від обставин для математичного опису моделей вживаються різні класи рівнянь: алгебраїчні, трансцедентні, звичайні диференціальні, диференціальні в окремих похідних, інтегральні. Останні зустрічаються досить рідко.

Алгебраїчні та трансцедентні рівняння звичайно вживаються за моделями стаціонарних процесів на об'єктах з розподіленими параметрами або за моделями, що описують стаціонарні зв'язки між параметрами. Вони мають кінцевий вигляд й називаються кінцевими рівняннями, що можна розв'язувати в явному або неявному вигляді відносно функції. У першому випадку величина функції визначається безпосередньо, а в другому — чисельним методом за яким-небудь алгоритмом розрахунку, в тому числі на електронно-обчислювальній машині (ЕОМ).

Звичайні диференціальні рівняння слугують для опису нестаціонарних режимів роботи об'єктів із зосередженими параметрами або таких, що розподілені за однією координатою у просторі зі стаціонарним режимом роботи. Лінійні диференціальні рівняння та їх системи можуть бути розв'язані аналітичним шляхом, а нелінійні найчастіше доводиться розв'язувати на ЕОМ.

Диференціальні рівняння в окремих похідних містять функцію кількох незалежних змінних. Їх використовують для опису динаміки об'єктів з розподіленими параметрами або стаціонарних режимів з параметрами, розподіленими за кількома координатами.

Моделювання може відбуватися за допомогою теорії подібності, що основана на аналогії натурального та модельного об'єктів. За її вживанням необхідно бути певним в ідентичності процесів, що в них відповідно відбуваються, та забезпечити традуктивність, тобто можливість перенесення результатів з моделі на натуру. Останнє містить масштабування — передбачення зміни параметрів за переходом від малих моделей до великого оригіналу.

Теорія подібності широко вживається за моделювання гідродинамічних процесів. Існують вказівки на неможливість її використання для моделювання хімічних процесів.

Математичне моделювання відбувається як вивчення можливостей натурального об'єкта за допомогою розрахунків за створеною моделлю. При значній складності та великого обсягу розрахунків найчастіше розробляється алгоритм останніх, що реалізується на ЕОМ.

Математичний опис металургійної системи, математичне моделювання звичайно містить три аспекти і змістовний аналіз апріорної інформації відносно системи, а також складання переліку елементарних технологічних операторів, що характерні для неї; аналітичний, який полягає у переході від змістовного до математичного; обчислювальний, який відбувається як розробка моделюючого алгоритму, тобто послідовності операцій над рівняннями математичного опису.

1.3. Оптимізація

Оптимізація — це цілеспрямована діяльність, що забезпечує отримання найкращих у певному значенні результатів за відповідних умов та обмежень.

Оптимізація відбувається відповідно до об'єкта оптимізації, яким може бути конструкція агрегату, технологічний процес або людська діяльність з обслуговування перших двох.

Об'єкти оптимізації можуть бути з зосередженими параметрами, якщо можна зневажити різницею величини параметрів у різних точках об'єкту, або з розподіленими параметрами, якщо ця різниця є істотною.

Критерієм оптимальності або критерієм ефективності функціонування системи є параметр системи, за яким визначають, наскільки добре функціонує система. Щодо математичної моделі системи критерій оптимальності називається цільовою функцією.

Як критерій оптимальності можуть вживатися технологічні та конструктивні параметри системи, людська діяльність з обслуговування процесу, його економічні показники. Найзагальніший характер мають економічні критерії, такі як прибуток, норма прибутку, рентабельність, собівартість продукції, капітальні вкладення, експлуатаційні витрати тощо.

На оптимізацію об'єкта можуть бути накладені обмеження, тобто умови, яких необхідно додержуватись незалежно від того, як це вплине на критерій оптимальності. Найчастіше обмеження бувають за кількістю і якістю сировини і продукції, за умовами технології, економічними та кон'юнктурними міркуваннями, за необхідності охорони праці, техніки безпеки, санітарних вимог та охорони навколишнього середовища.

Якщо треба досягти найкращих показників з критерію оптимальності без умов щодо інших величин параметрів об'єкта оптимізації, тобто без обмежень, тоді критерій оптимальності називається простим, у протилежному випадку — складним.

До критерію оптимальності висуваються певні вимоги. Він має бути тільки одним, не можна одразу оптимізувати декілька параметрів. Критерій оптимальності повинен бути таким, що контролюється та має кількісну оцінку, бути статистично вірогідною величиною й мати нормальне розподілення, розподілення Гаусса та ймовірностей за експериментом.

Нарешті, критерій оптимальності повинен мати певні ступенів вільності, що дозволяють змінювати його величину.

Оптимізація може здійснюватись комплексним методом, який передбачає розглядання складного об'єкта оптимізації як єдиного цілого, або декомпозиційним, за яким об'єкт поділяється на окремі блоки, що оптимізуються.

Комплексний метод оптимізації поділяється на прямі та непрямі методи, які розрізняються типом обчислення цільової функції та стратегією пошуку екстремуму цільової функції.

Тип обчислення може передбачати розрахунок тільки цільової функції, її першої та другої похідної.

Стратегія пошуку містить метод Гаусса — Зайделя і сімплекс-метод; методи градієнта і найшвидшого спуску та їх модифікації; апроксимацію цільової функції в оточенні робочої точки квадратичною функцією та дослідження характеру її поверхні.

2. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАННЯ НА ОПТИМІЗАЦІЮ

2.1. Порядок дій

Розв'язання завдання на оптимізацію має певний порядок дій, який передбачає такі етапи:

загальний аналіз завдання на оптимізацію та об'єкта оптимізації;

вибір критерію оптимальності та перевірка його на відповідність наведеним вимогам;

факторизація об'єкта оптимізації, тобто вибір управляючих змінних, які впливають на критерій оптимальності;

експеримент у пошуках впливу вибраних факторів на критерій оптимальності;

створення математичної моделі, що описує зв'язок цільової функції та управляючих змінних;

вибір оптимальної стратегії дослідження системи;

визначення екстремуму критерію оптимальності з урахуванням обмеженості змінних;

перевірка знайденого розв'язку та його впровадження.

2.2. Підготовка до експерименту

Загальний аналіз завдання на оптимізацію та об'єкта оптимізації полягає у систематизації та впорядкуванні відомостей про об'єкт оптимізації, виявлення розбіжностей у поглядах на механізм процесів, що відбуваються у системі, і складання її власної феноменологічної моделі.

Необхідно вивчити попередні спроби оптимізації об'єкта, якщо вони мали місце, критерії оптимальності, що при цьому використовувалися, фактори, з якими були пов'язані критерії оптимальності.

Інколи завдання на оптимізацію може бути розв'язаним за вживання різних критеріїв оптимальності, споріднених між собою. У цьому випадку вибір останнього буде тим вдалішим, чим грунтовніші знання про об'єкт оптимізації.

Ще більше невизначеною є факторизація об'єкта оптимізації. Низький рівень знань відносно процесів, що відбуваються у системі, та невдалий вибір управляючих змінних, величину яких треба оптимізувати, щоб досягти найкращого результату з критерію оптимальності, зведуть нанівець усю роботу з оптимізації.

Вибір багатьох факторів у сподіванні, що серед них є такі, які тісно пов'язані з цільовою функцією, ускладнює розв'язання на оптимізацію, але збільшує шанси на успіх. Чим досконаліша феноменологічна модель процесу та системи, тим імовірніше вдала факторизація об'єкта й менша кількість факторів, якими можна обійтись.

Певну роль у виборі критерію оптимальності та факторизації об'єкта оптимізації відіграє інтуїція дослідника, яка є спроможністю осягнення істини шляхом безпосереднього її розсуду без обгрунтування за допомогою доведень і базується на підсвідомому знанні, набутому в попередньому досвіді. Відповідно, чим більше останній, тим вдалішим видається результат.

Іноді вдаються до методу апріорного ранжування факторів шляхом опитування експертів, фахівців, що мають відповідний досвід, відносно їхньої думки значущості того чи іншого фактора.

2.3. Пасивний експеримент

Розрізняють два види експерименту: пасивний і активний.

За пасивним експериментом контролюють, що відбувається в об'єкті оптимізації, процесі, системі, без втручання в хід подій. Перевагою пасивного експерименту є простота реалізації, виключення можливості яких-небудь втрат та аварійних ситуацій і малих витрат часу та сил на його здійснення. До його недоліків слід віднести малий обсяг корисної інформації, оскільки найчастіше процес намагаються вести у стабільному режимі, тобто за малим діапазоном коливання параметрів. Помилки у визначенні незалежних змінних спотворює майбутню математичну модель значно більше, ніж помилки у визначенні цільової функції. Якщо фактори взаємозалежні, тобто корелюються між собою, це утруднює виявлення їх зв'язку з цільовою функцією. Остання має підкорятися нормальному закону розподілу, а дісперсія її не залежати від абсолютної величини.

На металургійних підприємствах пасивний експеримент може здійснюватись шляхом збору даних за виробничими паспортами, які ведуть контролери відділу технічного контролю, або безпосереднім спостереженням дослідника, якщо у паспортах не фіксуються необхідні дані, або рівень їх ведення не задовольняє вимоги завдання на оптимізацію. Якщо фактор, який обрано за факторизацією, у повсякденній практиці не фіксується внаслідок відсутності відповідних пристроїв для вимірювання, доводиться створювати та встановлювати останні. При цьому треба мати на увазі, що ці пристрої у випадку вдалого виконання завдання на оптимізацію повинні функціонувати в тому самому режимі і після впровадження завдання у повсякденну практику.

Для збору даних створюється форма (рис. 2.1), до якої під час експерименту занотовують величини критерію оптимальності у та тих факторів $x_1x_2,...,x_n$, які обрані у сподіванні на їх зв'язок з у. Кількість експериментів, які треба провести, залежить від апріорно невідомого ступеню зв'язку між у і x_i та кількості обраних факторів.Чим нижче рівень кореляції між у та x_i та більша кількість останніх, тим більшою має бути кількість експериментів, тобто рядків у формі з величинами у та x_i. Звичайно на кожен x_i повинно припадати не менше як 20 експериментів.

№ п/п	у	x_1	x_2	...	x_n
1					
2					
3					
...					

Рис. 2.1. Форма для збору даних

Статистична вірогідність цільової функції перевіряється таким чином. Якщо вона проводиться без застосування ЕОМ, весь діапазон величин у поділяється на 4—6 рівних інтервалів. Їх кількість може бути тим більша, чим більше даних було зібрано під час пасивного експерименту. Підраховується кількість випадків, коли у припадає на кожний з інтервалів, а потім, яку частку у відсотках від загальної кількості даних вона становить. Будується графік (рис. 2.2) залежності частоти випадків, коли у входить до того чи іншого інтервалу. Якщо тип кривої подібний до типу кривої нормального розподілення (крива Гаусса) (рис. 2.2,а), то вважається, що у-статистично вірогідна величина й подальша обробка даних експерименту правомірна. Якщо вона має вигляд, далекий від подібності (рис. 2.2,б), то треба спробувати збільшити кількість пасивних експериментів і знову перевірити у на статистичну вірогідність. Якщо спроби будуть невдалими, оптимізувати у не вдається, бо існує якась причина (фактор), за якою у в обставинах, що досліджуються, не є випадковою величиною, тобто не може оброблятися за методами математичної статистики, основаними на теорії ймовірності.

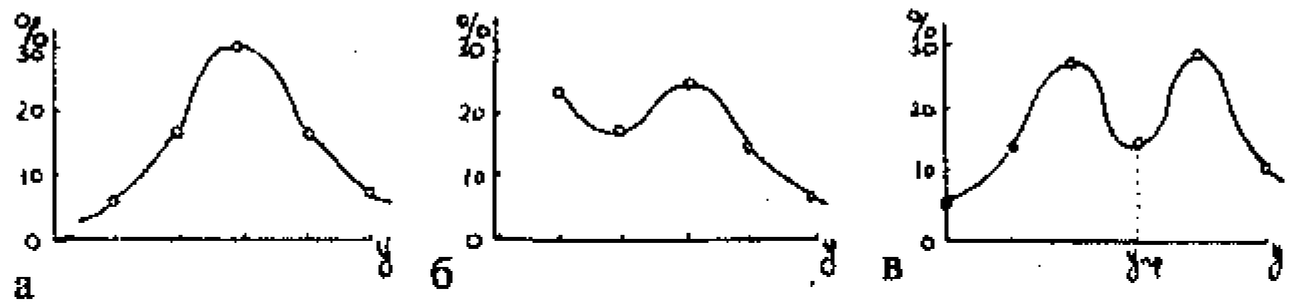

Рис. 2.2. Типи частотних кривих

Трапляються випадки, коли частотна характеристика ніби поділяється на дві окремі частки (рис. 2.2,в), кожна з яких подібна до кривої нормального розподілу. Це буває тоді, коли існує причина, за якої величина цільової функції повинна підтримуватися на двох принципово відмінних рівнях. Наприклад, виплавка у доменній печі двох різних типів чавуну — передільного та ливарного, або виплавка у кисневому конвертері низько- та високовуглецевих сталей, або прокатка двох груп марок сталі, кожна з яких завдяки своїм властивостям за обробки тиском повинна нагріватися до різних температур. У цьому випадку (рис. 2.2,в) треба масив даних експерименту поділити на два окремих масива, межею яких є значення $y_{гр}$, а далі обробляти кожен з цих масивів даних окремо.

Для обробки даних пасивного експерименту на ЕОМ слід користуватися відповідними програмами, за якими можна визначити статистичну вірогідність цільової функції з обчисленням її ступеню. Але випадок, зображений на рис. 2.2,в, за машинної обробки звичайно не виявляється, що доводить доцільність попередньої графічної обробки.

У подальшому масив даних підлягає обробці у пошуках того з х-ів, за оптимальної величини якого цільова функція у оптимізується.

Найпростішим методом обробки є такий, за яким будуються залежності у від кожного з x_i. За такою, так би мовити ручною, обробкою діапазон величин даного x_i поділяється на певну кількість (звичайно 4-6) рівних інтервалів, у кожному з яких підраховується середнє арифметичне значення цільової функції у. Ці величини на графіку розміщуються в середині інтервалу х та з'єднуються лінією (рис. 2.3). Біля середньої арифметичної величини у звичайно пишеться цифра, яка відповідає кількості значини у, що потрапили до відповідного інтервалу х і обчень величини у, що потрапили до відповідного інтервалу х і обчислювались. Тип кривої на рис. 2.3 доводить, що за величиною $x_{опт}$ цільова функція має максимум. Якщо за умови це відповідає

завданню, то знайдено оптимальне значення $x_{опт}$, за яким функція оптимізується.

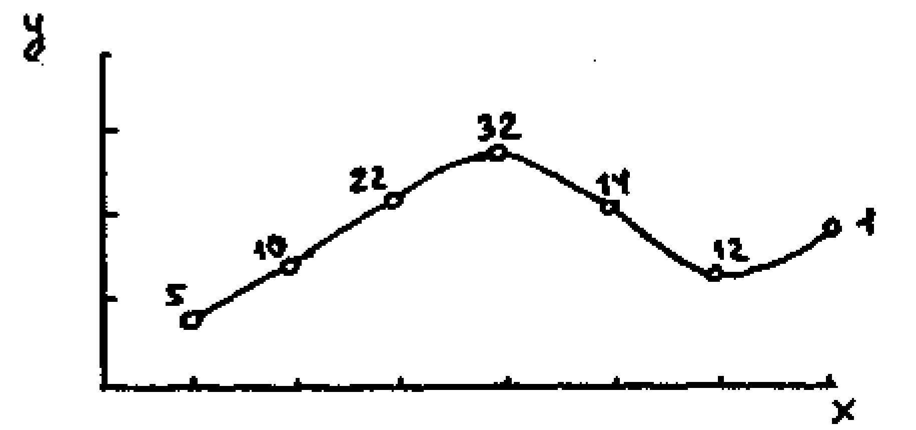

Рис. 2.3. Емпірична лінія регресії

Як і має бути, до крайніх інтервалів х потрапляє значно менше випадків, що свідчить про випадковість цього параметра та його статистичну вірогідність. Але, з іншого боку це призводить до випадків, коли залежність у від х відхиляється від тієї, яка існує в інтервалах з великою кількістю даних (рис. 2.3). Є підстави вважати, що підвищення величини у у крайньому правому інтервалі х, до якого належить лише один випадок, можна не брати до уваги.

Аналогічно обробляються дані й для інших обраних факторів x_i у пошук тих з них, які дозволяють оптимізувати цільову функцію. Якщо декілька з них дають залежність оптимального вигляду, то можливий вибір такого фактора, за яким оптимізована величина у, має найбільше або найменше значення щодо умов оптимізації.

Ручна обробка не дозволяє віднайти справді оптимальні умови, а тільки наблизитись до них, оскільки вона не враховує кореляцію між факторами та розглядає дію кожного з факторів окремо, а не у сукупності, як це має місце об'єктивно.

За обробки даних пасивного експерименту на ЕОМ вживаються програми множинної кореляції, за якими при обчисленні враховується взаємозалежність як між у та x_i, так і поміж останніми. Машинні розрахунки проводяться за моделлю залежності між у та x_i, яку замовляє дослідник. Це модель може мати вигляд поліному будь-якого ступеню: першого (лінійна модель), другого (квадратична) та більш високих. При збільшенні порядку моделі підвищується точність опису залежності, але ускладнюється аналіз впливу кожного фактору та пояснення цього впливу.

Форму залежності у від кожного з x_i можна з'ясувати, якщо перед обробкою на ЕОМ виконати ручну обробку, яка, хоча і

3—7-1197

менш досконала, але дає приблизну уяву відносно доцільності вживання тієї чи іншої моделі.

Коефіцієнти регресії за вибраною моделлю обчислюють методом найменших квадратів. ЕОМ розраховує при цьому коефіцієнт множинної кореляції R, який визначає вдалість обраної моделі, критерій Фішера F, що оцінює адекватність рівняння експерименту, критерії Стьюдента t для кожного члена рівняння окремо, які дають уяву щодо значущості відповідних членів у рівняння. Для кожного з них за програмою розраховується критична для масиву даних, що обробляють, величина R_{cr}, F_{cr} або t_{cr}. Якщо відповідна величина більша за критичну, результати слід вважати такими, що вдалися. У протилежному випадку при $R < R_{cr}$ або $F < F_{cr}$ рівняння не може застосовуватись при розв'язанні завдання на оптимізацію. При $t < t_{cr}$ відповідний член рівняння можна не брати до уваги і він може бути вилучений з рівняння шляхом підстановки в нього середньої арифметичної величини даних масиву, перемноження її на коефіцієнт регресії та приєднання добутку до вільного члена рівняння. Наприклад, якщо у рівнянні

$$y = 5{,}3 + 1{,}2x_1 - 2{,}3x_2 + 0{,}6x_3 - 0{,}2x_1^2 \qquad (2.1)$$

критерій Стьюдента для x_2 становить 0,5, водночас, як $t_{cr} = 1.91$, а середня арифметична $x_2 = 0{,}1$, то треба перемножити 0,1 на 2,3, а отриманий добуток 0,23 додати до 5,3, внаслідок чого рівняння (2.1) матиме вигляд

$$y = 5{,}53 + 1{,}2x_1 + 0{,}6x_3 - 0{,}2x_1^2. \qquad (2.2)$$

Обробка масиву даних на ЕОМ має сенс для безперервних функцій. Якщо існує розрив функції, то його швидше можна виявити за ручної обробки даних.

Якщо функція має кілька екстремумів, то порядок моделі, яка задається для обробки на ЕОМ у формі поліному, повинен дорівнювати кількості екстремумів плюс одиниця. Але, оскільки кількість естремумів на час складання моделі для машинної обробки невідома, то слід спочатку виконати ручну обробку в графічній формі, як наведено раніше, визначити кількість екстремумів (мінімумів та максимумів), а потім скласти модель у формі поліному (n + 1) ступеню, де n — сума екстремумів.

Якщо функція має кілька екстремумів, при оптимізації визначається так званий глобальний екстремум, тобто найменший з мінімумів або найбільший з максимумів.

2.3. Активний експеримент

Активний експеримент застосовується тоді, коли не витримуються наведені умови для пасивного експерименту, або те, що досліджується, на практиці взагалі ще не існує, наприклад, при розробці нових матеріалу, агрегату, технології.

Активний експеримент проводиться різними методами залежно від обставин.

Якщо обрано один оптимізуючий фактор x, то перший експеримент проводиться за певного значення x, наприклад $x = x_1$, яке обирається на основі припущень, інколи інтуїтивних. В результаті експерименту при $x = x_1$ отримується певен значення цільової функції y_1 (рис. 2.4). Другий експеримент проводиться при $x = x_2$, де $x_2 = x_1 - \Delta x$, а Δx обирається певного розміру, що дає $y = y_2$, де $y_2 < y_1$.

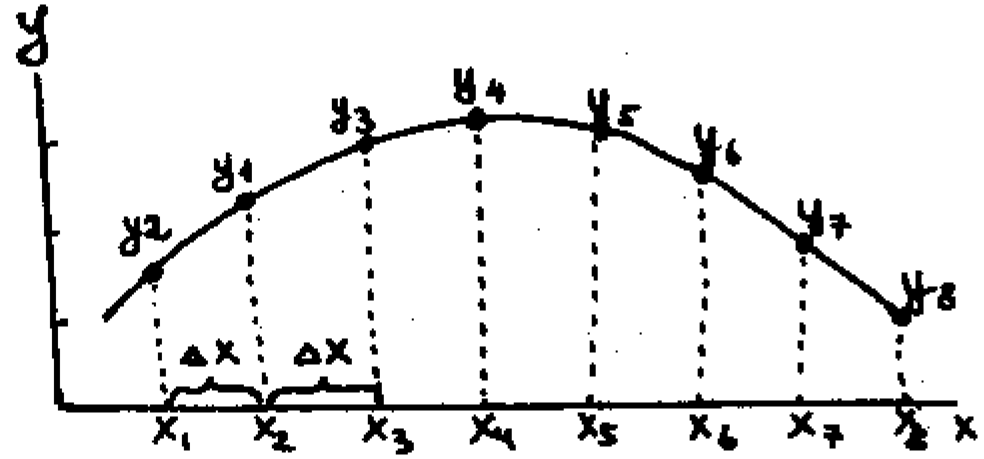

Рис. 2.4. Пошук максимуму активним експериментом

Якщо відповідно до завдання на оптимізацію йдеться про максимізацію величини цільової функції, то пошук продовжується у напрямі $x > x_1$ і обирається нове значення $x = x_3 = x_1 + \Delta x$, що за експериментом дає $y = y_3 > y_1$. Тоді послідовно беруть значення x, що дорівнюють x_4, x_5,... до отримання при $x = x_n$ (на рис. 2.4 $x = x_6$) після експерименту y_n , y_{n-1}.

Після цього для певності можна провести ще кілька експериментів при $x = x_7$ і x_8, щоб дійти висновку, що при $x = x_5$ цільова функція максимізується, тобто оптимізується.

У процесі пошуку можна змінювати величину Δx, якщо це дозволить швидше дістати максимуму.

Якщо цільова функція y за факторизацією об'єкта оптимізації визначена як залежна від двох змінних x_1 та x_2, активний експеримент можна реалізувати за методом Гаусса — Зайделя.

Експеримент починається в будь-якій точці x_1 (рис. 2.5), яку обирають з урахуванням попереднього досвіду або інтуїтивно, внаслідок чого отримують певну величину цільової функції $y = y_1$. Залишаючи незмінним рівень x_2, з обраним кроком Δx_1 експеримент проводять у точці 2 з отриманням $y = y_2$. Якщо $y_2 < y_1$, а цільову функцію треба максимізувати, то подалі експеримент проводиться у точках 3 та 4 з отриманням y_3 і y_4. Припустимо, що y_3 є найбільшою серед чотирьох величин, тобто є максимумом, тоді переходимо з якимось обраним кроком Δx_2 на навий рівень x_2 у точку 5. Цей метод використовує принцип, за яким ведеться пошук максимуму у разі існування однієї змінної (див. рис. 2.4).

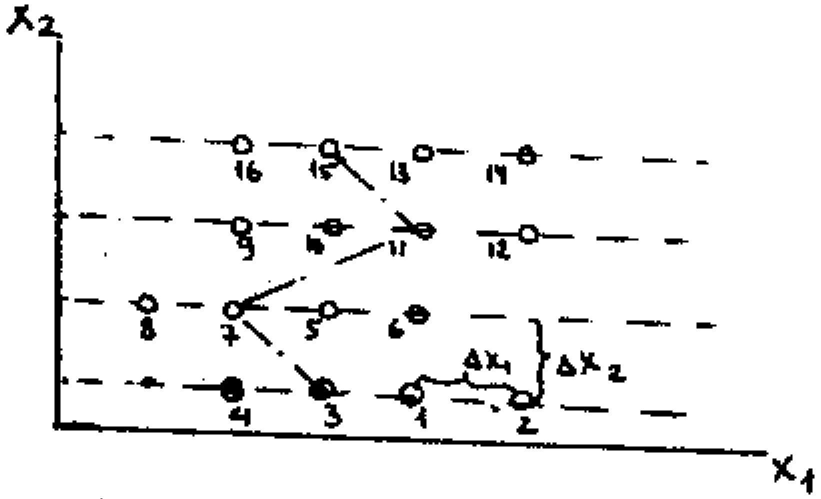

Рис. 2.5. Метод Гаусса — Зайделя

Якщо, проводячи експеримент у точках 5—8, визначають максимальне значення y, наприклад у точці 7, то переходять на новий рівень x_2 і т.д. Так роблять до тих пір, поки на новому рівні x_2 максимальна величина y, наприклад y_5 у точці 15, не виявиться меншою, ніж на попередньому рівні x_2 у точці, наприклад 11, $y_{11} > y_{15}$. Тоді, для перевірки, може бути взятий ще один рівень x_2, вищий, ніж для точок 13—16, або експеримент припиняється, а координати x_1 та x_2 у точці 11 вважаються оптимальними.

Метод Гаусса — Зайделя може виявитися занадто довгим і в такому випадку активний експеримент проводиться методом крутого сходження, або Бокса — Уілсона, що передбачає використання планування експерименту. Останнє дозволяє скоротити кількість експериментів, обрати чіткі, логічно обгрунтовані процедури, що послідовно виконує дослідник при активному експерименті, використати математичний апарат, що формалізує більшість дій дослідника, одночасно змінити всі змінні, організувати експеримент таким чином, щоб виконувались більшість передумов регресійного аналізу, отримати математичні моделі з кращими, ніж при пасивному експерименті якостями.

План першого порядку слугує для побудови математичних описів у вигляді лінійних поліномів типу $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$.

Якщо цільова функція y визначається двома факторами — x_1 і x_2, відбувається повний факторний експеримент на двох рівнях для двох факторів: 2^2.

Спочатку на основі знання щодо об'єкта оптимізації обирається центр плану для певних величин $x_1 = u_{01}$ та $x_2 = u_{02}$, в який переноситься початок координат (рис. 2.6). Для кожної змінної обирається інтервал зміни Δ, а величини змінних нормуються (кодуються) відносно обраних за центром плану:

$$\bar{x}_1 = (x_1 - x_{01}) / \Delta_1 \quad \text{і} \quad x_2 = (x_2 - x_{02}) / \Delta_2.$$

Відповідно матриця планування отримує вигляд координат чотирьох точок:

Номер досліду	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
1	+1	+1
2	+1	-2
3	-1	+1
4	-1	-1

(2.3)

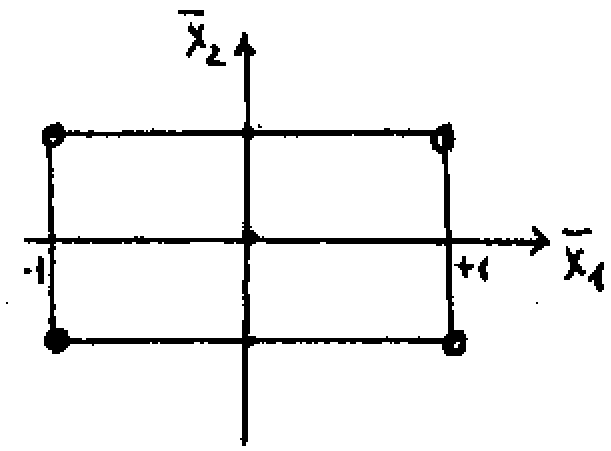

Рис. 2.6. Схема плану

Потім матрицю доповнюють величинами деякої $\bar{x}_1$, яка завжди має значення +1, та добутком змінних $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$ і вона набуває такого вигляду:

$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$	y
+1	+1	+1	+1	y_1
+1	+1	-1	-1	y_2
+1	-1	+1	-1	y_3
+1	-1	-1	+1	y_4

(2.4)

де y_i — експериментальні дані, що отримано за активним експериментом при обраних чотирьох комбінаціях величин x_1 та x_2.

За матрицею для рівняння вигляду $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2$ послідовно визначаються коефіцієнти регресії і для вільного члена за $\overline{x}_0$

$$a_0 = \frac{y_1(+1) + y_2(+1) + y_3(+1) + y_4(+1)}{4}, \qquad (2.5)$$

для a_1 за $\overline{x}_1$

$$a_1 = \frac{y_1(+1) + y_2(+1) + y_3(-1) + y_4(-1)}{4}, \qquad (2.6)$$

для a_2 за $\overline{x}_2$

$$a_2 = \frac{y_1(+1) + y_2(-1) + y_3(+1) + y_4(-1)}{4}, \qquad (2.7)$$

для a_{12} за $\overline{x}_1\overline{x}_2$

$$a_{12} = \frac{y_1(+1) + y_2(-1) + y_3(-1) + y_4(+1)}{4}, \qquad (2.8)$$

тобто рівняння матиме вигляд

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2. \qquad (2.9)$$

До x_1 і x_2 додаються Δ_1 і Δ_2 й за нових $\overline{x}_1$ та $\overline{x}_2$ обчислюють величини y для точок 6, 7 та 8 (рис. 2.7). Якщо у точці 7 величина y максимальна, то в ній знову відбувається повний факторний експеримент 2^2 з визначенням точок 9, 10, 11, 12, складанням матриці, проведенням активного експерименту з визначенням y_9, y_{10}, y_{11} та y_{12} і обчисленням коефіцієнтів регресії в новому рівнянні, за допомогою якого розраховується величина y в точках 13, 14, 15 і т. д., Таким шляхом поступово визначається та сукупність x_1 та x_2, за якої цільова функція оптимізується, тобто досягає мінімуму або максимуму відповідно до завдання на оптимізацію.

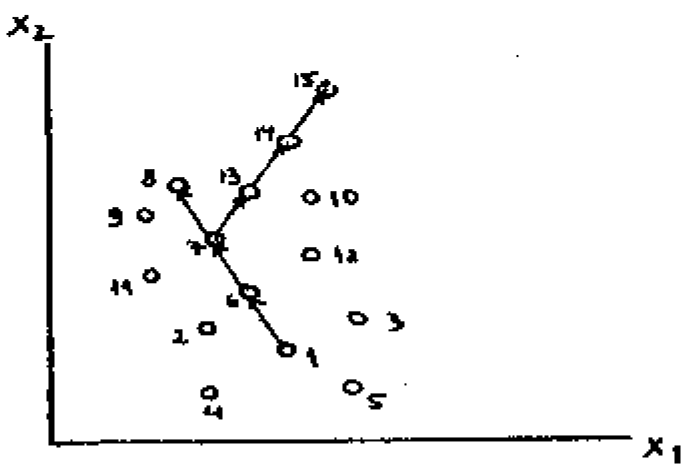

Рис. 2.7. Повний факторний експеримент

Для трьох факторів x_1, x_2, x_3 повний факторний експеримент 2^3 вимагає проведення восьми дослідів, для чотирьох — $2^4 = 16$ і т. д. Плани другого порядку, що складаються для отримання відповідних рівнянь, потребують складних обчислень коефіцієнтів рівнянь й на цьому етапі вивчення методу планування експерименту не передбачені.

Оптимум за активним експериментом може відшукуватись симплексним методом. Ідея методу полягає в тому, що за відомими значеннями цільової функції у вершинах випуклого многогранника, що називається симплексом, визначається напрям, в якому потрібно зробити наступний крок, щоб отримати найбільше зменшення (збільшення) критерію оптимальності.

На площині симплексом є трикутник, а у тривимірному просторі — чотиригранна піраміда.

Властивість симплексу — проти будь-якої з вершин симплексу розміщена тільки одна грань, на якій можна побудувати новий симплекс, відмінний від попереднього розміщенням нової вершини, тоді як решта вершин збігаються.

Для двох незалежних змінних пошук найменшого значення цільової функції зображено на рис. 2.8. Спочатку визначаються значення цільової функції в точках S_{10}, S_{20}, S_{30} у вершинах трикутника початкового симплексу, з яких обирається найбільше, наприклад, у точці S_{10}. Далі будується новий симплекс, для чого вершина S_{10} замінюється вершиною S_{11}, яка розміщена симетрично до вершини S_{10} відносно центра грані симплексу, що знаходиться проти вершини S_{10}. Тут і далі переніс вершини вказується пунктирною лінією зі стрілкою на кінці.

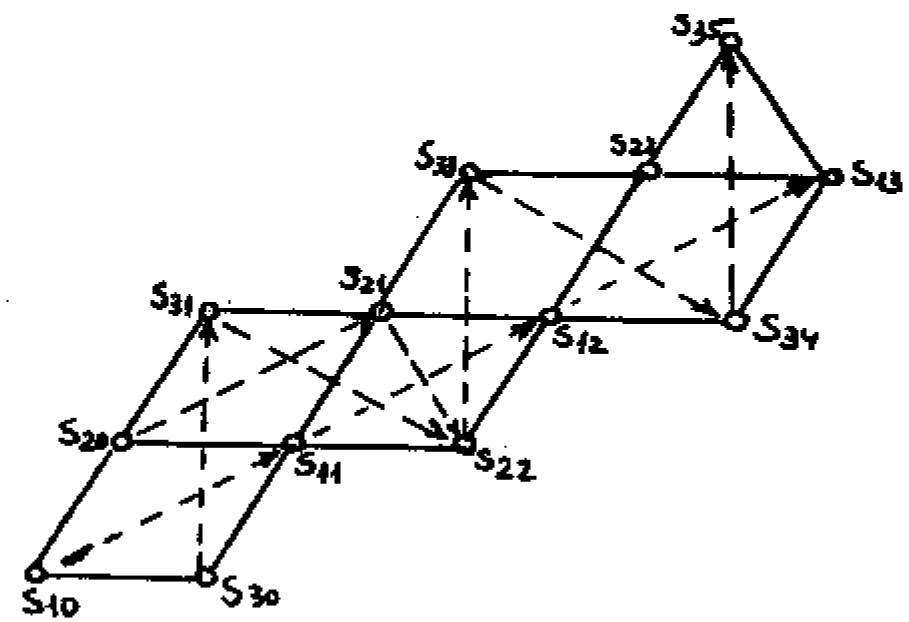

Рис. 2.8. Використання симплекс-методу

У точці S_{11} відшукується значення цільової функції, яке порівнюється з відомими значеннями для вершин S_{20} і S_{30}, й визначається вершина з найбільшим значенням цільової функції, наприклад у точці S_{30}. На цій основі будується новий симплекс $S_{11}C_{20}S_{31}$ шляхом переносу точки S_{30} у точку S_{31}.

Таким чином, поступово з використанням процедури виключення вершин симплексів з найбільшою величиною цільової функції остання зводиться до її мінімального значення. Поблизу від оптимуму може виникнути зациклення, яке на рис. 2.8 зводиться до того, що знову отримана вершина S_{35} останнього симплексу $S_{13}S_{22}S_{35}$ виключається й утворюється попередній симплекс $S_{13}S_{22}S_{34}$. У цьому разі, щоб продовжити пошук оптимуму, треба зменшити крок спуску, тобто розміри симплексу. Це робиться доти, доки всі ребра симплексу стануть меншими за достатньо малу величину, що визначена.

У разі пошуку максимуму симплексним методом завдання розв'язується шляхом руху в бік, протилежний вершині симплексу, в якій значення цільової функції є мінімальним.

2.4. Аналіз моделей

Якщо відомий аналітичний вигляд залежності цільової функції у від незалежних змінних x_i, можливе використання методу дослідження функцій класичного аналізу.

Цільова функція може мати екстремальні значення при таких значеннях незалежної змінної x_1, за яких перша похідна $\partial y/\partial x_i$ дорівнює нулю або зовсім не існує. На рис. 2.9, а показано випадок, коли дотична до кривої лінії є паралельною осі абсцис у точках максимуму М та мінімуму m, тобто похідна функції дорівнює нулю. На рис. 2.9, б функція має зломи у точках x_1 і x_2, що відповідає наявності кінцевого розриву в похідній $\partial y/\partial x$ в цих точках. На рис. 2.9, в показано також варіант, коли значення функції в точках екстремуму прямують до нескінченності.

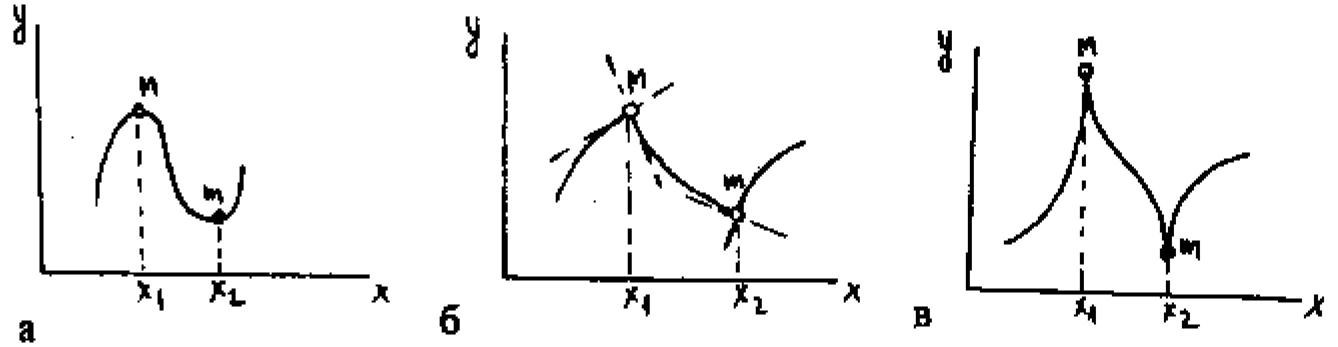

Рис.2.9. Типи екстремумів

Виконання наведеної умови є необхідним, але в деяких випадках вимагає перевірки.

Значення функції перевіряються шляхом порівняння. У точці x_k, в якій можливий максимум функції, розраховуються два її значення на відстані $\pm\varepsilon$ від точки x_k, де ε — мала величина. Якщо розраховані величини менші за її величину у точці x_k, то в останній розміщено максимум функції, а якщо більші, — мінімум.

Перевірку можна робити шляхом визначення знаків першої похідної в точках $x_k \pm \varepsilon$. Якщо вони різні, в точці x_k розміщено екстремум функції, причому, якщо знак похідної змінюється з (+) на (-). то в точці x_k — максимум, а якщо з (-) на (+), — то мінімум. Якщо ж знаки збігаються, то екстремум у точці x_k відсутній.

Тип екстремуму встановлюється також шляхом порівняння другої похідної функції $\partial^2 y/\partial x^2$ з нулем. Якщо вона менша за нуль, екстремум є максимумом, якщо більша, — мінімумом. Цей спосіб вимагає, щоб перша похідна була безперервною функцією.

Наприклад, якщо модель цільової функції має вигляд

$$y = x^2 - 2x + 6, \tag{2.10}$$

то перша похідна буде

$$\partial y/\partial x = 2x - 2. \tag{2.11}$$

За умови, що перша похідна дорівнює нулю, отримуємо, що при x = 1 функція матиме екстремум.

Друга похідна функції має значення

$$\partial^2 y/\partial x^2 = 2, \tag{2.12}$$

що більше за нуль, тобто екстремум є мінімумом.

Якщо критерій оптимальності є безперервною функцією багатьох змінних та має безперервні першу і другу похідні, то необхідною умовою екстремуму в точці x_i (i = 1, 2, ..., n) є рівність нулю в цій точці перших похідних за всіма змінними.

Наприклад, цільова функція залежить від двох змінних:

$$y = 4 - 0{,}5\,x_1^2 + 3\,x_1 x_2 - 0{,}5\,x_2^2 - \sqrt{2}\,(x_1 + x_2). \tag{2.13}$$

Беручи перші похідні функції по x_1 та x_2, отримуємо рівняння

$$\partial y/\partial x_1 = -\,x_1 + 3\,x_2 - \sqrt{2} = 0, \tag{2.13а}$$

$$\partial y/\partial x_2 = 3x_1 - x_2 - \sqrt{2} = 0, \tag{2.13б}$$

сумісне розв'язання яких дає $x_1 = 1/\sqrt{2}$ та $x_2 = 1/\sqrt{2}$, що відповідає необхідній умові існування екстремуму функції.

Другі похідні функції дають $\partial^2 y/\partial x_1^2 = -1$ і $\partial^2 y/\partial x_2^2 = -1$, звідки можна вважати, що за кожної змінної x_1 та x_2 у визначених точках функція набирає максимального значення. Але перевірка шляхом визначення величини функції зліва й справа на відстані є від $x_1 = 1/\sqrt{2}$ та $x_2 = 1/\sqrt{2}$ дозволяє дійти висновку, що точка, яка розглядається, неекстремумом, тому що за x_1 функція має мінімум, а за x_2 — максимум, тобто поверхня, що відповідає функції, являє собою "сідло".

При визначенні екстремуму класичним методом слід враховувати межі інтервалу, в якому змінюється x (рис. 2.10). Хоча функція максимізується в точці x_M і мінімізується в точці x_m, глобальний максимум відповідає точці $x_{M'}$, а мінімум — $x_{m'}$.

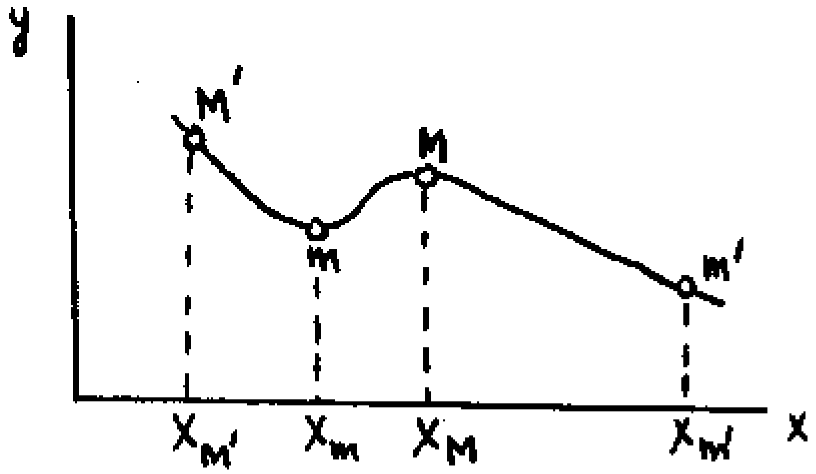

Рис. 2.10. Визначення екстремуму класичним методом

Якщо цільова функція є лінійною функцією незалежних змінних з лінійними обмеженнями на них, завдання на визначення екстремуму розв'язують шляхом лінійного програмування. При цьому звичайно припускається, що всі незалежні змінні більше або дорівнюють нулю, кількість обмежень типу рівностей не перевищує кількості незалежних змінних, а кількість обмежень типу нерівностей може бути довільною. При розв'язанні завдання звичайно розуміється, що оптимум досягається при максимальному значенні функції, а в разі необхідності визначення мінімального значення лінійної функції завдання зводиться до максимізації зміною знака всіх коефіцієнтів.

Наприклад, треба максимізувати критерій оптимальності, який має вигляд функції

$$y = x_1 + x_2 \tag{2.14}$$

за обмежень типу нерівностей

$$2x_1 + x_2 \le 1, \tag{2.15а}$$

$$x_1 + 2x_2 \le 1 \tag{2.15б}$$

за умовою $x_1 \ge 0$ і $x_2 \ge 0$.

Розмірність завдання, що розв'язується, дорівнює двом і можна скористатись фазовою площиною змінних x_1 і x_2 (рис. 2.11). Обмеження відокремлюють область, яка позначена на рисунку штриховкою, у межах якої змінюється цільова функція. Рівняння останньої (2.14) зображено на рис. 2.11 лінією АВ, яка при максимізації функції рухатиметься в бік, позначений стрілкою. Функція досягає максимуму в точці S, яка є перетином ліній, визначених обмеженнями, і може бути знайдена шляхом розв'язання системи рівнянь за максимального значення обмежень. У наведеному прикладі її координати дорівнюють $x_1 = 1/3$ і $x_2 = 1/3$, за яких $y = 2/3$.

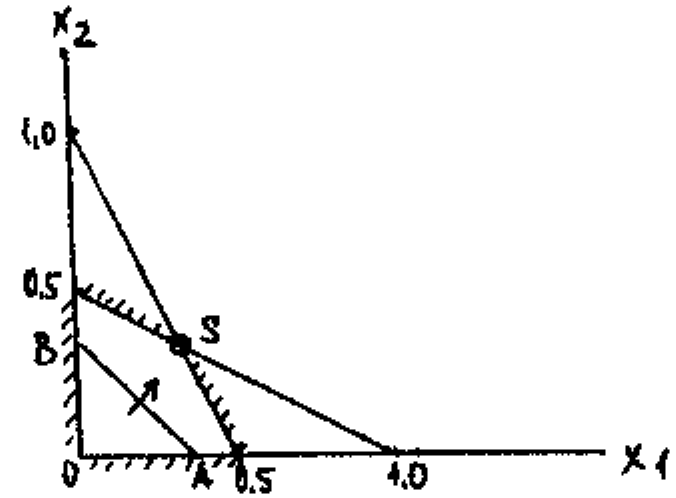

Рис. 2.11. Схема лінійного програмування

Якщо обмеження передбачають рівняння, то це дає змогу виключити відповідну кількість змінних. Наприклад, якщо треба знайти максимум функції

$$y = x_1 - 3x_2 + x_3 \tag{2.16}$$

за обмежень

$$x_1 + x_2 \le 2, \tag{2.17а}$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3/2, \tag{2,17б}$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1/2 \tag{2.17в}$$

і $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, то наявність двох рівнянь — (2,17б) і (2.17в) дозволяє виключити з розгляду дві незалежні змінні.

З (2.17в)

$$x_3 = 1/2 - x_1 + x_2. \tag{2.18}$$

Після підстановки (2.18) у (2.16) отримуємо новий вираз для цільової функції:

$$y^* = -2x_2 + 1/2, \qquad (2.19)$$

який в разі необхідності максимізації еквівалентний заданню з критерієм

$$y = -x_2. \qquad (2.20)$$

Після підстановки (2.18) в останню рівність матимемо систему обмежень

$$x_1 + x_2 \le 2, \qquad (2.20а)$$

$$x_1 + 3x_2 = 1, \qquad (2.20б)$$

$$x_1 - x_2 \le 1/2, \qquad (2.20в)$$

в якій $x_1 \ge 0$ і $x_2 \ge 0$.

З (2.20б)

$$x_2 = 1/3 - x_1/3. \qquad (2.21)$$

Підставивши залежність (2.21) в $y = -x_2$, запишемо вираз для критерію оптимальності:

$$y^* = -1/3 + x_1/3, \qquad (2.22)$$

максимізація якого еквівалента максимізації критерію

$$y = x_1 \qquad (2.23)$$

Якщо підставити (2.21) у (2.20а), останнє набирає вигляду

$$x_1 \le 5/2. \qquad (2.24а)$$

З умови $x_2 \ge 0$ та беручи до уваги (2.21), можна також знайти

$$x_1 \le 1. \qquad (2.24б)$$

Аналогічно з умови (2.20в) відповідно до (2.21) отримуємо

$$x_1 \le 1/2. \qquad (2.24в)$$

Серед трьох умов (2.24а-в) останнє є найсильнішим і завдання на максимізацію (2.16) зведено до максимізації функції (2.23) за обмеженнями

$$x_1 \le 1/2 \text{ і } x_1 \ge 0. \qquad (2.25)$$

Очевидно, що максимальне значення критерію оптимальності (2.16) досягається при найбільшому значенні x_1, яке з урахуванням обмежень буде $x_1 = 1/2$. Значення змінних x_1 і x_3 можуть бути обчислені з (2.21) та (2.18) і відповідно дорівнюють $x_2 = 1/6$, $x_3 = 1/6$, після чого з (2.16) знайдемо, що максимальне значення цільової функції становить 1/6.

Раніше було розглянуто лише кілька методів розв'язання завдань на оптимізацію, які є найбільш поширеними і відповідають часу, що відведено на вивчення дисципліни. Існують багато інших методів на зразок методів множників Лагранжа, варіаційного обчислення, аналогічного програмування, принципу максимуму, нелінійного програмування, кожен з яких у свою чергу містить декілька прийомів, що пристосовано для різних початкових умов, які дозволяють спростити і прискорити розв'язання завдання. За необхідності вони будуть наведені далі в окремих випадках металургійних процесів.

2.5. Перевірка рішення та його впровадження

Після розв'язання завдання на оптимізацію протягом певного часу відбувається випробовування його у натурних обставинах. Перш за все перевіряється адекватність розробленої моделі шляхом порівняння фактичних та розрахованих за нею величин критерію оптимальності. Для детермінованої моделі є можливість обмежитися кількома випадками зміни вхідних та керуючих параметрів. При статистичних моделях ця перевірка має бути значно ретельнішою, беручи до уваги, що останні розроблено на певному масиві даних. Іноді вважають за доцільне визначити лише форму статистичної моделі і постійно оновлювати коефіцієнти регресії шляхом переобчислення масиву даних, до якого повсякчасно додаються нові, які отримані під час здійснення процесу, та вилучаються застарілі. Це можливо при обладнанні виробництва обчислювальною технікою.

Оптимальні значення змінних, які забезпечують оптимальне значеня цільової функції, підтримуються протягом певного часу, що дозволяє встановити, що критерій оптимальності при цьому поліпшується.

Якщо умови виробництва змінилися внаслідок використання нової технології, обладнання або параметрів процесу, розв'язання завдання на оптимізацію повинно знову відбуватися. Необхідно пам'ятати, що під час розв'язання завдання на оптимізацію процес відбуватиметься у режимі, коли його параметри змінюються за теорією ймовірності, а не внаслідок певних зовнішніх дій.

3.4. Ливарні системи

3.4.1. Оптимізація систем пошуковими методами

У багатьох випадках перед дослідником постає завдання не тільки виявити характер зв'язків між вхідними та вихідними змінними того чи іншого об'єкта або системи, а й на завершальній стадії дослідження знайти оптимальне поєднання виходів (факторів), за якого певний вихід або відгук системи (параметр оптимізації), або певна функція декількох виходів (цільова функція) у досягають свого екстремального значення — максимуму або мінімуму:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = f(x) \to \min (\max), \qquad (3.138)$$

де x — вектор виходів.

Графічна інтерпретація задачі оптимізації системи

$$y = f(x_1, x_2) \to \max, \qquad (3.139)$$

при двох виходах (факторах) x_1, x_2 наведена на рис. 3.8. Тут точки A і A′ та відповідне їм значення $y_н = f(A)$ характеризують початковий стан системи; замкнені криві на поверхні відгуку та на горизонтальній площині — контури та їх проекції однакового рівня y; m, m′ — точки оптимального сполучення факторів, що відповідає y_{max}. Траєкторії руху до оптимуму у факторному просторі та на площині вказані стрілками.

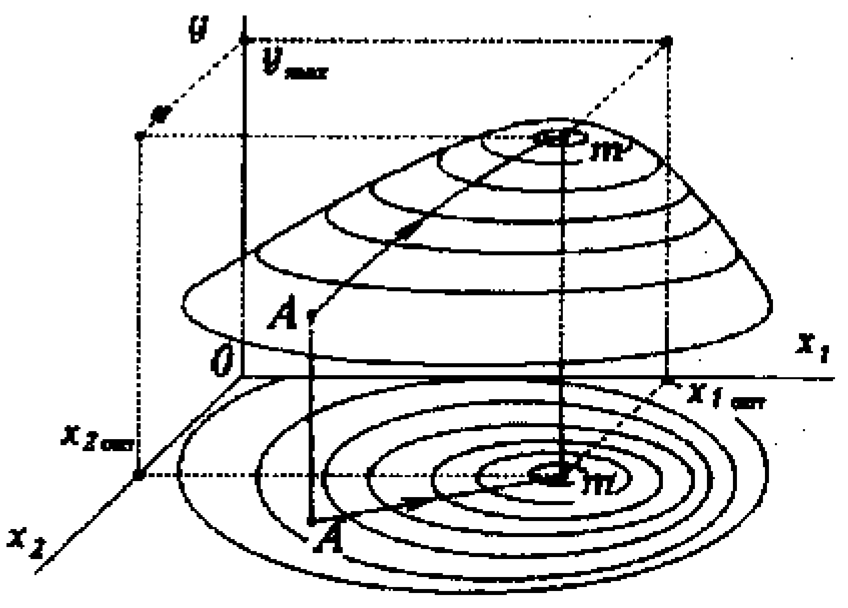

Рис. 3.8. Геометричне подання задачі оптимізації

Існує багато методів оптимізації, починаючи від найпростіших і таких, що потребують від дослідника спеціальної математичної підготовки.

У металургії та ливарному виробництві системи, як правило, відрізняються підвищеною складністю, а зв'язки між виходами і входами часто мають ймовірнісний характер. У цих умовах побудова адекватних аналітичних моделей систем практично неможлива. Тому поширене застосування мають статистичні моделі, а аналітичні методи оптимізації — методи математичного програмування — мають обмежене використання. Найбільше розповсюдження знайшли пошукові методи оптимізації.

Загальним для всіх пошукових методів є те, що в процесі їх реалізації виконують крокову заміну входів (факторів) системи та, спостерігаючи за нею, відмічають реакцію (відгук) параметра оптимізації або цільової функції на цю зміну. Якщо стан системи змінюється в потрібному напрямі (наприклад, параметр оптимізації або цільова функція збільшуються в задачах пошуку їх максимуму), то повторюють таку саму дію з боку входів системи. Якщо ж виявляється, що відповідь на вхідну дію реакція системи не відповідає бажаній, напрям чергового кроку вхідної дії змінюють на протилежний.

Відомий з виробничої практики метод "спроб та помилок", в якому фактори змінюють на підставі досвіду, інтуїції або навіть навмання, за наявності значної кількості факторів малоефективний. Потребують меншої кількості кроків зміни факторів ("спроб") і швидше ведуть до цілі ті пошукові методи, де крокове варіювання факторами виконується за певним планом, алгоритмом.

Серед відомих пошукових методів оптимізації однофакторних систем ливарного виробництва можна зазначити оптимізацію за результатами пасивного експерименту, метод "золотого перерізу", N-кроковий фібоначієвий план. Для оптимізації багатофакторних систем ливарного виробництва використовують методи Гаусса — Зейделя, випадкового пошуку, градієнта, крутого сходження (Бокса — Уілсона) та симплексний метод. Останній є одним з найпростіших в реалізації, особливо в умовах промислового експерименту, але водночас має ряд суттєвих переваг перед іншими. Тому для більш детального розгляду в подальшому надано перевагу саме цьому методу.

12—7-1197

3.4.2. Симплексний метод оптимізації

Симплексний метод (симплексне планування експерименту) поєднує в собі процедури вивчення системи та пошук екстремуму. Для цього використовується спеціальний план експериментів у вигляді симплекса.

Симплекс у k-вимірному факторному просторі є простіша k-вимірна замкнена геометрична фігура, утворена k + 1 вершинами, які з'єднані між собою прямими лініями. При цьому координати вершин симплекса є значеннями факторів в окремих експериментах (спробах).

У двофакторному просторі (k = 2) симплекс — трикутник у площині $x_1\,0\,x_2$, у трифакторному — тетраедр і т. д. Симплекс може бути регулярним — рівнобічний трикутник, правильний тетраедр та ін., взагалі, — фігура з рівновіддаленими одна від одної вершинами, та нерегулярним.

Основна властивість симплекса, що використовується в алгоритмі симплексного метода, полягає в тому, що відкиданням однієї з його вершин і побудовою нової вершини, яка лежить по інший бік протилежної грані, одержують новий симплекс. При поступовому проведенні дослідів (спроб) у нових вершинах симплекс здійснює кроковий рух у факторному просторі.

Процедура симплекс-планування починається з визначення кординатів початкового симплекса, тобто його початкового положення та розмірів у факторному просторі. Ця процедура для двофакторного експерименту досить проста і може бути реалізована без будь-яких розрахунків. Для багатофакторних систем визначення початкових параметрів симплекса є необхідним елементом процедури, інакше це може привести до певної невизначеності для реалізації наступних етапів оптимізації.

Існує декілька прийомів розрахункової побудови початкового симплекса. Один з них грунтується на використанні формули

$$x_{ij} = x_j^0 + r_{ij} S_j, \tag{3.140}$$

де x_{ij} — координата і-тої вершини початкового симплекса для j-го фактора; x_j^0 — основний рівень j-го фактора; r_{ij} - коефіцієнт варіювання для і-тої вершини j-го фактора; s_j — одиниця варіювання j-го фактора.

Значення коефіцієнтів варіювання беруть за табл. 3.11.

Таблиця 3.11

Фрагмент матриці значень коефіцієнтів варіювання r_{ij} для $k \le 3$ факторів

Номер спроби	Значення r_{ij} для фактора j = 1, 2, 3		
	1	2	3
1	0,5	0,289	0,204
2	-0,5	0,289	0,204
3	0	-0,577	0,204
4	0	0	-0,612
...	...	...	...

Для пошуку оптимума відкидають ту вершину симплекса, якій відповідає найгірше значення виходу системи. Такою "найгіршою" вершиною в задачах пошука максимума є вершина з найменшим виходом системи, а в задачах пошука мінімума — з найбільшим.

Нова вершина симплекса, що одержана відображенням найгіршої відносно протилежної грані, розміщується на прямій, яка з'єднує відкинуту вершину з центром ваги інших вершин (рис. 3.9,а). При цьому координату нової вершини визначають так:

$$x_i^{A'} = x_i^M + (x_i^M - x_i^A), \tag{3.141}$$

де $i = 1,k$,

або в іншому — більш узагальненому вигляді

$$x_j^{нов} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1} - x_j^{від}; \quad i \ne A, \tag{3.142}$$

де $x_j^{нов}$ — значення j-го фактора в новій спробі; $x_j^{від}$ — значення j-го фактора у відкинутій спробі; А — номер відкинутої спроби; n = k + 1 — кількість спроб при k факторах.

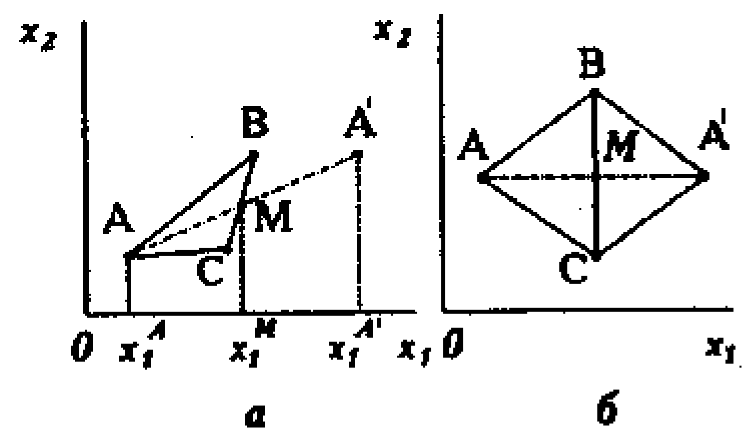

Рис. 3.9. Приклад симплексного плана оптимізації двофакторної системи

Подібне відображення найгіршої вершини при використанні регулярного симплекса виявляється дзеркальним (рис. 3.9,б). Якщо в процесі симплексної оптимізації результати спроб у двох або більшій кількості вершин виявляються однаковими, то рішення про подальший рух симплекса приймається випадковим чином. Процес руху до максимуму виходу двофакторної системи $y = f(x_1, x_2)$ при застосуванні регулярного симплекса в графічній інтерпретації показано на рис. 3.10. У цьому випадку координати точок, A, B, C визначають фактори x_1^A, x_2^A; x_1^B, x_2^B; x_1^C, x_2^C у трьох початкових спробах. Одержані відповідні результати спроб

$$y_A = f(x_1^A, x_2^A);\ y_B = f(x_1^B, x_2^B);\ yC = f(x_1^C, x_2^C) \qquad (3.143)$$

порівнюють між собою. Звідси для рис. 3.10,а

$$y_B > y_C > y_A, \qquad (3.144)$$

а для випадку, показаного на рис. 3.10,б,

$$y_C > y_B > y_A, \qquad (3.145)$$

де "найгіршими" за виходом системи виявилися вершини з індексом A.

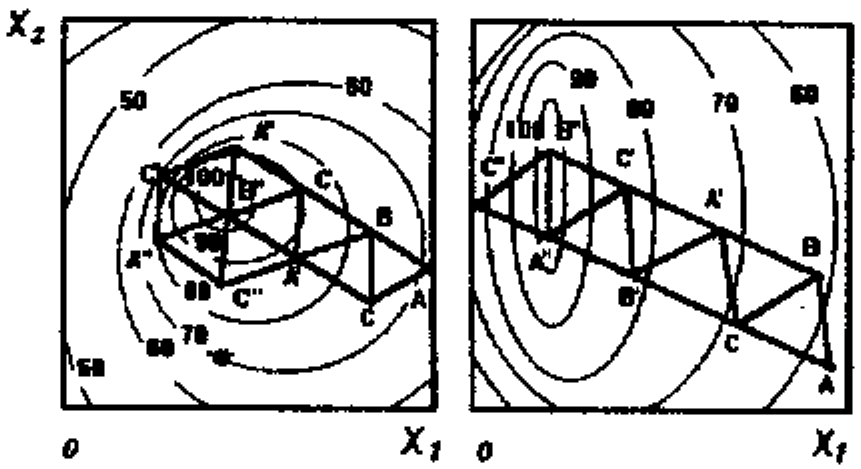

Рис. 3.10. Схема процесу оптимізації симплексним методом при різній формі поверхні відгуку: а — "пагорбок"; б — "гребінь"

Дзеркально відображуючи вершину A відносно протилежної грані BC симплексів, одержують вершину A′, у координатах якої ставлять наступну спробу і т. д.

Найпоширенішими варіантами завершення процедури симплекс-планування є такі. Якщо поверхня відгуку в зоні екстремуму має форму "пагорбка" (рис. 3.10,а), симплекс на заключному етапі процедури неминуче "зациклиться", тобто почне обертатися навколо вершини з найбільшим значенням відгуку. Координати цієї вершини визначають оптимальні умови x_1, x_2 для системи.

Слід зазначити, що в процесі руху симплекса на поверхні відгуку можливий вихід однієї з його вершин за межі реального простору факторів, або попадання в зони фізично неприпустимих значень факторів у так звані зони обмежень. Зонами обмежень можуть бути такі, що містять від'ємні значення того чи іншого фактора, наприклад, вміст хімічного елемента менший за нуль. У цих випадках слід виходити з положення невизначеності, керуючись конкретною ситуацією. Наприклад, можна екстраполювати значення поверхні відгуку в зону обмежень, вважаючи спробу у такій зоні за уявну, що є досить поширеним прийомом у техніці оптимізації. Подібна ситуація спостерігається в підрозд. 3.4.3.

У тому випадку, коли поверхня відгуку в області оптимуму має більш складну форму, наприклад, у вигляді "рівчака" або "гребеня" (рис. 3.10, б), на заключній стадії процедури може спостерігатися "коливання" симплекса відносно однієї і тієї ж грані. Координати оптимальних умов для такого випадку знаходяться у межах координат відрізка A″, B″ (див. рис. 3.10,б). Для більш точного та швидкого за процедурою визначення місця локалізації оптимуму можуть бути застосовані спеціальні заходи, наприклад метод деформованого симплекса та ін.

Слід відмітити ряд особливостей методу та його переваг порівняно з іншими методами оптимізації (див.підрозд. 3.4.1). Як видно з викладеного раніше, розрахунковий апарат методу простий, не потребує від дослідника спеціальних математичних знань і сам метод може бути реалізований як у "ручному" так і в "машинному" варіантах. Використання методу в промислових умовах особливо ефективно, тому що симплекс може невідступно рухатись за "дрейфуючим" екстремумом, якщо його положення змінюється залежно від зміни зовнішніх неконтрольованих факторів.

Методу не загрожують помилки, тому що він має властивість самоконтролю за своєю суттю. Помилка або груба похибка лише подовжують шлях симплекса, але не впливають на кінцевий результат. На відміну від методу крутого сходження та ін. симплекс-планування не потребує виконання умови адекватності відображення поверхні відгуку площиною в зоні початкової процедури.

Метод допускає більш м'які умови постановки та проведення експерименту. Критерій або функція оптимізації можуть не мати строгої кількості оцінки. Для прийняття рішення при відкиданні гіршого результату (вершини) досить переконатися, що та чи інша вершина лише якісно гірше останніх. Точність визначення факторів не є обов'язковою умовою методу, що часто неможливо забезпечити у промисловому експерименті. При цьому може порушуватись правильність симплекса, що не впливає на результат оптимізації.

3.4.3. Оптимізація хімічного складу сплава методом симплекс-планування

Постановка задачі. Необхідно знайти оптимальне співвідношення концентрацій графітизуючих елементів кремнію та нікелю для одержання максимальної твердості (за Шором) чавуну робочого шару прокатних валків з діаметром бочки 500 мм при постійному вмісті інших хімічних елементів.

Попередні уявлення про модель системи, що підлягає оптимізації, такі. З теорії та практики легування нікелем сплавів на основі заліза відомо, що вплив цього елемента на твердість має екстремальний характер. При цьому максимум твердості досягається завдяки утворенню, наприклад у чавунних виливках, при оптимальній концентрації Ni найбільш твердої, зносостійкої мартенситної структури металевої основи. При збільшенні до оптимальних концентрацій Ni структура металевої основи змінюється від ферито-перлітної до бейніто-мартенситної. При позаоптимальних концентраціях Ni у металевій основі виливка збільшується частка залишкового аустеніту, який знижує твердість чавуну.

Підвищуючи в межах дооптимальних концентрацій твердість металевої основи робочого шару валка, Ni одночасно — внаслідок графітизуючих властивостей — "пом'якшує" чавун у внутрішніх зонах виливка і тим самим підвищує його міцність. Кремній також знижує твердість чавуну, але в усіх зонах виливка, завдяки виділенню графітної фази. Присутність інших елементів у чавуні, різна інтенсивність охолодження виливка та інші неконтрольовані фактори ускладнюють питання з установленням оптимального складу валкового чавуну традиційним методом "спроб та помилок". Це обумовлюється різним впливом хімічних елементів, змінною швидкістю тепловідведення та ін., на процеси структуро- та графітоутворення. Оскільки загальний вплив указаних факторів потребує окремого розгляду, обмежимось формальним підходом до розв'язання поставленої задачі.

Визначимо основні умови та етапи, що передують та завершують процес оптимізації.

Параметрами, що контролюються, є концентрації двох основних елементів — Ni та Si, а також твердість чавуну. Вибір цих елементів обумовлений специфікою їх найбільш вагомого впливу на мікро-, макроструктуру і механічні властивості, зокрема, твердість валкового чавуну.

Параметрами, що не контролюються, є швидкість охолодження виливка в процесі структуроутворення, рівень концентрацій інших традиційних та легуючих хімічних елементів. Ці фактори підтримуються на технологічно постійному рівні. Можливість такого припущення обумовлена застосуванням стандартного технологічного оснащення (масивна металева форма), використанням стабільних за складом шихтових матеріалів, постійних умов плавлення та запозиченої обробки розплавленого металу.

Створення моделі багатокомпонентної і багатофакторної системи, якою в даному разі є хімічний склад валкового чавуну, в аналітичному вигляді неможливо. Тому вважатимемо достатнім уявлення про екстремальність та унімодальність фізичної моделі системи.

Аналіз на екстремум моделі, що не має аналітичної форми, виконуватимемо пошуковим методом, у даному випадку симплекс-плануванням.

Упровадження результатів оптимізації проілюструємо посиланням на відповідні нормативні документи.

Розв'язання задачі. У цій задачі оптимізаційному дослідженню підлягає вплив двох факторів — вмісту кремнію (x_1) та нікелю (x_2) на твердість у валкового чавуна за Шором (HSh). Для імітування реалізованих спроб (дослідів) в процесі оптимізації використовуватимемо ізограму HSh = $f(x_1, x_2)$, зображену на рис. 3.11. Зрозуміло, що такий прийом використовується в навчальних цілях, оскільки якби така ізограма була відома в дійсності, то ніякої оптимізації не треба було б проводити. На ізограмі замкнені лінії із зазначенням твердості в межах 40...90 HSh відповідають однаковому рівню твердості чавуну за різних концентрацій елементів x_1 і x_2.

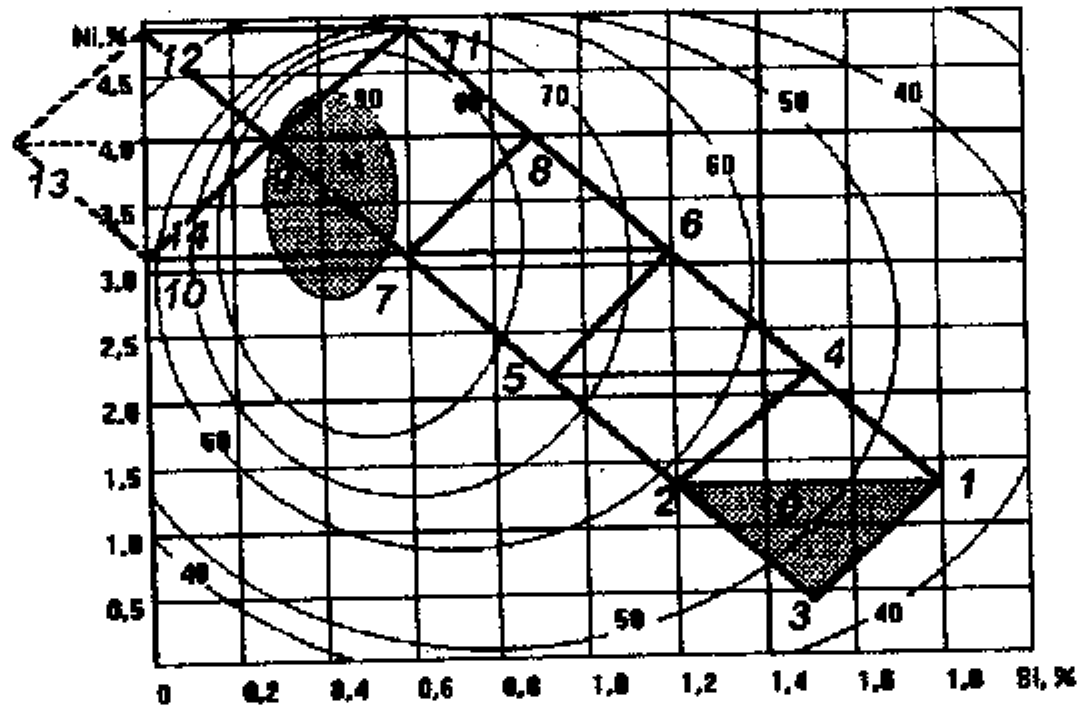

Рис. 3.11. Схема процедури оптимізації складу валкового чавуну

Керуючись попереднім досвідом, або виходячи з теоретичних міркувань — у даному прикладі досить сумнівних, — виберемо основний рівень x_j^0 (точка 0 на рис. 3.11) та одиниці варіювання факторів S_j (табл. 3.12).

Таблиця 3.12

Основні рівні та одиниці варіювання факторів

Номер фактора	Фактор — вміст	Позначення	Основний рівень x_j^0, %	Одиниця варіювання S_j, %
1	Si	x_1	1,5	0,6
2	Ni	x_2	1,0	1,0

Для дослідження впливу двох факторів (k = 2) необхідно поставити k + 1 = 2 + 1 = 3 спроби. При двофакторному експерименті, який здійснюється, початковий симплекс та процедура його руху показані на рис. 3.11. Координати вершин початкового симплекса знаходимо за формулою (3.140), а значення відповідних її компонентів визначаємо з табл. 3.11 і 3.12. Домовимось указувати номер спроби у дужках зверху біля відповідного символа, а номер фактора — знизу:

$$x_1^{(1)} = 1{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 1{,}8; \quad x_2^{(1)} = 1{,}0 + 0{,}289 \cdot 1{,}0 = 1{,}3;$$

$$x_1^{(2)} = 1{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 1{,}2; \quad x_2^{(2)} = 1{,}0 + 0{,}289 \cdot 1{,}0 = 1{,}3;$$

$$x_1^{(3)} = 1{,}5 + 0 \cdot 0{,}6 = 1{,}5; \quad x_2^{(3)} = 1{,}0 + 0{,}577 \cdot 1{,}0 = 1{,}4$$

Результати розрахунків, а також усіх наступних обчислень занесемо в робочу табл. 3.13. Проведення спроб (дослідів) — виплавлення чавуну із розрахунковим вмістом Si та Ni, а також визначення твердості чавуну виливка, як обумовлено раніше, імітуємо шляхом відшукання відповідних інтерпольованих значень твердості за ізограмою на рис. 3.11.

У початковому симплексі (спроби 1, 2, 3 в табл. 3.13 і вершини 1, 2, 3 на рис. 3.11) найгірший результат одержано в третій спробі: 58 > 45 > 44 HSh. Умовно (до перевірки) виключимо його з робочої табл. 3.13 та за (3.142) підсумуємо стовпці значень факторів у спробах (рядках), що залишились. Подвоєну суму поділимо на кількість залишених спроб, тобто 2, та віднімемо від результату значення фактора в пробі, що відкинута. Очевидно, що при двофакторному експерименті (3.142) спрощується (бо k = 2) і набирає вигляду

$$x_j^{нов} = \sum_{i=1}^{k=2} x_i - x_j^{від}; \quad i \neq A. \tag{3.146}$$

Таблиця 3.13

Робоча таблиця симплекс-планування

Номер спроби	Фактор x_1	Фактор x_2	Твердість HSh	Початковий симплекс	Відкинута спроба	Примітка
1	1,8	1,3	45	1-2-3		
2	1,2	1,3	58	1-2-3		
3	1,5	0,4	44	1-2-3		У.в.3
4	1,5	2,2	56	1-2-4	3	О.в.3, у.в.1
5	0,9	2,2	75	2-4-5	1	О.в.1, у.в.2
6	1,2	3,1	67	4-5-6	2	О.в.2, у.в.4
7	0,6	3,1	88	5-6-7	4	О.в.4, у.в.5
8	0,9	4,0	76	6-7-8	5	О.в.5, у.в.6
9	0,3	4,0	90	7-8-9	6	О.в.6, у.в.8 (опт. умови)
10	0	3,1	59	7-9-10	—	Коливання
11	0,6	4,9	70	8-9-11	7	Коливання о.в.7, у.в.8
12	0	4,9	45	9-11-12	8	Коливання о.в.8
13	-0,3	4,0	??	9-12-13	11	Зона обмежень (Si% < 0)
14	^	3,1	79	9-13-14 (9-13-10)	12	Зациклення симплекса

Умовні позначення: у.в. — умовно відкинута спроба;
о.в. — остаточно відкинута спроба.

13—7-1197

Таким чином, знайдемо координати четвертої вершини:

$$x_1^{(4)} = 1,8 + 1,2 - 1,5 = 1,5; \quad x_2^{(4)} = 1,3 + 1,3 - 0,4 = 2,2.$$

У четвертій вершині (спробі) симплекса 1-2-4 результат виявився кращим (HSh = 56), ніж в умовно відкинутій третій вершині (HSh = 44). Тому остаточно виключимо третю вершину з подальшого аналізу і зробимо в примітці до табл. 3.13 відповідний запис: "о.в. № 3".

У новому симплексі 1-2-4 гірший результат відповідає першій вершині (спробі): 58 > 56 > 45. Тому умовно виключимо вершину 1 та знайдемо координати п'ятої вершини наступного симплекса 2-4-5:

$$x_1^{(5)} = 1,2 + 1,5 - 1,8 = 0,9; \quad x_2^{(5)} = 1,3 + 2,2 - 1,3 = 2,2.$$

Після аналізу подібного тому, що наведено, послідовно визначимо координати вершин 6...9 симплекса в процесі його пересування у факторному просторі:

$$x_1^{(6)} = 1,5 + 0,9 - 1,2 = 1,2; \; x_2^{(6)} = 2,2 + 2,2 - 1,3 = 3,1;$$

$$x_1^{(7)} = 0,9 + 1,2 - 1,5 = 0,6; \; x_2^{(7)} = 2,2 + 3,1 - 2,2 = 3,1;$$

$$x_1^{(8)} = 1,2 + 0,6 - 0,9 = 0,9; \; x_2^{(8)} = 3,1 + 3,1 - 2,2 = 4,0;$$

$$x_1^{(9)} = 0,6 + 0,9 - 1,2 = 0,3; \quad x_2^{(9)} = 3,1 + 4,0 - 3,1 = 4,0.$$

У симплексі 7-8-9 після відображення гіршої вершини 8 знаходимо координати вершини 10:

$$x_1^{(10)} = 0,6 + 0,3 - 0,9 = 0; \quad x_2^{(10)} = 3,1 + 4,0 - 4,0 = 3,1.$$

У цій вершині результат (HSh = 59) виявився гіршим, ніж в умовно відкинутій восьмій вершині (HSh = 76). Тому десяту спробу не беремо до уваги та повертаємось до восьмої вершини. В симплексі 7-8-9 у цьому разі умовно відкинемо вершину 7 (другу з гірших). Обчислимо координати вершини 11:

$$x_1^{(11)} = 0,9 + 0,3 - 0,6 = 0,6; \quad x_2^{(11)} = 4,0 + 4,0 - 3,1 = 4,9.$$

У цій вершині одержано твердість нижчу, ніж та, що була у вершині 7. В останніх двох спробах спостерігаються так звані "коливання" симплекса, які свідчать, що симплекс досяг зони, близької до оптимуму.

Продовжуючи процедуру, проаналізуємо симплекс 8-9-11. Після відображення другої "за гіршістю" вершини 8 попадемо у вершину 12 з координатами

$$x_1^{(12)} = 0,3 + 0,6 - 0,9 = 0; \quad x_2^{(12)} = 4,0 + 4,9 - 4,0 = 4,9.$$

Твердість у вершині 12 виявилась також значно нижчою, ніж у вершині 8 (HSh = 45). Явище коливань симплекса продовжується. Спроба відкинути вершину 11 у симплексі 9-11-12 з утворенням симплекса 9-12-13 призводить до того, що вершина 13 потрапляє в зону обмежень (від'ємне значення вмісту Si). Вважаємо цю вершину за "умовну" спробу. Оскільки результат цієї спроби невідомий, у симплексі 9-12-13 відкинемо гіршу вершину 12. Внаслідок наступного кроку одержимо симплекс 9-13-14, в якому вершина 14 за координатами і результатом (твердістю) цілком збігається з вершиною 10 симплекса 7-9-10, що був побудований на попередньому етапі процедури оптимізації.

З останніх кроків процедури видно, що симплекс обертається навколо вершини 9 максимальною твердістю (HSh = 90), тобто спостерігається ефект зациклювання. Оскільки коливання та зациклювання симплекса свідчать про досягнення зони оптимуму, процедуру симплекс-планування завершуємо. Як оптимальні концентрації контрольованих параметрів — Si та Ni, що забезпечують максимальну твердість робочого шару валків, візьмемо координати вершин 9: 0,3% Si і 4,0% Ni. Цей результат був використаний як базовий при розробці технічних умов (ТУ) на виготовлення прокатних валків спеціального призначення.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. — М.: Мир, 1984. — 496 с.

2. *Бояринов А. И., Кафаров В. В.* Методы оптимизации в химической технологии. — М.: Химия, 1996. — 564 с.

3. *Гаврилов В. А., Поляков И. И., Поляков А. И.* Оптимизация режимов работы ферросплавных печей. — М.: Металлургия, 1966. — 176 с.

4. *Карасев А. И., Аксютина З. И., Савельева Т. И.* Курс высшей математики для экономических вузов. — М.: Высш. шк. — 1982.

5. *Колмогоров В. Л.* Механика обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1986. — 688 с.

6. *Кузьменко В. И., Балакин В. Ф.* Решение на ЭВМ задач пластического деформирования: Справочник. — К.: Тэхника, 1990. — 136 с.

7. *Кучер А. Г.* Оптимизация металлургических процессов: Учеб. пособ. - Днепропетровск: ДМетАУ, 1993. - 32 с.

8. *Новик Ф. С., Арсов Я. Б.* Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования экспериментов. — М.: Машиностроение; София: Техника, 1980. — 304 с.

9. *Беляй Г. Е., Дембовский В. В., Соценко О. В.* Организация металлургического эксперимента. Учеб. пособие для вузов / Под ред. *В. В. Дембовского.* — М.: Металлургия, 1993. — 256 с.

10. Основы научных исследований в литейном производстве / Под общ. ред. *А. Е. Кривошеева.* — К.—Донецк: Выща шк., 1979. — 168 с.

11. *Понтрягин Л. С.* Принцип максимума в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1989. — 64 с.

12. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. — М.: Физмат, 1963.

13. Статистические методы в инженерных исследованиях: Учеб. пособ. / Под ред. *Г. К. Круга.* — М.: Высш. шк., 1983. — 217 с.

14. Новые идеи в планировании эксперимента / Под ред. *В. В. Налимова.* — М.: Наука, 1969 г. — 232 с.

15. *Новик Ф. С.* Планирование эксперимента на симплексе при изучении металлических систем. — М.: Металлургия, 1985. — 256 с.

16. Применение математических методов при исследовании многокомпонентных систем. — М.: Металлургия, 1974. — 176 с.

ЗМІСТ