МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

Г.Г. ШВАЧИЧ, А.В. ОВСЯННИКОВ, В.В. КУЗЬМЕНКО,
А.В. СОБОЛЕНКО, В.В. БАЙРАК

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ БАЗАМИ ДАННЫХ

Часть I. Описание структуры баз данных при использовании булевых алгебр

Утверждено на заседании Учёного совета академии
в качестве учебного пособия

Днепропетровск НМетАУ 2008

УДК 004 (075.8)

Системы управления базами данных. Часть I. Описание структуры баз данных при использовании булевых алгебр: Учеб. пособие / Г.Г. Швачич, А.В. Овсянников, В.В. Кузьменко, А.В. Соболенко, В.В. Байрак. – Днепропетровск: НМетАУ, 2008. – 52 с.

Изложены основные положения булевых алгебр, которые являются необходимым инструментом в описании структуры баз данных.

Предназначено для студентов специальности 6.020100 – документоведение и информационная деятельность, а также для студентов всех специальностей и иностранных студентов.

Илл. 11. Табл. 5. Библиогр.: 14 наим.

Издается в авторской редакции.

Ответственный за выпуск Г.Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензенты: Б.И. Мороз, д-р техн. наук, проф. (АТСУ)
Д.Г. Зеленцов, д-р. техн. наук, доц. (УГХТУ)

Тема 1. Множество, элементы множества, включения множеств

Под множеством понимается класс, совокупность, собрание различных между собой объектов, безразлично какой природы. Согласно определению, которое дал основоположник теории множеств Г. Кантор, множество есть любое собрание определённых и различных между собою объектов интуиции, мыслимое как единое целое. Существенно, прежде всего, то, что собрание объектов само расценивается как один объект (мыслится как единое целое).

Не следует понимать множество (класс) как совокупность действительно существующих объектов, обладающих всеми реальными характеристиками, скажем, определёнными пространственными или временными свойствами. Принадлежность к множеству не требует, например, сосуществования во времени и пространстве: все математики образуют один класс, хотя и живут в различных странах; Аристотель и Г. В. Ф. Гегель принадлежат к множеству выдающихся философов, хотя они жили в разное время.

Множество – это совокупность абстрактных объектов. Каждый его составляющий элемент рассматривается лишь с точки зрения признаков, образующих содержание определённого понятия. Поэтому они (эти объекты) становятся неразличимыми. Им приписываются одни и те же признаки, отличие же их друг от друга определяется не по свойствам и отношениям, а по их именам.

Объект, принадлежащий данному множеству, называется его **элементом**. Элементы множества обозначаются – x, y, z, … (или x_1, x_2, x_3, …), а сами множества – A, B, C, …

Если множество содержит конечное число элементов, его называют **конечным**, если в нём бесконечно много элементов – **бесконечным**.

Множества могут состоять из объектов самой различной природы. Этим объясняется чрезвычайная широта теории множеств и её применимость в самых различных областях – математике, механике, физике, химии, биологи, лингвистике и т. д.

Знаком Î обозначается отношение принадлежности элемента к тому или иному множеству. Выражение **x Î A** означает, что элемент **x** принадлежит множеству **A**. Если **x** не является элементом множества **A**, то это записывается как **x Ï A**.

Если два множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то они считаются равными. Если A и B равны, то пишем A = B, в противном случае – A ≠ B. Так {2, 4, 6} есть множество, состоящее из трёх положительных чётных чисел. Поскольку {2, 4, 6} и {2, 6, 4} состоят из одних и тех же элементов, они являются равными множествами. По этой же причине {2, 4, 6} = {2, 4, 4, 6}.

Элементы какого-либо множества сами могут быть множествами. Например: {{1, 3}, {2, 4}, {5, 6}} есть множество из трёх элементов, именно {1, 3}, {2, 4}, {5, 6}.

Множества {{1, 2}, {2, 3}} и {1, 2, 3} не равны, элементами первого являются {1, 2} и {2, 3}, а элементами второго – 1, 2 и 3.

Множества {{1, 2}} и {1, 2} также не равны, поскольку первое множество, состоящее из одного и только одного элемента – {1, 2} (одноэлементное множество), а второе имеет своими элементами 1 и 2. Поэтому, в общем виде, следует различать объект и множество, единственным элементом которого является этот объект.

Множество считают **заданным** (известным), если владеем способом, позволяющим для любого данного объекта решить, принадлежит ли он этому множеству или нет, т. е. Определить истинно или ложно выражение **x Î A** (при соответствующем значении переменных **x** и **A**).

Задать множество можно различными способами. Один из них состоит в том, что задаётся полный список элементов, входящих в данное множество. Если хотим сказать, что данное множество **A** состоит из элементов $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, то обычно записываем A: = $\{x_1, x_2, x_3, \dots x_n\}$. Например, множество арифметических действий состоит из элементов (сложение, вычитание, умножение, деление).

Способ задания элементов списком применим только для конечных множеств, да и то далеко не всех. Например, хотя множество рыб конечно, вряд ли его можно задать списком. Тем более список невозможен в случае бесконечного множества. Тогда применим другой способ. Он состоит в задании множества характеристическим **предикатом**, т. е. указанием такого **свойства**, которое принадлежит любому объекту являющемуся элементом данного множества, и не принадлежит ни одному объекту, который не является его элементом

(M: = {x | P(x)} – «множество всех x, обладающих свойством P»).

Множество может быть задано также порождающей процедурой

M: {x | x: = f}.

Способы задания множеств

Перечислением элементов:	M: = $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$;
Характеристическим предикатом	M: = {x	P (x)};
Порождающей процедурой:	M: = {x	x : = f}.

Два первые способа задания множества предполагают, что мы имеем возможность отождествлять и различать объекты. Но такая возможность существует не всегда, в этом случае сталкиваемся с различного рода осложнениями. Так, может быть, что два различных характеристических свойства задают одно и то же множество, т. е. каждый элемент, обладающий одним свойством, обладает и другим, и наоборот. Например, в арифметике свойство «целое число делится на 2» задаёт то же множество, что и свойство «последняя цифра числа делится на 2». Во многих случаях речь идёт о совпадении двух множеств (например: множества равносторонних треугольников с множеством равноугольных треугольников). Кроме того, при задании множеств характеристическими свойствами (характеристическим предикатом) трудности возникают из-за недостаточной чёткости, неоднозначности естественного языка. Разграничение объектов, на принадлежащие и не принадлежащие данному множеству, затрудняется наличием большого числа промежуточных форм.

Особо выделяется **универсальное множество**, т. е. такое множество, которое состоит из всех элементов исследуемой предметной области (обозначается буквой **U**, а в геометрической интерпретации изображается множеством точек внутри некоторого прямоугольника).

Пустое множество – не содержит ни одного элемента (обозначается символом $\varnothing$). Если множество задано своими характеристическими свойствами, то оно не всегда заранее известно, но существует хотя бы один элемент с такими свойствами. Например, до сих пор неизвестно, пусто ли множество всех натуральных чисел n таких, что $\mathbf{n > 2}$, а уравнение $\mathbf{x^n + y^n = z^n}$ имеет положительные целочисленные решения (в этом состоит знаменитая проблема Ферма). Многие математические (и не только математические) проблемы можно сформулировать как утверждения о пустоте множества.

Парадокс Рассела

Задание множества характеристическим предикатом может приводить к противоречиям. Например, все множества не содержат себя в качестве своего элемента. $Y = \{X \mid X \notin X\}$ – множество Y не содержит само себя в качестве своего элемента. Если множество Y существует, то мы должны иметь возможность ответить на следующий вопрос. Возможно ли устранить противоречие?

Пусть $Y \in Y$, тогда $Y \notin Y$. Пусть $Y \notin Y$, тогда $Y \in Y$. Получается неустранимое логическое противоречие, которое известно как парадокс Рассела.

Существуют три способа избежать этот парадокс.

1. Ограничить используемые характеристические предикаты видом

$$P(x) = x \in A \cap Q(x),$$

где A – известное, заведомо существующее множество (универсум). Обычно при этом используется обозначение $\{x \in A \mid Q(x)\}$, для Y универсум не указан, а поэтому, Y множеством не является.

2. Теория типов. Объекты имеют тип 0, множества имеют тип 1, множества множеств имеют тип 2 и т. д. Y не имеет типа и множеством не является.
3. Характеристический предикат P(x) задан в виде вычисляемой функции (алгоритма). Способ вычисления значения предиката $X \in X$ не задан, а поэтому Y множеством не является.

Последний из перечисленных способов лежит в основе конструктивизма – направления в математике, в рамках которого рассматриваются только такие объекты, для которых известны процедуры (алгоритмы) их порождения.

Подмножества

Любую часть множества называют подмножеством. Если некоторое универсальное множество задать характеристическим свойством P – U= {x | P (x)}, то множества A, B, C, …, являющиеся частями U , определяются свойствами

P_a, P_b, P_c, … .следовательно подмножество A определяется

$$A \overset{Dt}{=} \{x \mid x \in U \text{ и } P_a(x)\}$$

(«A есть по определению множество всех тех и только тех x, которые принадлежат U и обладают свойством P_a»). Если, например U – множество людей, а P_a – быть учащимся высшего учебного заведения, то A – множество студентов.

Если свойства, которыми заданы некоторое множество и его подмножество, совпадают (одно и то же), то эти множества будут равны. Поэтому, считается, что множество является частью самого себя (иногда говорят «полностью частью»).

Если свойство, которым задаётся некоторое подмножество, противоречит свойству, с помощью которого задано само множество, то данное подмножество будет пустым. Пустое множество считается частью любого множества.

Полную и пустую части называют несобственными множествами. Все остальные подмножества являются собственными.

Если известно число элементов данного множества, то общее число подмножеств будет 2^n (где n – число элементов). Из пустого множества можно образовать только одно подмножество – само пустое множество (при n = 0, $2^0 = 1$).

Если объект обозначить X, а его свойство P, тогда объём понятия отражающего свойства, будет множество, каждый элемент которого, подставленный на место переменной X в формуле P(x), будет давать истинное суждение.

Пусть в формуле P(x) P означает «быть нечётным», тогда вместо x могут быть подставлены переменные 1, 3, 5, 7 и т. д., при этом мы получаем истинные суждения («1 – нечётное число», «3 – нечётное число» и т. д.).

Выражение P(x) близко по смыслу выражению x ∈ P. так, говоря о свойстве «быть нечётным», подразумеваем множество объектов, каждый из которых обладает этим свойством.

Говоря о любом объекте, часто высказываемся не только о том, какими свойствами он обладает, но и том, какие отношения к другим объектам его характеризуют.

Отношения обозначаются буквой R (первая буква латинского слова Relatio – отношение). Выражение xRy или R(x, y) читается: «объект x находится к объекту y в отношении R».Такие понятия как «больше», «меньше», «равно» «причина», «функция», отражают определённое отношение между объектами. Например, для отношения «меньше» необходимо два объекта, чтобы отразить смысловое предположение («2 меньше 3», «5 меньше 4» – осмысленные предложения, первое из которых выражает истинное высказывание, а второе ложное).

Пары объектов образующие объём понятия «меньше» являются упорядоченными, потому, что пара 2 и 3 входят в объём данного понятия, а 5 и 4 нет. В общем виде это обстоятельство можно записать $<x, y> \in R$, что означает «упорядоченная пара x, y есть элемент R». В этом случае рассматриваем отношение R как множество упорядоченных пар элементов такого рода отношения называют двухместными. Могут быть, разумеется, трёхместные, четырёхместные и т. д. отношения.

Объёмом понятия, отражающего отношения между объектами, будет множество упорядоченных пар (троек, четвёрок и т. д.) объектов, которые, будучи связанными, с отношением R образуют истинные высказывания.

Знаком $\subseteq$ обозначается отношение включения множества, т. е. $A \subseteq B$ («множество A включено в B») означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B. При этом A называется подмножеством, а B – надмножеством. $A \subseteq B$ – это включение в широком смысле, не исключено, что $A = B$. Если A включено в B и при этом $A \neq B$ (т.е. существуют элементы B, не принадлежащие A), то A строго включается в B. В этом случае A будет собственным подмножеством B, что записывается $A \subset B$. Иногда употребляют выражение $B \supset A$ – «B содержит в себе A».

Тема 2. Операции над множествами

Пусть А, В, С, … – подмножества некоторого универсального множества U. В множестве всех возможных подмножеств универсального подмножества U (включая ∅ и U) определим четыре операции: **дополнение, пересечение, объединение и разность**.

Дополнение множества А (обозначается ~А или А`, читается «не-А») называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов из U, которые не принадлежат множеству А.

Это определение можно записать так:

$$\overline{A} \overset{Df}{=} \{x \mid x \in U \; и \; x \notin A\}.$$

(Не-А равно множеству всех элементов х из U, которые не принадлежат множеству А). (рис. 2.1.)

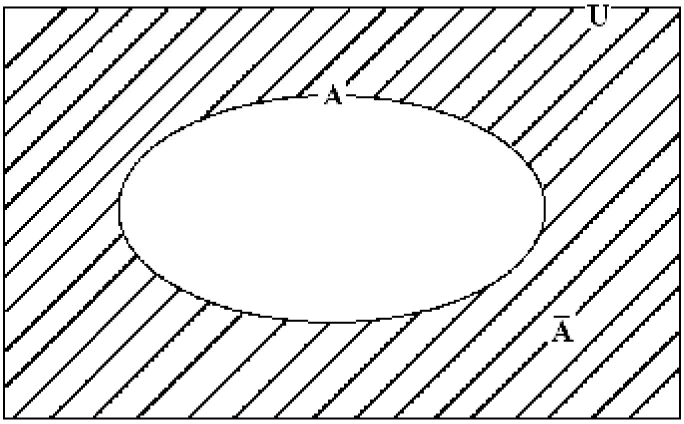


Рис. 2.1. Дополнение множества А до универсального множества U

Видно, что любой элемент универсального множества принадлежит либо А, либо $\overline{A}$, но не может принадлежать им обоим.

Дополнению множества соответствует операция над понятиями, которую называют *отрицанием* понятия.

Пересечением множеств А и В (обозначается А ∩ В, иногда АВ; читается «пересечение А и В», или «А крышка В», можно читать «А и В») называется множество состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B.

Это определение можно записать следующим образом:

$$A \cap B \overset{Df}{=} \{x \mid x \in A \, и \; x \in B\}.$$

(Пересечение A и B равно множеству элементов **x**, где **x** есть элемент и A, и B). Иначе говоря, $x \in A \cap B$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ и $x \in B$. например, $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}$.

На рис. 2.2. изображён результат операции пересечения множеств A и B.

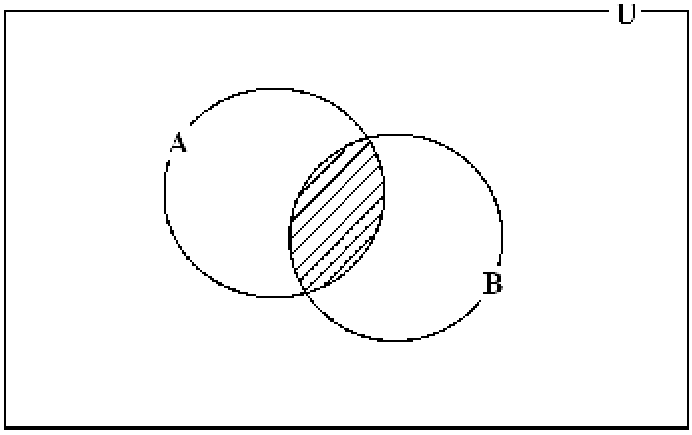


Рис. 2.2. Пересечение множеств $A \cap B$

Точно так же определяется результат пересечения любого числа n множеств

$A_1, A_2, \ldots, A_п$ – как множество всех элементов, принадлежащих и A_1, и A_2, и …, $A_п$. Это множество обозначается: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_п$.

Если множества A и B выделены из универсального множества характеристическими свойствами, $P_а$ и $P_в$, то пересечение $A \cap B$ – это множество, состоящее из элементов, которые обладают обоими этими свойствами.

Пересечение множеств есть операция всюду определённая, т. е. она имеет место для множеств, находящихся в любых отношениях. Если взять два непустых множества (А и В), то существует пять взаимоисключающих способов, которыми могут быть логически связаны эти два множества (рис. 2.3.).

Такие отношения называют: 1. левостороннее включение;

3. правостороннее включение.

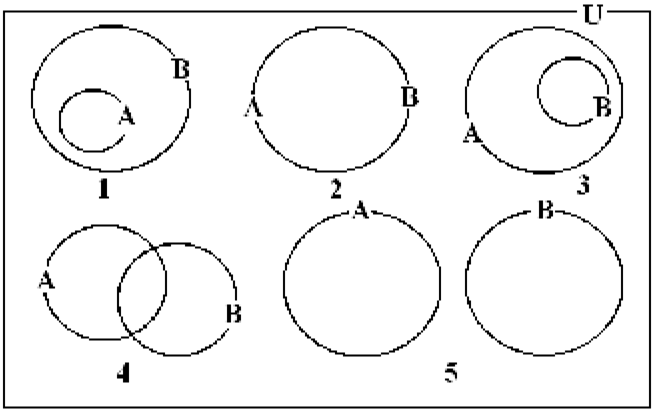


Рис. 2.3.

Операция пересечения множеств, таким образом, имеет целью нахождение общих элементов двух или более множеств.

Пересечению множеств соответствует операция над понятиями, которую называют умножением понятий.

Искать общие элементы множеств, приходится для решения многих задач в самых различных областях науки и практической деятельности. Простой пример: множество всех квадратов является результатом пересечения множества всех прямоугольников с множеством всех ромбов. Результатом пересечения множества натуральных чисел, которые делятся на 2, множества натуральных чисел, которые делятся на 3, является множество натуральных чисел, делящихся на 6.

Объединением множеств А и В (обозначается А ∪ В, читается «объединение А с В» или «А чашка В», можно читать «А или В») называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат ходя бы одному из множеств А или В.

Это определение можно записать следующим образом:

$$A \cup B \overset{Df}{=} \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

(Объединение A с B равно по определению множеству элементов x, где x есть элемент A или элемент B). Нужно при этом иметь в виду, что союз «или» здесь употреблён в смысле «и/или».

Таким образом, по определению $x \in A \cup B$ тогда и только тогда, когда x есть элемент хотя бы одного из множеств A или B. Например:

$$\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

На рис. 2.4. заштрихованная область изображает результат объединения A и B.

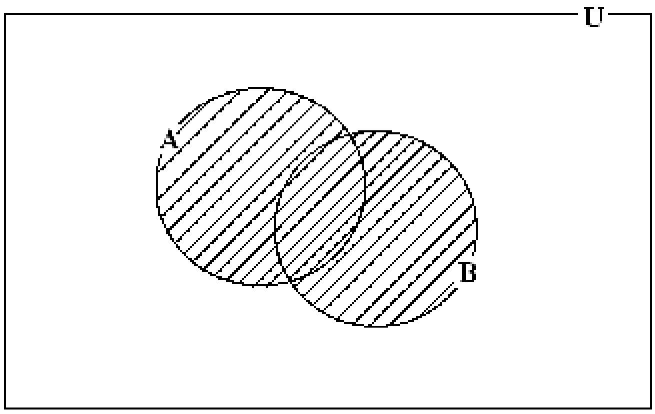


Рис. 2.4.

Подобным же образом результатом объединения любых n множеств A_1, A_2, …, A_n называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из них. Это множество обозначается $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Объединению множеств соответствует операция над понятиями, которую называют **сложением** понятий.

Операция объединения множеств является всюду определённой так же, как и операция пересечения множеств.

Объединяемые множества могут иметь общие элементы, т. е. их пересечение не будет пустым. Тогда повторяющиеся элементы в объединении считаются только по одному разу. Поэтому для конечных множеств число элементов объединения может оказаться меньше, чем сумма чисел элементов объединяемых множеств.

Например, если мы объединяем множества всех студентов (A) и молодёжи в возрасте от 17 до 22 лет (B), то количество элементов A ∪ B будет представлено суммой трёх чисел (рис. 2.5.):

1) количество студентов, которые не достигли 17 лет,
2) количество студентов, которым более 22 лет,
3) количество молодёжи, которая не является студентами.

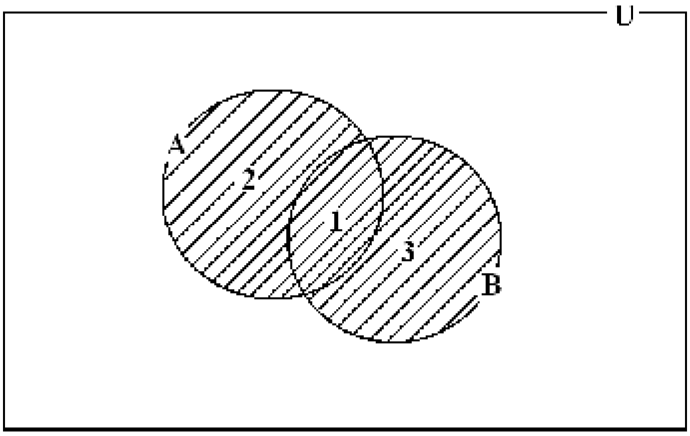


Рис. 2.5.

Разностью множества A и B (обозначается A\ B либо A ∩ $\overline{B}$, иногда A – B) называется множество состоящее из всех тех, и только тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.

Это определение можно записать так:

$$A \cap \overline{B} \overset{Df}{=} \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

(Пересечения A с не-B рано по определению множеству элементов x, где x есть элемент множества A и x не есть элементом множества B).

Следовательно, x ∈ A ∩ $\overline{B}$ тогда и только тогда, когда x ∈ A и x ∉.

Диаграмма Эйлера – Венна (на рис.6) представляет графическое изображение результата этой операции.

Ясно, что множества A и B имеют и вторую разность – $\overline{A}$ ∩ B, состоящую из элементов множества B, которые не принадлежат множеству A:

$$A \cap \overline{B} \overset{Df}{=} \{x \mid x \notin A \text{ и } x \in B\}.$$

Таким образом, $x \in \overline{A} \cap B$ тогда и только тогда, когда $x \notin A$ и $x \in B$.

Разности двух множеств бывают пустыми и непустыми.

Дополнение множества А есть частный случай разности множеств, так как можно записать $\overline{A} = U \setminus A$.

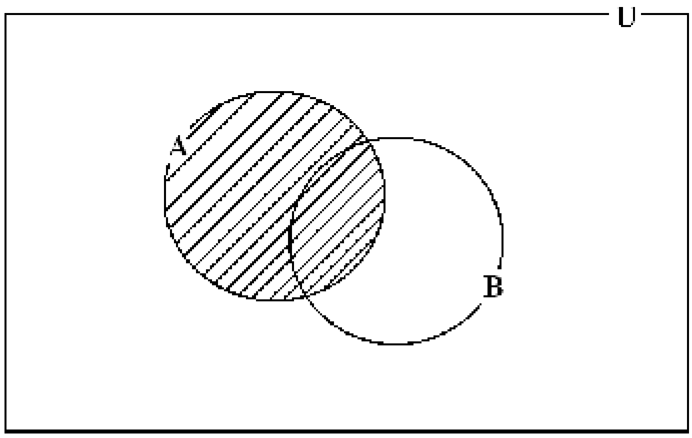


Рис. 2.6. Разность множеств

Над множествами, полученными в результате проведенных четырёх операций, можно в свою очередь производить те же самые операции. Так, можно образовывать дополнения пресечения ($\overline{A \cap B}$), объединения ($\overline{A \cup B}$) или разности ($\overline{A \cap \overline{B}}$);можно образовать пересечение объединений

$(A \cup B) \cap (C \cup D)$ или объединение пересечений $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ и т. д.

Для указания порядка операций применяются скобки. Отношение между скобками, знаками $\cap$ и $\cup$ такое же, как между скобками, знаками * и + в алгебре. Дополнение берётся от всего выражения, над которыми стоит черта (или от всего выражения, стоящего в скобках, рядом с которыми стоит штрих).

Нужно помнить, что все указанные операции можно производить только над множествами, принадлежащими одному и тому же универсальному множеству.

ТЕМА 3. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Операции над множествами подчинены некоторым законам, которые напоминают элементарные законы алгебры (сходство станет ещё более очевидным, если знаки пересечения и объединения множеств заменить на знаки умножения и сложения). Этим определяется название алгебра множеств. Часто её называют булевой алгеброй множеств, что связанно с именем английского математика и логика Дж. Буля, который положил в основу своих логических исследований идею аналогии между алгеброй и логикой. Законы алгебры множеств могут быть доказаны с помощью диаграммы Эйлера – Венна.

1. **Закон тождества** $A = A$.
2. **Закон противоречия**: $A \cup \overline{A} = \varnothing$.
3. **Закон исключённого третьего**: $A \cup \overline{A} = U$.

Эти три закона считают выражением на языке булевой алгебры множеств основных законов мышления.

4. **Закон идемпотентности** (лат. *Idem* – то же, *potentia* – сила):

I. для пересечения $A \cap A = A$;

II. для объединения $A \cup A = A$.

5. Коммутативный закон:

I. для пересечения $A \cap B = B \cap A$;

II. для объединения $A \cup B = B \cup A$.

6. Ассоциативный закон:

I. для пересечения $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$;

II. для объединения $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.

7. Дистрибутивный закон:

I. для пересечения с объединением $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

II. для объединения с пересечением $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8. Закон поглощения:

I. для пересечения с объединением $A \cap (A \cup B) = A$;

II. для объединения с пересечением $A \cup (A \cap B) = A$.

9. Если некоторое непустое произвольное множество A пересекать и объединять с универсальным и пустым множествами, то мы получим следующие четыре закона:

I. $A \cap U = A$;

II. $A \cup U = U$;

III. $A \cap \varnothing = \varnothing$;

IV. $A \cup \varnothing = A$.

10. Закон де Моргана:

I. для дополнения пересечения $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

II. для дополнения объединения $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

11. **Закон двойного дополнения** (отрицания): $\overline{\overline{A}} = A$.

12. Дополнением универсального множества является пустое множество, а дополнение пустого множества есть универсальное множество, т. е.

I. $\overline{U} = \varnothing$;

II. $\overline{\varnothing} = U$.

Законы алгебры множество отношению к операциям пересечения и объединения подчинены принципу двойственности. Если в любом верном тождестве алгебры множеств все знаки пересечения заменить знаками объединения, а все знаки объединения – знаками пересечения, знак универсального множества заменить знаком пустого множества, а знак пустого множества – знаком универсального множества, то получим снова верное тождество. В силу этого принципа, например, из $A \cap \overline{A} = \varnothing$ следует, что $A \cup \overline{A} = U$ и т. п.

Если в булевой алгебре множеств знаки пересечения и объединения заменить на знаки умножения и сложения, то при такой замене на все приведенные выше законы перейдут в известные законы обычной алгебры.

Закон тождества, коммуникативный и ассоциативный законы имеют место в обычной алгебре. В ней будет справедливым первый дистрибутивный закон, однако второй – уже не имеет смысла. Окажутся неверными законы идемпотентности (они выражают отсутствие в булевой алгебре степеней и коэффициентов), поглощения и двойного дополнения, а принцип двойственности в обычной алгебре просто не определён.

Проверка истинности тождеств при помощи диаграммы Эйлера – Венна.

Два круга (в общем положении, т. е. пересекающиеся) делят всё универсальное множество на четыре области (рис. 3.1.):

I. $A \cap B$;

II. $A \cap \overline{B}$;

III. $\overline{A} \cap B$;

IV. $\overline{A} \cap \overline{B}$.

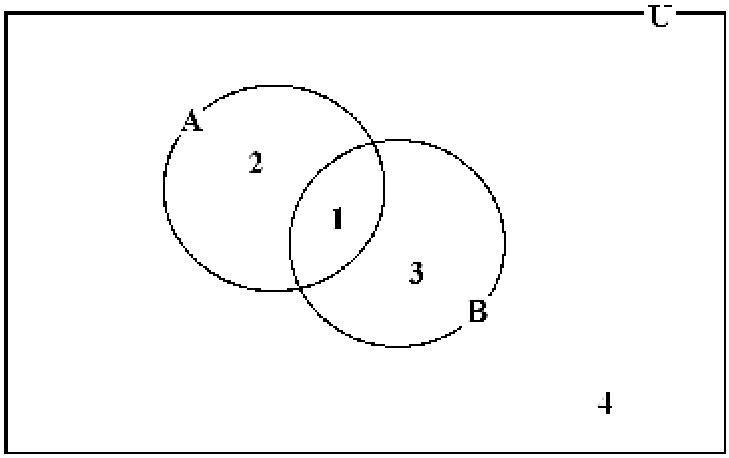


Рис. 3.1.

Не трудно заметить, что множество $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ совпадает с множеством $A \cap B$. Отсюда следует тождество:

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B.$$

Из рис. 3.1. видно, что $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, так как множество, записанное с лева, от знака равенства, и множество, записанное с права, изображаются одной и той же областью.

Три круга (в общем положении, т. е. взаимно пересекающиеся) разделение универсального множества на восемь частей (рис. 3.2.):

I. $A \cap B \cap C$;

II. $A \cap B \cap \overline{C}$;

III. $A \cap \overline{B} \cap C$;

IV. $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;

V. $\overline{A} \cap B \cap C$;

VI. $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$;

VII. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$;

VIII. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

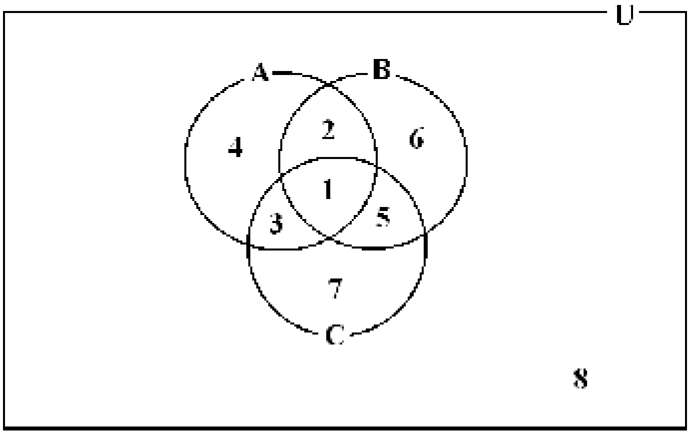


Рис. 3.2.

Рисунок даёт возможность увидеть, что:

$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

Точно так же

$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = A$.

Для того, чтобы доказывать тождества множеств с помощью диаграммы Эйлера – Венна, необходимо:

I. Начертить соответствующую диаграмму, и заштриховать все множества, стоящие в левой части равенства (иногда из-за сложности всего выражения приходится предварительно заштриховать, горизонтальными и вертикальными линиями, различные входящие в выражение множества);

II. Начертить другую диаграмму и сделать тоже для правой части равенства;

III. Если и только если на обеих диаграммах будет заштрихована одна и та же область, то данное тождество – истинно.

ТЕМА 4. БУЛЕВЫ ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Совокупность всех подмножеств множества X, включая пустое множество, называется **булеаном** X и обозначается 2^x. Элементы $X_1, X_2, \ldots, X_r$ булеана 2^X образуют разбиение множества X, если $X_i \neq \varnothing$, i = 1, 2, …, r, и

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_r; \qquad X_i \cap X_j = \varnothing, \qquad i \neq j. \qquad (1)$$

Множества $X_1, X_2, \ldots, X_r$ называют блоками разбиения.

Совокупность всех упорядоченных пар (x, y) таких, что $x \in X$, $y \in У$, называется декартовым произведением множеств X и У и обозначается X*У, т. е.

$$X{*}У = \{(x, y) : x \in X, y \in У\}.$$

Аналогично определяется декартово произведение r множеств

$$X_1{*}X_2{*}\ldots{*}X_r = \{(x_1, x_2, \ldots, x_r) : x_1 \in x_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_r \in X_r\},$$

А при совпадении множеств – декартова степень $X^{(r)} = X{*}X{*}\ldots{*}X$.

Пусть X – конечное множество и |X| - число его элементов. Сформулируем очевидное аксиоматическое правило, лежащее в основе многих комбинаторных вычислений и оценок.

I Правило суммы. Если X – конечное множество и $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_r$, $X_i \in 2^x$, i = 1, 2, …, r, то $|X| \leq |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_r|$, (2)

причём равенство достигается, когда $X_1, X_2, \ldots, X_r$ образуют разбитие X.

Приведём второе простое правило, используемое в комбинаторном анализе.

II Правило произведения. Для конечных множеств $X_1, X_2, \ldots, X_r$

$$|X_1{*}X_2{*}\ldots{*}X_r| = |X_1| \bullet |X_2| \bullet \ldots \bullet |X_r|. \qquad (3)$$

Бинарные соответствия и бинарные отношения

Всякое множество пар $R \subseteq X{*}У$ называется *бинарным соответствием* на множествах X и У. Если $(x, y) \in R$, то x и y назовём *проекциями* (x, y) на X и У соответственно и будем записывать следующим образом:

$$\begin{cases} \text{I} & x = \pi_1(x, y), \\ \text{II} & y = \pi_2(x, y). \end{cases}$$

Для бинарного соответствия $R \subseteq X*У$ можно определить его проекции на X и У:

$$\begin{cases} \pi_1 (R) = \{x : x = \pi_1(x, y), \quad (x, y) \in R\}, \\ \pi_2 (R) = \{y : y = \pi_2(x, y), \quad (x, y) \in R\}. \end{cases}$$

Проекции $\pi_1(R)$ и $\pi_2(R)$ иногда называются соответственно областью определения и областью значения R.

Образом элемента $x \in X$ при соответствии R называется множество

$$\delta_1(x; R) = \{y : y \in У, \quad (x, y) \in R\}.$$

Аналогично **прообразом** элемента $y \in У$ при соответствии R называется множество $\delta_2(y; R) = \{x : x \in X, \quad (x, y) \in R\}.$

Бинарное соответствие $\varphi \subseteq X*У$ называется **функциональным,** если образ каждого элемента $x \in X$ содержит ровно один элемент.

Для множеств $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_п\}$, $У = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ бинарному соответствию $R \subseteq X*У$ можно сопоставить матрицу $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$,

такую, что $a_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, y_j) \in R, \\ 0, & (x_i, y_j) \notin R. \end{cases}$

Матрицы, элементы которых принимают значения 0 и 1, обычно называют **0, 1-матрицами.**

0, 1-матрицу A, соответствующую бинарному соответствию R, называют **матрицей инцидентности**.

При X = У бинарное соответствие $R \subseteq X*X$ будет называться *бинарным отношением* на множестве X. Примером бинарного отношения на множестве X является отношение равенства $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$, называемое *диагональю* множества X.

Бинарному отношению R на конечном множестве X можно поставить в соответствии геометрический объект, называемый ориентированным графом или диаграммой (рис. 4.1.).

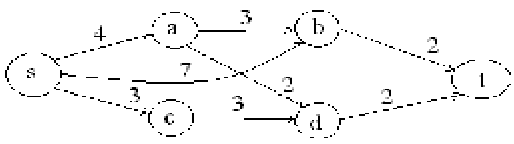


Рис. 4.1. Ориентированный граф определяющий бинарные отношения

Каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие точка на плоскости, называемая *вершиной*. Если $(x, x`) \in R$, то точки, отмеченные $x$ и $x`$, называемой *дугой*. Совокупность вершин и дуг, построенных таким образом, представляет собой диаграмму $G(X, R)$ отношения R.

Для бинарного отношения R на множестве X условимся, что если $(x, x`) \in R$, то этот факт записывается следующим образом: $xRx`$. Используя это обозначение, сформулируем ряд свойств, которыми могут обладать бинарные отношения:

I. **Рефлективность:** xRx для всех $x \in X$;
II. **Антирефлективность:** $R \cap \Delta_X = \varnothing$;
III. **Симметричность:** из $xRx`$ следует $x`Rx$;
IV. **Антисимметричность:** из $xRx`$ и $x`Rx$ следует $x = x`$;
V. **Транзитивность:** из $xRx`$, $x`Rx``$ следует $xRx``$;
VI. **Дихотомия:** либо $xRx`$, либо $x`Rx$, $x, x` \in X$.

Бинарное отношение R на множестве X называется **отношением эквивалентности**, если оно одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если R – отношение эквивалентности и $xRx`$, то обычно пишут $x \sim x`$. Множество элементов $K(x) = \{x` : x` \sim x\}$ назовём **классом эквивалентности,** содержащим x, $x \in X$. Классы эквивалентности образуют разбиение множества X. Обратно, любому разбиению X соответствует отношение эквивалентности, классы которого совпадают с боками указанного разбиения. Множество всех классов эквивалентности называется **фактормножеством** по данному отношению эквивалентности.

Бинарное отношение R на множестве X называется отношением **частичного порядка,** если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Множество X называется в этом случае **частично упорядоченным** множеством. Если R – отношение частичного порядка и xRx`, то обычно пишут:

$$x \preccurlyeq x`.$$

Отношение частичного порядка R, удовлетворяющее условию дихотомии, будем называть отношением **линейного порядка** или просто **отношением порядка.** Запись $x \le x`$ используем для обозначения того, что x и x` связаны отношением R линейного порядка: xRx`.

На множестве X можно определить отношение строгого частичного (линейного) порядка $\prec$ (<) полагая $x \prec x`$ ($x < x`$), если $x \preccurlyeq x`$($x \le x`$) и

$$x \ne x`.$$

Ясно, что на конечном множестве X всегда можно задать отношение строго порядка. Каждое такое отношение определяет перестановку элементов этого множества, и число таких отношений равно |X|!.

На булеане 2^X можно задать отношение частичного порядка, полагая $X \preccurlyeq X`$ тогда и только тогда, когда $X \subseteq X`$ для всех X, $X` \in 2^X$. В свою очередь на декартовой степени $X^{(r)}$ конечного множества X с заданным строгим линейным порядкам можно установить отношение линейного порядка, при котором $(x_1, x_2, \ldots, x_r) < (x_1`, x_2`, \ldots, x_r`)$

для $(x_1, x_2, \ldots, x_r), (x_1`, x_2`, \ldots, x_r`) \in X^{(r)}$, если для наименьшего индекса i со свойством $x_i \ne x_i`$ имеет место $x_i < x_i`$. Такой порядок обычно именуют **лексикографическим,** так как он используется для упорядочения слов в словарях.

Тема 5. Элементы теории порядков и теории перечислений

Предварительные сведения об упорядочении множеств

Символы N, Z, Q, R, C используются для обозначения основных различных числовых систем; предположим, что $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$;

- ***Символ Кронекера* – $d_{\mathbf{ij}}$** обозначает тождественное отображение множества M на себя через $id_м$, множество всех своих подмножеств.
- ***Мощность*** ($2^м$) (кардинальное число) множества M обозначается через $|M|$; если M бесконечно, то $|M| = \infty$.
- Для любого множества M символ ***$M^к$ обозначает декартово произведение***: $M^к = \{(a_1, \ldots, a_к) : a_i \in M\}$.
- $M^{(к)}$ – семейство k-подмножеств множества M : $M^{(к)} = \{A \subseteq M : |A| = k\}$.
- ***Конечная мощность множества n*** называется ***n-множеством***: $|M| = n$.
- Символы **: =** или **:** Û употребляются в тех случаях, когда определяются представление о конкретном множестве, производится его описание.

Основные инструментальные правила теории перечислений

I. ***Правило равенства.*** Если N и R – конечные множества и существует взаимно однозначное отображение между ними, то $|N| = |R|$.

II. ***Правило суммы.*** Если $\{A_i : i \in I\}$ – конечное семейство конечных попарно не пересекающихся множеств, то $|\cup_{i \in I} A_i| = \sum_{i \in I} |A_i|$.

III. ***Правило произведения.*** Если $\{A_i : i \in I\}$ – конечное множество конечных множеств, то для декартова произведения $\prod_{i \in I} A_i$ имеет место равенство $|\prod_{i \in I} A_i| = \prod_{i \in I} |A_i|$.

Для описания множеств, входящих в объединение, но не пересекающихся, используются символы $A \cup B$ или $\cup_{i \in I} A_i$.

Мультимножество (на множестве S) – это множество S вместе с функцией **r**: $S \to N_0$ (задающей кратность элементов множества S).

Удобно описать мультимножество k отображённое на S $k = \{a^{k_a} : a \in S\}$, где $k_a := r(a)$, $a \in S$.

Обычные понятия, определенные для множеств, могут быть перенесены и на мультимножества. Например, если

$$k = \{a^{k_a} : a \in S\} \text{ и } L = \{a^{l_a} : a \in S\} \text{ то}$$

$$k \subseteq L :\Leftrightarrow k_a \le L_a \text{ для всех } a \in S;$$

$$k \cap L := \{a^{\min(k_a, l_a)} : a \in S\},$$

$$k \cup L := \{a^{\max(k_a, l_a)} : a \in S\}.$$

Семейство мультимножеств на множестве S (рис. 5.1.) образует структуру, которая называется решеткой относительно операции вложения множество в мультимножество; более того, эта решетка – полная. Любая решётка представляется в виде графа.

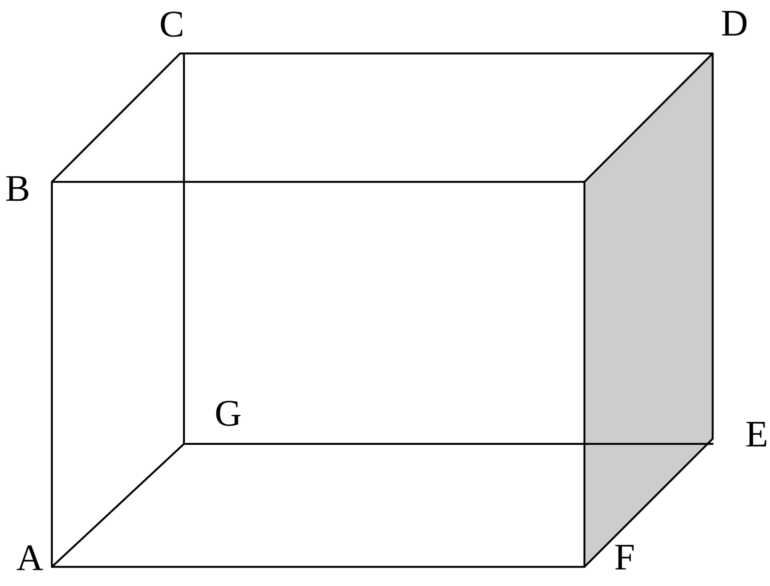


Рис. 5.1.

На рис. 5.1. изображёна решётка в виде графа, у которого, множество вершин {A, B, C, D, E, F, G}. Этот граф неориентированный, поскольку каждое из его рёбер {AB, BC, CD, DE, EF, FA, AG, GE, GC} не имеют векторной направленности. Рёбра графа образуют мультимножество всех его рёбер.

Начальные сведения о графах и их применении в теории множеств

Неориентированный граф G(V, E) состоит из непустого множества V, называемого **множеством вершин,** и мультимножества E неупорядоченных пар {a, b} из V, называемого **множеством ребер.**

Простой граф **–** это граф, не содержащий **петель** {a, a} и **параллельных ребер** {a, b}, {a, b}, т. е. граф, у которого $E \subseteq V^{(2)}$ – обыкновенное множество.

Ориентированный граф, или **орграф,** $\vec{G}(V, E)$ – это непустое множество V вершин и мультимножество E ориентированных пар (a, b) из V. Элементы E называют при этом **стрелками**, или **ориентированными ребрами,** или **дугами.** **Ориентация** на неориентированном графе G(V, E) – это правило, которое приписывают каждому ребру k = {a, b}направление (a, b); пишем тогда $a = k^{-}$, $b = k^{+}$. Граф конечен, если и V, и E конечно.

Два графа G(V, E) и G\`(V\`, E\`) **изоморфны,** если существует взаимное отображение $\varphi$: V $\rightarrow$ V\`, такое, что ребра $\{a, b\} \in E$ и $\{\varphi(a), \varphi(b)\} \in E`$ входят в E и E\` с одинаковой краткостью. **Степенью** $\gamma(\nu)$ вершины ν = это число ребер, инцидентных ν (петли $\{\nu, \nu\}$ считаем дважды). Следовательно, для конечного графа G(V, E) всегда $\sum_{n \in V} g(n) = 2|E|$.

Двумя важными типами графов являются **полные графы** K_n и **полные двудольные графы** $K_{m, n}$ K_n – это простой граф с n вершинами, каждая пара которых соединена ребром. Граф $K_{m, n}$ – простой граф, множество вершин которого есть объединение двух пересекающихся множеств мощности m и n соответственно, при чём две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они принадлежат разным множествам.

Двудольный граф – это некоторый подграф полного двудольного графа. Мы часто будем обозначать двудольный граф через $G(V_1 \cup V_2, E)$, чтобы отметить определяющие множества вершин V_1, V_2, в которых каждое ребро соединяет вершину V_1 с вершиной V_2.

Следующее правило – самый полезный приём в теории перечислений.

IV. Правило подсчёта подмножеств и простых элементов мультимножества двумя способами.

Пусть $G(V_1 \cup V_2, E)$ – конечный двудольный граф с определяющими множествами вершин V_1 V_2, тогда $\sum_{n \in V_1} g(n) = \sum_{n \in V_2} g(n) \quad (= |E|)$.

Двудольный граф $G(V_1 \cup V_2, E)$ можно также рассматривать как ориентированный граф, все ребра которого направлены из V_1 в V_2. Другими словами, двудольные графы с определяющими множествами вершин V_1 и V_2 могут быть отождествлены с **бинарными отношениями** между V_1 и V_2. Поэтому для обозначения множества ребер часто используется буква R, а в графе $G(V_1 \cup V_2, R)$ полагаем $R(A) := \cup_{a \in A}\{y \in V_2: (a, y) \in R\}$ для $A \subseteq V_1$ и, аналогично, $R(B) := \cup_{b \in B}\{x \in V_1: (x, b) \in R\}$ для $И \subseteq V_2$. Для одноэлементного множества $\{a\}$ пишем просто $R(a)$.

Двудольные графы допускают две другие важные интерпретации. **Системой множеств** (S, И) называется множество S вместе с семейством И подмножеств множества S (не обязательно непересекающихся). Любая система множеств (S, И) задаёт граф инциденций $G(S \cup И, R)$, где $(p, A) \in R :\Leftrightarrow p \in A$. Обратно, любой двудольный граф $S(S \cup И, R)$ порождает систему множеств (S, И), если отождествить $A \in И$ с множеством $R(A) \subseteq S$.

ТЕМА 6. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

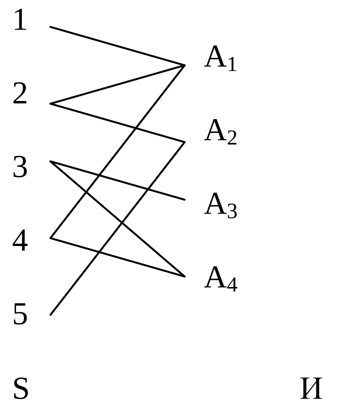
Если P – упорядоченное множество, то P* обозначает ***двойственное упорядоченное множество,*** полученное обращением отношения порядка в P. Если P содержит единственный минимальный элемент, то этот элемент называют ***наименьшим,*** или ***0-элементом***, и обозначают 0; аналогично, единственный максимальный элемент называют ***наибольшим*** или ***1-элементом*** и обозначают 1. Говорят, что ***b покрывает a,*** или ***a покрыто b*** (обозначается $a < b$), если $a < b$ и из соотношения $a < x \leq b$ следует

$$x = b.$$

Атомы – это элементы, покрывающие 0 (если 0 существует); ***коатомы*** – элементы, покрываемые единицей. Очень часто представляем упорядоченное множество P при помощи его диаграммы (ориентированного графа на P, в котором из вершины a к вершине b проводится ориентированное ребро тогда и только тогда, когда b покрывает a). Диаграмму по возможности строим снизу вверх и без стрелок.

Пример.

Двудольный граф



Система множеств

S = {1, 2, 3, 4, 5}
И = {{1, 2, 4}, {2, 5}, {3}, {3, 4}}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(0, 1)-матрица

I ***Цепь*** – это упорядоченное множество, в котором любые два элемента сравнимы. Для цепи $\{a_1 < a_2 < \ldots < a_n\}$ часто используют сокращённое обозначение $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

II ***Длина*** цепи на единицу меньше мощности множества называемого цепью.

III ***Высота*** L(a) элемент $a \in P$ – это длина самой длинной цепи из элементов множества P, заканчивающейся элементом a.

IV ***Антицепь*** – это множество в котором никакие два элемента не сравнимы.

Цепь в упорядоченном множестве P называется ***неизмельчаемой,*** если любой её элемент накрывается последующим. Пусть L – решётка, тогда пустое подмножество M называется ***подрешёткой,*** если условие $x, y \in M$ влечёт за собой соотношения $x \wedge y \in M$ и $x \vee y \in M$. Подмножество $M \subseteq L$ может быть решеткой относительно своих собственных законов, индуцированных отношением порядка, но мы резервируем термин «подрешётка» для предыдущего случая. **Интервал** в упорядоченном множестве P – это любое множество

$[a, b]: = \{x \in P : a \leq x \leq b\}$, $a, b \in P$.

Произведение $\prod_{i \in I} P_i$ упорядоченных множеств P_i – это упорядоченное множество на декартовом произведении с покоординатным отношением порядка. Произведение решёток вновь является решёткой.

Сумма $\sum_{i \in I} L_i$ решеток, каждая из которых содержит 0-элмент, – это подрешётка в произведении $\prod_{i \in I} L_i$, состоящая из таких векторов, у которых лишь конечное число координат отлично от 0. Предполагается, если только не оговорено противное, что множества N_0, N и N_n, наделены естественным отношением порядка.

Полная решётка – это решётка, в которой любое непустое подмножество имеет наименьший и наибольший элементы. Если W – слово, которое состоит только из решётки L и символов $\wedge$, $\vee$, $\leq$ и (,), то двойственное выражение W* получается с помощью замены символов $\wedge$ на $\vee$ и $\leq$ на $\geq$.

Истинность W для всех значений переменных x_i влечёт за собой истинность W* для всех значений переменных x_i. Это утверждение носит название ***принципа двойственности*** для решеток. Слово W называется ***самодвойственным***, если W* = W.

Различные обозначения

(I) Пусть **a** Î **R**. Тогда $\lfloor a \rfloor$ и $\lceil a \rceil$ обозначают наибольшее целое число $\leq a$ и наименьшее целое $\geq a$ соответственно.

(II) Иногда мы пользуемся символом #**{…},** чтобы обозначить мощность множества {…}.

(III) ***Разбиением*** множества S называется непересекающееся объединение **S** = $\bigcup_{i \in I} A_i$. Чтобы указать некоторое разбиение, можно использовать также обозначение $S = A_1|A_2|$. Множества A_i предполагаются непустыми, если не оговорено противное.

(IV) Чтобы упростить запись операции суммирования, иногда будем отмечать индекс, по которому ведётся суммирование, звёздочкой. Например, пусть M = $[m_{ij}]$ – матрица размера n*n. Тогда

$$\sum_{1 \leq i^* < j \leq n} m_{ij} = m_{1j} + m_{2j} + \ldots + m_{j-1,\, j}.$$

Классы отображений

Даны два множества (обычно обозначаемые через N и R) и отображение f: N → R, удовлетворяющее определенным условиям. Тройка (N, R, f) называется морфизмом. Отображения разбиваются на классы с последующим перечислением и упорядочением получившихся классов отображений. Поэтому нужно прежде всего описать условия комбинаторного характера, которые необходимо налагать на отображения.

Пусть (N, R, f) – морфизм. В большинстве случаев N и R будут конечными множествами, для обозначения их мощности необходимо использовать символы n = |N| и r = |R| соответственно. Общепринято описывать f с помощью выражения $f = \begin{pmatrix} \mathbf{K}\, a\, \mathbf{K} \\ \mathbf{K}\, f(a)\, \mathbf{K} \end{pmatrix}$ ($a \in N$). В этом случае f: N → R. – назевается стандартным представлением отображения Чаще всего область N будет каким-либо естественным образом упорядочена, разумеется, допустим какой угодно порядок записи.

Например, три выражения

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ a & b & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ b & b & a & a \end{pmatrix}$$

представляют одно и тоже отображение.

Тема 7. Классификация отображений

Отображению f: N → R сопотавим образ im(f) и ***ядро*** ker(f);

$\mathrm{im}(f) := \bigcup\limits_{a \in N} f(a)$, $\ker(f) := \bigcup\limits_{b \in im(f)} f^{-1}(b)$.

Ядро отображения f – это разбиение множества N, которое индуцировано отношением эквивалентности.

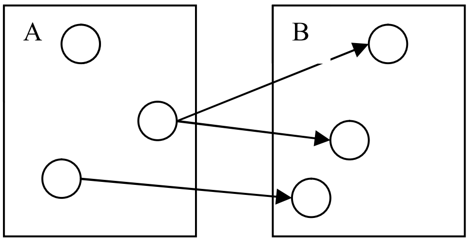
$$a \approx a: \Leftrightarrow f(a) = f(a`) \qquad (a, a` \in N).$$

Удобно ввести пустое отображение $f_{\varnothing}$ с образом $\mathrm{im}(f_{\varnothing}) = \varnothing$ и неопределённым ядром.

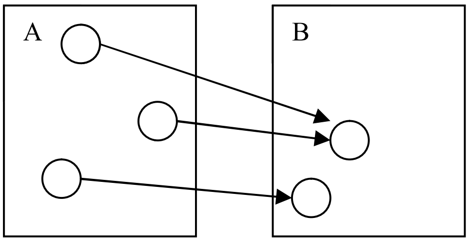
Отображение f: N → R называется **сюръективным,** если im(f) = R, и **инъективным,** если ker(f) = 0 (0 – минимальный элемент в решётке разбиений множества N), т. е. если $a \neq a` \Rightarrow f(a`) \neq f(a`)$ для всех a, a` ∈ N. Отображения которые одновременно **сюръективны и инъективны**, называются **биективными.**

Графические обозначения классов отображений

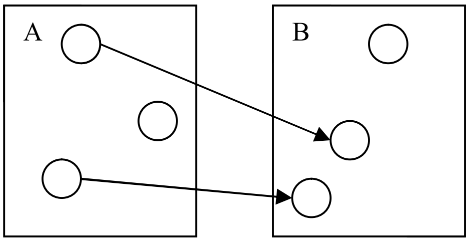
I *Map* (N, R) : = {f: N → R, f **произвольное**}



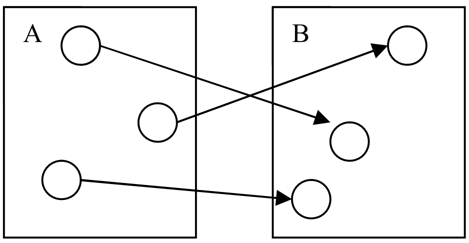
II *Sur* (N, R) : = {f: N → R, f **сюръективное**}



II *Inj* (N, R) : = {f: N → R, f **инъективное**}



III *Bij* (N, R) : = {f: N → R, f **биективное**}



Если множества N и R конечны, то получаем следующие очевидные соотношения между их мощностями:

Sur $(N, R) \neq \varnothing \Rightarrow |N| \geq |R|$,

Ing $(N, R) \neq \varnothing \Rightarrow |N| \leq |R|$,

Bij $(N, R) \neq \varnothing \Rightarrow |N| = |R|$.

Для отображения f: N → N конечного множества N на себя понятия сюръективности, инъективности и биективности совпадают. Для бесконечного множества это не верно. Например, f: N → R, f(k) = 2k инъективно, но не сюръективно.

Предположим, что множества N и R частично упорядочены (рис. 7.1.).

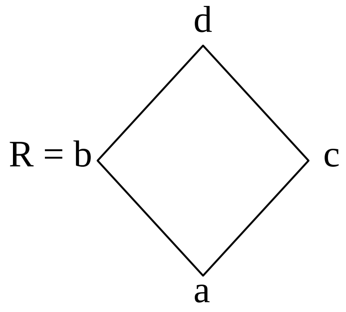


Рис. 7.1.

Отображение f ∈ *Map* (N, R) называется монотонным, если оно сохраняет отношение порядка, т. е. если $a \leq_N b \Rightarrow f(a) \leq_R f(b)$ для всех a, b ∈ N, и называется антитонным, если $a \leq_N b \Rightarrow f(a) \geq_R f(b)$ для всех a, b ∈ N. Семейство монотонных отображений образует другой важный класс:

Mon ***(N, R) : = {f: N → R, f монотонно}.***

Если множество N – неупорядоченное, то независимо от отношения порядка на R имеем просто Mon (N, R) = Map (N, R). Любое монотонное или антитонное отображение переводит цепи в цепи.

Пример. Пусть N = {1 < 2 < 3 < 4}

Отображение $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ монотонно, тогда как $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & b & c & a \end{pmatrix}$ антитонно.

Алгебраический анализ приводят к известному классу отображений:

Допустим, что на N и R определены алгебраические структуры одного и того же типа, например группы, кольца или векторного пространства с одной и той же областью скаляров. Отображение f: N → R, сохраняющее все операции называется ***гомоморфизмом*****;** обозначим класс всех гомоформизмов из N в R через

$$Hom\qquad (N, R) := \{f: N \to R,\ f\ \textbf{гомоморфизм}\}.$$

При помощи пересечения алгебраических структур получаются классы сюъективные монотонные отображения или инъективные гомоморфизмы.

Представление отображений

У морфизма (N, R, f) есть две полезные интерпретации:

I Пусть множество N упорядоченно при помощи фиксированного отношения полного порядка. Элементы множества N представим как номера букв в слове, в этом случае на ***месте*** с номером i ∈ N стоит ***буква*** L ∈ R, при условии, что f(i) = L. В этом случае, отображение f можно рассматривать как ***слово*** длины n, которое составленно из букв ***алфавита*** R, снабженных индексами из N.

II Упорядочим при помощи отношения полного порядка все элементы множества R и рассмотрим их как блоки. Если f(a) = b, то говорим, что объект a ∈ N помещён в блок b, или что блок b содержит объект a. Таким образом, интерпретируем морфизм f: N → R как ***способ заполнения блоков*** из R объектами из множества N. В итоге получаем:

$$f : N \to R = \begin{cases} \text{отображение из N в R;} \\ \text{слово из букв алфавита R;} \\ \text{помеченных индексами из N;} \\ \text{заполнение R объектами из N.} \end{cases}$$

Если цепь N = {a_1, a_2, …, $a_п$} то отображению $f = \begin{pmatrix} a_1 \ \mathbf{K} \ a_n \\ f(a_1) \ \mathbf{K} \ f(a_n) \end{pmatrix}$ можно однозначно сопоставить слово $f(a_1)\ f(a_2)\ \dots\ f(a_n)$. Назовём его словесным представлением отображения f (относительно заданного полного порядка на N). Аналогично, если $R = \{b_1, \ldots, b_r\}$ – цепь, то $f^{-1}(b_1) \cup f^{-1}(b_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(b_r)$ называется ***блок-представлением*** отображения f. В большинстве случаев N или R будут множествами {1, …, n} или {1, …, r}, снабженными естественным отношением порядка.

Пример. Пусть $N = \{1 < 2 < 3\}$, $R = \{a < b < c\}$. Перечислим множество Map (N, R), задав словесные представления его членов:

aaa	acc	aba	caa	cbc	acb
aab	ccc	baa	cac	ccb	bac
abb	bbc	bab	cca		cab
bbb	bcc	bba	bcb		bca
aac	abc	aca	cbb		cba

В первых двух колонках – монотонные отображения; отображения последней колонки и отображение abc – биективные. Следовательно:

$$|\text{Map}(N, R)| = 27, \qquad |\text{Bij}(N, R)| = 6, \qquad |\text{Mon}(N, R)| = 10.$$

Определения отображений можно теперь перенести на слова или заполнения специального вида. Например отображение $f \in \text{Inj}(N, R)$ называется *точным словом*, а $f \in \text{Sur}(N, R)$ – ***полным заполнением***. Пусть $N = \{1 < 2 < \ldots < n\}$ и К – произвольное упорядоченное множество. Класс Mon (N, R) состоит из всех R-слов $b_1 b_2 \ldots b_n$, для которых $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$. Поэтому Mon (N, R) можно назвать классом монотонных слов. Если в частности, множество R – цепь, то монотонные слова длины n дают в точности все мультимножества мощности n, составленные из элементов множества R, и, следовательно, существует ровно столько монотонных слов длины n, составленных из алфавита R, столько n-мультимножеств на R. См., пример приведенный выше, где 3-мультимножества перечислены в двух первых столбцах. Если ограничится ***строго монотонными словами,*** то получится семейство всех подмножеств мощности n множества R.

Тема 8. Законы алгебры логики

Законы алгебры логики являются законами построения алгоритмов. Применимы при использовании любого из современных языков программирования. Главная задача логики состоит в установлении методов правильных умозаключений. Это делается двумя способами:

1. при помощи правил вывода;
2. при помощи логических законов.

Законами логики называются схемы построения истинных и ложных предложений. Законы логики иначе называют теоремами или тезисами логики.

Закон исключающего третьего

р или (неверно, что р)

Если в предложенную схему вместо р подставить какое либо осмысленное предложение, то всегда получится истинное сложное предложение. Например, вместо р подставим предложение: «Во время своих странствий Платон побывал в Индии», то получим сложное предложение:

Во время своих странствий Платон побывал в Индии = р.

(Во время своих странствий Платон побывал в Индии) или (неверно, что о время своих странствий Платон побывал в Индии).

Выполняется одна из возможностей: либо Платон побывал в Индии, либо нет. Если первое высказывание истина, тогда **р = 1**; если ложно, тогда **р = 0.**

Если, **р = 1** или **р = 0** то становится невозможным любое третье предположение. Именно поэтому приведенный закон носит название **исключающего третьего**.

Закон непротиворечивости

Неверно, что [р и (неверно, что р)]

Закон формулируется и следующим образом: **Неверно, что [р и (не р)]**

Например: Неверно, что {(Колумб был в Индии) и [не (был Колумб в Индии)]}.

Каждое из этих предложений представляется истинным. Человек, не может одновременно быть и не быть в каком либо месте. Колумб не мог одновременно быть и не быть в Индии. Таким образом: если **p = 1** становится невозможным, противоречивым, что **p = 0.**

В законах непротиворечивости и исключающего третьего формулируются предложения вида p и не p. Такую пару называют противоречащими предложениями. Закон непротиворечивости иногда формулируют в следующем виде: два противоречащих предложения не могут быть одновременно истинными.

Законы двойного отрицания

Если отрицать дважды некоторое предположение, то в результате получится, как будто никакого отрицания и не было. Так говоря: «Не является истинным, что Пётр этого не делал». Тем самым, мы утверждаем, что Пётр этого не делал.

Общий вид закона: **Если [неверно, что (неверно, что p)], то не p.**

Оборот «неверно, что p» заменим «на не p». в этом случае закон формулируется в виде: Если [не (не p)], то p.

Отрицание ложно тогда, когда предложение, которое отрицается истинно. И наоборот, если предложение является ложным, его отрицание является истинным. Эту связь можно выразить символически.

1. если p истинно, то (не p) ложно;
2. если p ложно, то (не p) истинно.

Для более краткой записи

- при p истинно p = 1;
- при p ложно p = 0.

1. если p = 1, то (не p) = 0;
2. если p = 0, то (не p) = 1.

В таблице в колонке под **р** записаны символы предложений которые может принимать произвольное предложение

р	не р
1	0
0	1

Применима и иная форма записи: р = А, не $p = \overline{A}$, 1 – истина или И.

$\overline{A}$ – отрицание высказывания А. Отрицание следует рассматривать, как функцию одной переменной.

Закон контрапозиции

Закон контрапозиции также называют законом двойного ЕСЛИ

Если (если р, то q), то [если не q, то не р)].

Если [(у Яна будет время), то (Ян навестит Петра), но если (Ян не навестит Петра), то у (Яна не было времени).

1. Ян навестит Петра = р;
2. Ян не навестит Петра = q;
3. у Яна будет время = n;
4. Яна не было времени = m.

Предположение р истинно, если n истинно.

Предположение q истинно, если m истинно.

при n = 1 р = 1 **при m = 0 q = 0**

при m = 1 q = 1 **при n = 0 р = 0.**

Законы логики, характеризующие конъюнкцию

Применение соединительного союза и при построении соответствующего высказывания называем конъюнкцией.

Например: (Днепропетровск расположен на Днепре) и (Киев расположен на Днепре).

Днепропетровск расположен на Днепре = р.

Киев расположен на Днепре = q.

Если (р и q) то (q и р)

Если (р и q) то р

Если (р и q) то q

Имея истинную конъюнкцию мы признаём истинным любое из её слагаемых. Если истины оба слагаемых, то истина и конъюнкция.

В логических схемах применяется правило, позволяющее применять конъюнкцию двух истинных предложений:

Если p, то [если q. то (p и q)].

Если (Днепропетровск расположен на Днепре)
то {если (Киев расположен на Днепре),
то [(Днепропетровск расположен на Днепре)
и (Киев расположен на Днепре)]}.

Конъюнкции рассматриваются как истинные тогда и только тогда, когда оба её слагаемых истинны. Конъюнкция признаётся ложной тогда, когда хотя бы одна из её составляющих ложная. Потому, в соответствии с принятой символикой, можно записать:

1. если p = 1 и q = 1, то (p и q) = 1;
2. если p = 1 и q = 0, то (p и q) = 0;
3. если p = 0 и q = 1, то (p и q) = 0;
4. если p = 0 и q = 0, то (p и q) = 0.

Таблица истинности конъюнкции

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Существует иная форма записи: p = A, q = B, тогда **A** Ù **B** **конъюнкция.**

Законы импликативных союзов

Теоремы называются импликативными силлогизмами по их сходству с традиционными логическими схемами, называемыми силлогизмами. В традиционной логике силлогизмами называются схемы умозаключений, не принадлежащие логике предложений, которые приводят от двух посылок определённого вида к выводу, имеющему некоторый определённый, (хотя может быть, и иной) вид.

Обе посылки, как и заключение, имеют одинаковый вид, тогда они являются импликациями.

Например:

а) Если завтра будет ясная погода, то не будет снегопада.

б) Если завтра будет ясная погода, появляется возможность приятной прогулки.

в) **Если** [(завтра будет ясная погода), **то** (не буде снега), **значит**, (появится возможность приятной прогулки)].

Завтра будет ясная погода	**посылка = p**
Не буде снега	**посылка = q**
Появится возможность приятной прогулки	**заключение = r**

Если	**[(если p, то q) и (если p то r)],**
то	**[если p, то (q и r)].**

В доказательстве сначала необходимо применить теорему конъюнкции, чтобы можно было из первого предложения получить второе и получить конъюнкцию, лишь затем применяется теорема импликации.

Когда обе посылки верны, то вывод верен. Если одна из посылок оказывается неверной, то и весь алгоритм неверен.

Разобранную характеристику импликации можно записать в форме таблицы. В этой таблице для сокращения записи примем общеупотребительное сокращение оборота «если p, то q» через «p →q»

1. если p = 1 и q = 1 то (p → q) = 1;
2. если p = 1 и q = 0 то (p → q) = 0;
3. если p = 0 и q = 1 то (p → q) = 1;
4. если p = 0 и q = 0 то (p → q) = 1.

Таблица истинности импликации

p	q	p → q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Законы, характеризующие дизъюнкцию

Дизъюнкция всегда является **коммуникативной и перестановочной**. Она характерна союзом **или.**

Например:

Завтра будет дождь или завтра будет вьюга.

Завтра будет вьюга, или завтра будет дождь.

Завтра будет дождь p

Завтра будет вьюга q

Если (p или q), то (q или p)

Например:

Если верно, что завтра будет дождь, то одновременно не может быть вьюги.

Дизъюнкция является истиной тогда и только тогда, когда один из её членов является истинным. Итог можно записать при помощи принятых сокращений:

1. если p = 1 и q = 1 то (p или q) = 1;
2. если p = 1 и q = 0 то (p или q) = 1;
3. если p = 0 и q = 1 то (p или q) = 1;
4. если p = 0 и q = 0 то (p или q) = 0.

Таблица истинности дизъюнкции

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Существует иная форма записи: p = A, q = B. **$A \vee B$ – дизъюнкция**.

Закон, характеризующий эквивалентность

Если (p тогда и только тогда, когда q), то (q тогда и только тогда, когда p).

Например:

Если [(наступает туман) тогда и только тогда, когда относительная влажность воздуха превышает 100%)], [(то относительная влажность воздуха превышает 100% тогда и только тогда, когда наступает туман)].

Эквивалентность коммуникативна.

Если (p тогда и только тогда, когда q), то (если p то q).

Эквивалентность истинна тогда и только тогда, когда оба её члена одновременно либо истинны, либо ложны. Символически и при помощи таблицы эквивалентность записывается следующим образом, с учётом использования общепринятого сокращения, согласно которому выражение «p тогда т только тогда, когда q» обозначается «p ≡ q»:

1. если p = 1 и q = 1, то (p ↔ q) = 1;
2. если p = 1 и q = 0, то (p ↔ q) = 0;
3. если p = 0 и q = 1, то (p ↔ q) = 0;
4. если p = 0 и q = 0, то (p ↔ q) = 1.

Таблица истинности эквивалентности

p	q	p ↔ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Законы де-Моргана

1. [Не (p либо q)] тогда и только тогда, когда [(не p) и (не q)].
2. [Не (q и не p)] тогда и только тогда, когда [(не p или не q)].

Эти два закона имеют многочисленные применения, в первую очередь при подстановках.

Например:

{Неверно, что [(завтра будет холодно), и (завтра будет дождливо)]} тогда и только тогда, когда [(не будет завтра холодно) или не будет дождливо)].

Завтра будет холодно **p**

Завтра будет дождливо **q**

[Лучше: Неверно, что завтра будет холодно и завтра будет дождливо тогда и только тогда, когда завтра не будет холодно или завтра не будет дождливо]

Все подстановки при использовании законов де-Моргана истины с исключительной очевидностью эти законы можно характеризовать следующим образом: отрицание дизъюнкции эквивалентно конъюнкции отрицаний, тогда когда отрицание конъюнкции эквивалентно дизъюнкции отрицаний.

ТЕМА 9. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ И СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Имеются три принципиально разных вида выражений логики:

$$(P \vee \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q) \quad (1)$$

$$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge q) \quad (2)$$

$$(P \vee \sim Q) \rightarrow (\sim P \wedge Q) \quad (3)$$

Отличия выражений представлены в таблице истинности (Табл. 9.1.)

Таблица 9.1.

p	q	~ p	~q	p ∨ ~ q	~ p ∧ q	(p ∨ ~ q) ∨ (~ p ∧ q)	(p ∨ ~ q) ∧ (~ p ∧ q)	(p ∨ ~ q)→ (~ p ∧q)
1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0

- выражение (p ∨ ~ q) ∨ (~ p ∧ q) при любом распределении значений пропозициональных переменных принимает значение истина;
- выражение (p ∨ ~ q) ∧ (~ p ∧ q) всегда принимает значение ложь;

- выражение $(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$ не истинно, но и не ложно. Оно называется **нейтральным**.

Таким образом, в алгебре логики встречаются три вида выражений:

1. общезначимые выражения – это выражения, которые при каждом наборе значений своих пропозициональных переменных принимают только значение **истина**;
2. противоречия – это выражения, которые при любом наборе пропозициональных переменных принимают только значение **ложь**;
3. нейтральные высказывания – это выражения, которые, по крайней мере, при одном наборе значений встречающихся в них пропозициональных переменных приобретают значение **ложь**.

Выполнимыми выражениями называются такие выражения, которые, по крайней мере, при одном распределении значений истинности встречающихся в них пропозициональных переменных принимают значение – истина.

Любое выражение логики высказываний всегда преобразовывается в одну из форм, которая называется **нормальной**. Выражение в нормальной форме содержит в себе отрицание только лишь перед пропозициональными переменными, конъюнкцию, и дизъюнкцию.

Преобразования форм

Импликация (как показано в таблице 9.2.) может быть преобразована в дизъюнкцию $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$, так как обе имеют одинаковый порядок значений.

Таблица 9.2.

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

Имеется целый ряд преобразований импликаций, например:

$$p \rightarrow \sim q, \qquad \sim p \rightarrow \sim q, \qquad \sim (p \rightarrow q), \qquad (p \wedge q) \rightarrow r$$

Для преобразований импликаций в дизъюнкцию достаточно запомнить ряд правил: выражение ~p V q всегда можно получить из p → q

$$\begin{array}{ccc} p & \rightarrow & q \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \sim p & \vee & q \end{array}$$

1. p – антецедент импликации заменяется своим отрицанием;
2. → константа импликации заменяется константой ∨ дизъюнкции;
3. q – консеквент импликации берётся без изменения.

Импликация (как показано в таблице 9.3.) преобразуется в дизъюнкцию с таким же порядком значений истинности, если её антецедент отрицается, константа импликации заменяется константой дизъюнкции, а консеквент берётся без изменений. В соответствии с этим допустимы следующие преобразования:

Таблица 9.3.

$p \rightarrow \sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim (p \rightarrow q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
↓	↓	↓	↓
$\sim p \vee \sim q$	$\sim \sim p \vee \sim q$	$\sim (\sim p \vee q)$	$\sim (p \wedge q) \vee r$

Дизъюнкция (как показано в таблице 9.4.) преобразуется в импликацию с таким же порядком значений истинности, если её первый член отрицается, константа дизъюнкции заменяется константой импликации, а её второй член берётся без изменения. В соответствии с этим допустимы следующие преобразования:

Таблица 9.4.

$p \vee q$	$p \vee \sim q$	$\sim (\sim p \vee q)$	$\sim (p \wedge q) \vee q$
↓	↓	↓	↓
$\sim p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim (\sim \sim p \rightarrow q)$	$\sim \sim (p \wedge q) \rightarrow r$
		↓	↓
		$\sim (p \rightarrow q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$

Конъюнкция преобразуется в дизъюнкцию с таким же порядком значений истинности, если:

1. оба члена заменяются их отрицаниями;

2. $\wedge$ заменяется $\vee$ и отрицается всё выражение;

3. соответственно, $p \wedge \sim q$ преобразуется в $\sim (\sim p \vee \sim\sim q)$ и в конечном итоге упрощается в $\sim (\sim p \vee q)$.

Дизъюнкция преобразуется в конъюнкцию с таким же порядком значений истинности, если:

1. оба члена заменяются их отрицаниями;

2. $\vee$ заменяется на $\wedge$ и отрицается всё выражение.

$\sim (\sim p \vee \sim q) \sim \sim (\sim\sim p \wedge \sim\sim q)$ $\qquad\qquad$ $p \wedge q$

Связь между выражениями алгебры логики приведена в таблице 9.5.

Таблица 9.5.

p	q	~ p	p → q	~ p ∨ q	(p → q) ↔ (~ p ∨ q)
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

Из таблицы истинности видно, что:

1. выражения $p \rightarrow q$ и $\sim p \vee q$ семантически эквивалентны;

2. эквиваленция $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ общезначима.

Два выражения семантически эквивалентны только тогда, когда образованная из них эквиваленция общезначима.

Правило подстановки: В общезначимом выражении логики высказываний вместо любой пропозициональной переменной можно подставить любое выражение при условии, что это осуществляется для всех вхождений этой переменной.

Отношения выражений одних союзов через другие

- Переход от импликации к дизъюнкции: $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$;

≡ тождество	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee c)$;

- переход от конъюнкции к дизъюнкции: $p \wedge \sim q \equiv \sim (\sim p \vee \sim\sim q) \equiv \sim (\sim p \vee q)$;
- закон двойного отрицания: $\sim (\sim p) \equiv p$;

- первый закон де Моргана – отрицание конъюнкции $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$;
- второй закон де Моргана – отрицание дизъюнкции $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

Законы де Моргана используются для перенесения отрицаний, применяемых к сложным высказываниям, на составляющие их высказывания. Они есть законы выражения одних союзов через другие. При помощи этих законов, используя эквивалентность, можно исключать импликацию из любой формулы. Эквивалентность – есть отношение между формулами. При её помощи двойная импликация выражается:

1. через конъюнкцию и импликацию эквивалентностью

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p); \qquad p \leftrightarrow q = r;$$

2. через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание эквивалентностью

$$p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q); \qquad p \leftrightarrow q = r;$$

3. через конъюнкцию и отрицание эквивалентностью:

$$p \leftrightarrow q \equiv \sim (p \wedge \sim q) \wedge \sim (\sim p \wedge q). \qquad p \leftrightarrow q = r.$$

Закон контрапозиции: $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$ означает, что вместо истинности высказывания $p \to q$ можно доказывать обратно противоположное ему утверждение $\sim q \to \sim p$. При этом выражение $\sim q \to \sim p$. – конверсия контрапозиции. При конъюнкции импликаций получаем:

$$(p \to q) \wedge (q \to p) \equiv p \leftrightarrow q.$$

Из определения отношений эквивалентности непосредственно следует, что оно рефлексивно, симметрично, транзитивно.

1. $r \equiv r$ для любой формулы r рефлексивно;
2. если $r_1 \equiv r_2$, то $r_2 \equiv r_1$ симметрично;
3. если $r_1 \equiv r_2$ и $r_2 \equiv r_3$, то $r_1 \equiv r_3$ транзитивное отношение. Оно справедливо для любых формул r_1, r_2, r_3.

Возможность выражения одного и того же высказывания эквивалентными формулами отражает возможность выражения одной и той же мысли с помощью высказываний различной логической структуры. Поэтому, отношение эквивалентности позволяет, в частности, выражать одни логические операции через другие.

Например:

Если необходимо исследовать эквиваленцию $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$, то её преобразуют в две импликации, которые проверяют отдельно. Сначала исследуем импликацию $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$.

Допустим, что консеквент $(p \rightarrow q)$ ложен, поэтому p истинно, q ложно. Из-за ложности q антицендент ложен. Следовательно, это выражение общезначимо. Рассмотрим импликацию $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$. Здесь имеется три набора значений истинности, при которых консенвент ложен. Среди них есть один набор значений, когда антецедент также ложен (если p истинно, а q ложно). Но это ещё не говорит о том, что выражение общезначимо, потому, что существуют два любых набора значений, при которых всё выражение ложно:

1. когда p ложно, а q истинно;
2. когда p и q оба ложны.

Исследуемая эквиваленция была бы общезначимой, если бы обе импликации были общезначимы. Только первая импликация является общезначимой.

Решение проблемы разрешений при помощи нормальных форм

Для решения некоторого выражения логики (т. е. для установления к какому классу оно принадлежит) его сначала приводят к нормальной форме. Нормальная форма должна удовлетворять следующим условиям:

1. быть семантически эквивалентной исходному выражению;
2. из связок логики высказывания в ней должны содержаться только знаки отрицания, конъюнкции и дизъюнкции;
3. встречающиеся знаки отрицания должны относиться только к пропозициональным переменным, но не к сложным выражениям.

Прежде всего, необходимо позаботиться о выполнении второго условия, а уж потом проводить преобразования, для выполнения третьего условия. Для этого сначала необходимо устранить знаки импликации из выражения (4). Приведём к нормальной форме выражение

$$\sim (p \vee \sim q) \rightarrow \rightarrow \sim (\sim p \wedge q). \qquad (4)$$

Преобразование импликации в дизъюнкцию привело к тому, что левый член отрицается дважды. Согласно правилу, выражение может быть упрошено:

$$(p \vee \sim q) \vee \sim (\sim p \wedge q). \qquad (5)$$

Теперь правый член необходимо преобразовать так, чтобы было выполнено условие об отношении знаков отрицания только к пропозициональным переменным. Для этого правый член выражения превратим в дизъюнкцию: $(p \vee \sim q) \wedge \sim\sim (\sim\sim p \vee \sim q)$. (6)

После сокращения двойных знаков отрицания получается выражение:

$$(p \vee \sim q) \vee (p \vee \sim q) \qquad (7)$$

Выражение (7) является нормальной формой выражения (4).

Целесообразно не принимать во внимание знаки отрицания, потому, что они нередко сокращаются в процессе преобразования.

Если нормальная форма содержит отрицания, то требует дополнительных преобразований. При этом выполняются правила дистрибутивности:

1. от $p \vee (q \wedge r)$ можно перейти к $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ и наоборот; Оба выражения имеют одно и то же распределение значений истинности.
2. от $p \wedge (q \vee r)$ можно перейти к $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Правила дистрибутивности гарантируют, что выражение, полученное с их помощью семантически эквивалентно исходному. С помощью правил дистрибутивности из любого выражения логики после приведения его к нормальной форме, можно получить его конъюнкцию и дизъюнкцию нормальной формы.

Конъюнктивная нормальная форма выражения, – это конъюнктивная дизъюнкция $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ она выполняет все условия нормальной формы. Члены этих дизъюнкций (с отрицаниями или без них) являются пропозициональными переменными. Конъюнктивная нормальная форма выражения позволяет узнать, является оно общезначимым или нет.

Исследуем выражение: $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$. Сначала составляется нормальная форма: $\sim (p \wedge q) \vee (p \wedge q)$. (8)

$$\sim\sim (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q). \qquad (9)$$

$$(\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q). \qquad (10)$$

Это выражение является дизъюнкцией, которая состоит из дизъюнкции и конъюнкции. Но нам необходима конъюнкция дизъюнкций. Применим первое правило дистрибутивности, вместо p введём $(\sim p \vee \sim q)$, p вместо q q вместо r и тогда получим $((\sim p \vee \sim q) \vee p) \wedge ((\sim p \vee \sim q) \vee q)$.

Выражения $(p\ (\ q \vee r)$, $((p \vee q) \vee r$ и $(p \vee q \vee r)$ семантически эквивалентны друг другу. Значит, их можно переписать в виде: $(\sim p \vee \sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee q)$. Это эквивалентная первоначальному выражению конъюнкция дизъюнкций, члены которой являются пропозициональными переменными. Таким образом, получили конъюнктивную нормальную форму первоначального выражения.

Если из конъюнктивной нормальной формы выражения можно узнать, является ли оно общезначимым, то, дизъюнктивная нормальная форма позволяет определить, является ли выражение противоречивым. Дизъюнктивная нормальная форма является дизъюнкцией конъюнкций. Она выполняет все условия нормальной формы. Члены этих конъюнкций являются пропозициональными переменными (с отрицанием или без него).

Приведём выражение $p \wedge [(\sim p \wedge q) \vee (q \wedge \sim p)]$ к дизъюнктивной нормальной форме. Примем, что **p** остаётся неизменным, $(\sim p \wedge q)$ подставляется вместо q, $(q \wedge \sim q)$ вместо r. Получим: $(p \wedge (\sim p \wedge q)) \vee (p \wedge (q \wedge \sim q))$

$(p \wedge \sim p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge \sim q)$.

Обе конъюнкции содержат выражение вида **$p \wedge \sim p$,** они при любом наборе значений переменных ложны, т. е. они являются противоречиями. Так как конъюнкция, которая содержит ложный член, целиком ложна, то в третьей нормальной форме пропозициональная переменная не существенна для значения истинности конъюнкции. Оба члена дизъюнкции являются противоречиями. Таким образом, она и сама является противоречием. Следовательно, и первоначальное выражение также противоречиво.

Выражение логики является противоречием, если в каждой конъюнкции, составляющей его дизъюнктивную нормальную форму, некоторая пропозициональная переменная входит один раз с отрицанием, а другой раз без него. Если же этого нет, хотя бы в одной конъюнкции, то выражение не является противоречием, т. е. оно общезначимо или нейтрально.

Литература

1. Акимов О. Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 376 с.
2. Айгер М. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 556 с.
3. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976. – 400 с.
4. Гетманова А. Д. Логика. – М.: Высшая школа, 1986. – 298 с.
5. Гильберт Д., Барнайо П. Основания математики. Теория доказательств. – М.: Наука, 1982. – 652 с.
6. Гильберт Д., Барнайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. – М.: Наука, 1982. – 556 с.
7. Горбатов В. А. Основы дискретной математики. – М.: Высшая школа, 1986. – 311 с.
8. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
9. Кузин Л. Т. Основа кибернетики. Т. 2. Основы кибернетических моделей. – М.: Энергия, 1979. – 584 с.
10. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971. – 320 с.
11. Новиков П. С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
12. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. – С.Пб.: – Москва – Харьков, – Минск, 2002. – 301 с.
13. Рыжов Ю. М. Сущанский В. И. Булевы алгебры. – К.: Вища школа, 1982. – 94 с.
14. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1977. – 320с.

Содержание

Учебное издание

Швачич Геннадий Григорьевич
Овсянников Александр Васильевич
Кузьменко Вячеслав Витальевич
Соболенко Александр Викторович
Байрак Виталий Васильевич

Системы управления базами данных

Часть I. Описание структуры баз данных при использовании булевых алгебр

Учебное пособие

Тем. план 2008, поз. 182.

Підписано до друку 26.02.08.Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 3,05. Умов. друк. арк. 3,02. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ