МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

**В.Л. КОПОРУЛИН, И.Л. ШИНКОВСКАЯ,
И.П. ЗАЕЦ, Л.Ф. СУШКО**

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть III

Днепропетровск НМетАУ 2016

УДК 517(07)
Копорулин В.Л., Шинковская И.Л., Заец И.П., Сушко Л.Ф. Высшая математика. Часть 3: Учебное пособие. – Днепропетровск: НМетАУ, 2016. – 65 с.

Учебное пособие соответствует программе курса высшей математики по разделу «Неопределенный интеграл». Содержит теоретические основы, методические указания и рекомендации с подробным разбором около 200 типовых задач. В конце каждого параграфа приводятся задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для иностранных студентов специальности 136 «Металлургия» и других специальностей всех форм обучения.

Библиогр.: 7 наим.

Печатается под авторской редакцией

Ответственный за выпуск В.Л. Копорулин, канд. техн. наук, доц.

Рецензенты: Т.С. Кагадий, д-р физ.-мат. наук, проф. (НГУ)
А.В.Сясев, канд. физ.-мат. наук, доц. (ДНУ)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

За последние годы составляющая международного образования в системе высшего образования претерпела перемены: значительно увеличилось число иностранных студентов, желающих получить образование в высших учебных заведениях Украины. В связи с этим значительно возросла ответственность вуза за качество подготовки специалистов.

Процесс обучения иностранных студентов имеет свою специфику и особенности. Цель предлагаемого пособия – помочь слушателям при изучении дисциплины «Высшая математика» разобраться и качественно усвоить учебный материал.

Третья часть учебного пособия посвящена разделу «Неопределенный интеграл». Приводятся основные теоретические положения и формулы, которые иллюстрируются подробным решением задач разного уровня сложности. В конце каждого параграфа предлагаются задачи для самостоятельной работы. Руководствуясь учебным пособием, студенты, прослушавшие курс лекций, практически научатся применять теорию к решению задач, выявлять тип неопределенного интеграла, идентифицировать его с известными методами и приемами вычислений.

Для снижения уровня языковой адаптации в конце пособия приводится список математических терминов и словосочетаний, составленных по предлагаемому материалу на французском и английском языках.

Пособие может быть также использовано для самостоятельной работы и подготовки к модульному контролю студентов технических направлений всех форм обучения.

Учебное пособие издается на русском языке, что обусловлено договором между НМетАУ и иностранными студентами о языке обучения.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной для заданной функции $f(x)$. В интегральном исчислении решается обратная задача: восстановить функцию, если известна ее производная. Эта задача решается с помощью неопределенного интеграла.

1.1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла

Первичными понятиями интегрального исчисления являются понятия первообразной и неопределенного интеграла.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in(a;b)$. Например, функция $F(x)=x^5$ является первообразной функции $f(x)=5x^4$, так как $F'(x)=\left(x^5\right)'=5x^4=f(x)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$, то для нее всегда существует первообразная.

Очевидно, что, если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то любая из функций $F(x)+C$, где C − произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$ на этом интервале. Для рассмотренной функции $f(x)=5x^4$, кроме $F(x)=x^5$, первообразными будут также функции $F_1(x)=x^5-3$, $F_2(x)=x^5+\frac{1}{2}$, $F_3(x)=x^5+\sqrt{2}$, $F_4(x)=x^5+C$, так как

$\left(x^5-3\right)'=5x^4$, $\left(x^5+\frac{1}{2}\right)'=5x^4$, $\left(x^5+\sqrt{2}\right)'=5x^4$, $\left(x^5+C\right)'=5x^4$.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ называют ***неопределенным интегралом*** и обозначают

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

где $\int$ − знак интеграла, $f(x)$ − подынтегральная функция, $f(x)dx$ − подынтегральное выражение, x − переменная интегрирования.

Читается: «интеграл эф от икс дэ икс».

В случае $f(x)=5x^4$, можно записать: $\int 5x^4 dx = x^5 + C$.

Отыскание неопределенного интеграла от данной функции называют ***интегрированием*** этой функции. Операция интегрирования является обратной к операции дифференцирования. Правильность выполнения интегрирования можно проверить дифференцированием.

1.2. Свойства неопределенного интеграла

Справедливы следующие свойства неопределенного интеграла:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель, отличный от нуля, можно выносить за знак интеграла:

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx.$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен сумме неопределенных интегралов от каждого слагаемого:

$$\int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ − произвольная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

В частности, при $u = kx + b$, где k и b − постоянные, имеем

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

1.3. Таблица интегралов

Как известно, таблица производных основных элементарных функций составляет основу вычислительного аппарата в дифференциальном исчислении. Прямым следствием этой таблицы, правил дифференцирования и свойств дифференциала является таблица неопределенных интегралов. Знание формул, входящих в таблицу, умение ими пользоваться является необходимым при вычислении различных интегралов.

Таблица основных интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq 1$	8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
1а. $\int dx = x + C$	9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
1б. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	10. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left\|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right\| + C$
1в. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$	11. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	12. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{a}} + C, a > 0$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$	13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left\|\dfrac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right\| + C, a > 0$
3а. $\int e^x dx = e^x + C$	14. $\int \dfrac{dx}{a - x^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left\|\dfrac{x+\sqrt{a}}{x-\sqrt{a}}\right\| + C, a > 0$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C, a > 0$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$	16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right\| + C$
6. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\|\cos x\| + C$	
7. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\|\sin x\| + C$	

Замечание. Если первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)dx$ выражается в элементарных функциях. Но есть интегралы, не выражающиеся через элементарные функции, так называемые неберущиеся. К ним относятся $\int e^{-x^2}dx$, $\int \sin(x^2)dx$, $\int \dfrac{\sin x}{x}dx$ и др. Для таких интегралов составлены специальные таблицы.

Следует отметить, что задача интегрирования функции решается неоднозначно. То есть один и тот же интеграл может быть вычислен не единственным способом.

Перейдем к рассмотрению основных методов интегрирования. К ним относятся: метод непосредственного интегрирования, метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

2.1. Метод непосредственного интегрирования

Этот метод заключается в том, чтобы с помощью различных преобразований, основанных на знании формул алгебры, тригонометрии и свойств неопределенного интеграла, представить данный интеграл в виде алгебраической суммы табличных интегралов. В простейшем случае, когда заданный интеграл представляет одну из формул таблицы интегралов, задача интегрирования сводится к непосредственному применению этой формулы.

Пример 2.1.1. Найти интегралы:

а) $\int x^9 dx$; б) $\int \sqrt[5]{x}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^7}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}$.

Решение

Прежде всего, запишем подынтегральную функцию в виде x^{α}, учитывая свойства степени с рациональным показателем: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$, $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}}$. После этого применим формулу **1** таблицы интегралов.

а) $\int x^9 dx = \left[\alpha = 9\right] = \frac{x^{9+1}}{9+1} + C = \frac{x^{10}}{10} + C$.

б) $\int \sqrt[5]{x}dx = \int x^{\frac{1}{5}}dx = \left[\alpha = \frac{1}{5}\right] = \frac{x^{1/5+1}}{1/5+1} + C = \frac{x^{6/5}}{6/5} + C = \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6} + C$.

в) $\int \frac{dx}{x^7} = \int x^{-7}dx = \left[\alpha = -7\right] = \frac{x^{-7+1}}{-7+1} + C = \frac{x^{-6}}{-6} + C = -\frac{1}{6x^6} + C$.

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} = \int x^{-\frac{5}{3}}dx = \left[\alpha = -\frac{5}{3}\right] = \frac{x^{-5/3+1}}{-5/3+1} + C = \frac{x^{-2/3}}{-2/3} + C = -\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + C$.

Пример 2.1.2. Используя таблицу, найти интегралы:

а) $\int 5^x dx$; б) $\int \frac{dx}{16+x^2}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$; г) $\int \frac{dx}{9-x^2}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$.

Решение

а) Воспользуемся табличным интегралом **3** ($a=5$):

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

б) Имеем табличный интеграл **12**, в котором $a=16$. Тогда

$$\int \frac{dx}{16+x^2} = \frac{1}{\sqrt{16}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{16}} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C.$$

в) Воспользуемся табличным интегралом **16** при $a=3$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+3}\right| + C.$$

г) Используем табличный интеграл **14**, в котором $a=9$:

$$\int \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{9}} \ln\left|\frac{x+\sqrt{9}}{x-\sqrt{9}}\right| + C = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + C.$$

д) Используем табличный интеграл **15**, в котором $a=5$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Пример 2.1.3. Используя таблицу и свойства **4** и **5** неопределенного интеграла, найти интегралы:

а) $\int \left(3x^5 + 5x^3 - 4x + 1\right) dx$; б) $\int \left(x^2 - 2x\sqrt{x} + \frac{8}{x}\right) dx$;

в) $\int \left(4^x - \frac{11}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$; г) $\int \left(\frac{2}{\cos x} + 3\sin x - \frac{4}{x^2-4}\right) dx$.

Решение

а) $\int \left(3x^5 + x^3 - 4x + 1\right) dx = \int 3x^5 dx + \int x^3 dx - \int 4x dx + \int dx = 3\int x^5 dx +$

$+\int x^3 dx - 4\int x dx + \int dx = 3 \cdot \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C = \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + x + C.$

б) $\int \left(x^2 - 2x\sqrt{x} + \frac{8}{x}\right) dx = \int x^2 dx - 2\int x^{\frac{3}{2}} dx + 8\int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^{5/2}}{5/2} + 8\ln|x| + C =$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{5}\sqrt{x^5}+8\ln|x|+C.$$

в) $\int\left(4^x-\frac{11}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=\int 4^x\,dx-11\int\frac{dx}{\cos^2 x}+3\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{4^x}{\ln 4}-11\operatorname{tg}x+$

$+3\arcsin x+C$.

г) $\int\left(3\sin x+\frac{2}{\cos x}-\frac{4}{x^2-4}\right)dx=3\int\sin x dx+2\int\frac{dx}{\cos x}-4\int\frac{dx}{x^2-4}=-3\cos x+$

$$+2\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-4\cdot\frac{1}{2\sqrt{4}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{4}}{x+\sqrt{4}}\right|+C=-3\cos x+2\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-$$

$$-\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$$

<u>Замечание.</u> Произвольные постоянные, получающиеся при интегрировании каждого слагаемого, объединены в одну произвольную постоянную C.

В случае, когда подынтегральная функция представляет собой произведение или частное нескольких элементарных функций, сначала выполняют умножение или деление (если это возможно), а только потом интегрируют.

Пример 2.1.4. Найти интегралы:

а) $\int x^4\left(6x^2-1\right)dx$; б) $\int\left(2+5x\right)^2 dx$; в) $\int 4^x\cdot 3^x dx$; г) $\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$;

д) $\int\frac{3x^4+5x-2}{x^2}dx$; е) $\int\frac{\sqrt[6]{x}+2x-\sqrt[3]{x^4}}{x^5}dx$; ж) $\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$.

Решение

а) Выполним умножение и представим подынтегральную функцию в виде многочлена, затем почленно проинтегрируем:

$$\int x^4\left(6x^2-1\right)dx=\int\left(6x^6-x^4\right)dx=6\cdot\frac{x^7}{7}-\frac{x^5}{5}+C=\frac{6}{7}x^7-\frac{1}{5}x^5+C.$$

б) По формуле $\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$ раскроем квадрат двучлена и проинтегрируем полученную сумму:

$$\int\left(2+5x\right)^2 dx=\int\left(4+20x+25x^2\right)dx=4x+20\cdot\frac{x^2}{2}+25\cdot\frac{x^3}{3}+C=$$

$$= 4x + 10x^2 + \frac{25}{3}x^3 + C.$$

в) Выполним умножение, помня, что $a^x b^x = (ab)^x$:

$$\int 4^x \cdot 3^x dx = \int (4\cdot 3)^x dx = \int 12^x dx = \frac{12^x}{\ln 12} + C.$$

г) Используем известную формулу тригонометрии $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$. Тогда получим:

$$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx = \int \frac{1}{2}\sin x dx = \frac{1}{2}\int \sin x dx = -\frac{1}{2}\cos x + C.$$

д) Разделим почленно числитель на знаменатель. В результате подынтегральная функция раскладывается на слагаемые, каждое из которых проинтегрируем:

$$\int \frac{3x^4 + 5x - 2}{x^2}dx = \int\left(\frac{3x^4}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \int\left(3x^2 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + 5\ln|x| +$$

$$+\frac{2}{x} + C = x^3 + 5\ln|x| + \frac{2}{x} + C.$$

е) Преобразуем подынтегральную функцию аналогично предыдущему примеру:

$$\int \frac{\sqrt[6]{x} + 2x - \sqrt[3]{x^4}}{x^5}dx = \int\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{x^5} + \frac{2x}{x^5} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^5}\right)dx = \int\left(x^{-\frac{29}{6}} + 2x^{-4} - x^{-\frac{11}{3}}\right)dx =$$

$$= \frac{x^{-23/6}}{-23/6} + 2\cdot\frac{x^{-3}}{-3} - \frac{x^{-8/3}}{-8/3} + C = -\frac{6}{23\sqrt[6]{x^{23}}} - \frac{2}{3x^3} + \frac{3}{8\sqrt[3]{x^8}} + C.$$

ж) После почленного деления числителя дроби на знаменатель, получим:

$$\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x}\right)dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \sin x\right)dx = -\operatorname{ctg} x + \cos x + C.$$

Пример 2.1.5. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{dx}{25x^2 + 9}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 4x^2}}$; в) $\int \frac{x^2 dx}{x^2 - 16}$; г) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; д) $\int \frac{dx}{1 - \cos 2x}$.

Решение

а) Интеграл не является табличным, но легко к нему приводится. Для этого в знаменателе подынтегральной дроби вынесем **25** за скобки и воспользуемся формулой **12** таблицы интегралов:

$$\int \frac{dx}{25x^2+9} = \int \frac{dx}{25\left(x^2+{}^9\!/_{25}\right)} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{x^2+{}^9\!/_{25}} = \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{\sqrt{{}^9\!/_{25}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{{}^9\!/_{25}}} + C =$$

$$= \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{{}^3\!/_5}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{{}^3\!/_5} + C = \frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{5x}{3} + C.$$

б) Выполним аналогичные преобразования и приведем интеграл к формуле **15** таблицы интегралов:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left({}^7\!/_4 - x^2\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{{}^7\!/_4 - x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{{}^7\!/_4}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{7}} + C.$$

в) Преобразуем подынтегральную дробь так, чтобы получить алгебраическую сумму двух дробей, интегралы от которых являются табличными. Для этого в числителе подынтегральной дроби отнимем и прибавим **16**. Разделив почленно $\left(x^2-16\right)+16$ на x^2-16, получим сумму двух табличных интегралов **1а** и **13**:

$$\int \frac{x^2dx}{x^2-16} = \int \frac{\left(x^2-16\right)+16}{x^2-16}dx = \int\left(\frac{x^2-16}{x^2-16}+\frac{16}{x^2-16}\right)dx = \int dx + 16\int\frac{dx}{x^2-16} =$$

$$= x + 16\cdot\frac{1}{2\sqrt{16}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{16}}{x+\sqrt{16}}\right| + C = x + 2\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C.$$

г) Исходный интеграл не является табличным. Преобразуем подынтегральную функцию, используя тригонометрическую формулу $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$, т.е. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$. Будем иметь:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

д) Преобразуем подынтегральное выражение с помощью формулы тригонометрии $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$. Тогда $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ и данный интеграл приводится к табличному интегралу **8**:

$$\int\frac{dx}{1-\cos 2x} = \int\frac{dx}{2\sin^2 x} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C.$$

Рассмотрим ряд примеров с использованием свойства **6**, когда переменная интегрирования – линейная функция. Такие интегралы часто называют ***почти табличными интегралами***.

Пример 2.1.6. Найти интегралы:

а) $\int e^{6x}dx$; б) $\int (2x-1)^8\,dx$; в) $\int \frac{dx}{3^x}$; г) $\int \mathrm{tg}\frac{4x}{5}dx$; д) $\int \frac{dx}{\cos(\pi-4x)}$;

е) $\int\left(\frac{1}{4x+1}+6^{3-7x}+2\,\mathrm{ctg}\frac{x}{3}\right)dx$; ж) $\int\left(\cos\frac{3+11x}{4}+\frac{5}{\sin^2(3x-1)}\right)dx$;

з) $\int\left(\sqrt[3]{3-2x}-\frac{4}{(7-x)^5}\right)dx$; и) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4x^2-7}}+\frac{3}{7+5x^2}\right)dx$.

Решение

а) $\int e^{6x}dx=\frac{1}{6}e^{6x}+C$.

б) $\int (2x-1)^8\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^9}{9}+C=\frac{1}{18}(2x-1)^9+C$.

в) $\int \frac{dx}{3^x}=\int 3^{-x}dx=-\frac{3^{-x}}{\ln 3}+C=\frac{1}{3^x\ln 3}+C$.

г) $\int \mathrm{tg}\frac{4x}{5}dx=\frac{1}{4/5}\cdot\left(-\ln\left|\cos\frac{4x}{5}\right|\right)+C=-\frac{5}{4}\ln\left|\cos\frac{4x}{5}\right|+C$.

д) $\int \frac{dx}{\cos(\pi-4x)}=\frac{1}{-4}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi-4x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=-\frac{1}{4}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right|+C$.

е) $\int\left(\frac{1}{4x+1}+6^{3-7x}+2\,\mathrm{ctg}\frac{x}{3}\right)dx=\int\frac{dx}{4x+1}+\int 6^{3-7x}dx+2\int\mathrm{ctg}\frac{x}{3}dx=\frac{1}{4}\cdot\ln|4x+1|+$

$+\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{6^{3-7x}}{\ln 6}+2\cdot 3\cdot\ln\left|\sin\frac{x}{3}\right|+C=\frac{1}{4}\ln|4x+1|-\frac{6^{3-7x}}{7\ln 6}+6\ln\left|\sin\frac{x}{3}\right|+C$.

ж) $\int\left(\cos\frac{3+11x}{4}+\frac{5}{\sin^2(3x-1)}\right)dx=\int\cos\frac{3+11x}{4}dx+5\int\frac{dx}{\sin^2(3x-1)}=$

$=\frac{4}{11}\cdot\sin\frac{3+11x}{4}+5\cdot\frac{1}{3}\cdot\mathrm{ctg}(3x-1)+C=\frac{4}{11}\sin\frac{3+11x}{4}+\frac{5}{3}\mathrm{ctg}(3x-1)+C$.

з) $\int\left(\sqrt[3]{3-2x}-\frac{4}{(7-x)^5}\right)dx=\int(3-2x)^{\frac{1}{3}}dx-4\int(7-x)^{-5}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-2x)^{1/3+1}}{1/3+1}-$

$-4\cdot(-1)\cdot\frac{(7-x)^{-5+1}}{-5+1}+C=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-2x)^{4/3}}{4/3}+4\cdot\frac{(7-x)^{-4}}{-4}+C=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(3-2x)^4}-$

$-\frac{1}{(7-x)^4}+C$.

и) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4x^2-7}}+\frac{3}{1+5x^2}\right)dx=2\int\frac{dx}{\sqrt{(2x)^2-7}}+3\int\frac{dx}{1+\left(\sqrt{5}x\right)^2}=$

$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|2x+\sqrt{(2x)^2-7}\right|+3\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{5}x+C==\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-7}\right|+$

$+\frac{3}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\sqrt{5}x+C$.

Заметим, что этот интеграл можно вычислить вынесением за знак корня и за скобки коэффициентов при переменной (см. пример **2.1.5. а)** и **б)**).

Задания для самостоятельной работы

Вычислить интегралы:

1. $\int\left(6x^3-3x^2+2x-5\right)dx.$
2. $\int\left(4e^x-3\sin x+\frac{2}{9+x^2}\right)dx.$
3. $\int\left(5^x+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3}{5-x^2}\right)dx.$
4. $\int\left(x^2-2x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+\frac{5}{x}\right)dx.$
5. $\int\left(x^2-1\right)\left(x^3+4\right)dx.$
6. $\int x^2(2-3x)^3dx.$
7. $\int\frac{5^x}{3^{2x}}dx.$
8. $\int\frac{\sqrt[3]{x}+2x-x^4}{x^5}dx.$
9. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$
10. $\int\frac{x^2+2}{1+x^2}dx.$
11. $\int ctg^2 x dx.$
12. $\int\frac{(x+2)^3}{x^2}dx.$
13. $\int 5^{\frac{2+11x}{4}}dx.$
14. $\int(2x+5)^{10}dx.$
15. $\int ctg(4-5x)dx.$
16. $\int\frac{dx}{2x^2-18}.$
17. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}.$
18. $\int\frac{dx}{4x^2+64}.$
19. $\int tg\frac{7x+1}{9}dx.$

20. $\int\left(3\sin 6x-\frac{2}{5x-1}+e^{\frac{x}{3}}\right)dx.$ 21. $\int\left(\frac{3}{5x^2+8}-\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\right)dx.$

2.2. Метод замены переменной (подстановки)

Суть этого метода состоит в том, что для приведения интеграла к табличному виду вводят новую переменную интегрирования одним из двух способов:

$$1)\int g(x)dx=\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\begin{vmatrix}\varphi(x)=u\\ \varphi'(x)dx=du\end{vmatrix}=\int f(u)du=F(u)+C=$$

$=F(\varphi(x))+C$, где $u=\varphi(x)$ − непрерывно-дифференцируемая функция;

$$2)\int g(x)dx=\begin{vmatrix}x=\psi(t)\\ dx=\psi'(t)dt\end{vmatrix}=\int g(\psi(t))\psi'(t)dt=\int f(t)dt=F(t)+C=$$

$=F(\psi^{-1}(x))+C$, где $x=\psi(t)$ − непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию $t=\psi^{-1}(x)$.

Таким образом, выполняются подстановки двух видов: $u=\varphi(x)$ и $x=\psi(t)$. Обратим внимание на то, что в обоих случаях после вычисления интеграла необходимо вернуться к первоначальной переменной x.

Не существует общего алгоритма, следуя которому можно определить, какую подстановку надо применить к данному интегралу. Однако можно дать следующие рекомендации:

1) если под знаком интеграла стоит сложная функция $f(\varphi(x))$, то, как правило, ее можно упростить подстановкой $\varphi(x)=u$ (например, для функции $\sin\sqrt{x}$ можно использовать подстановку $\sqrt{x}=u$, а для функции $e^{\frac{1}{x}}$ подстановку $\frac{1}{x}=u$);

2) если в подынтегральном выражении можно выделить дифференциал функции $\varphi(x)$, т.е. выражение $\varphi'(x)dx$, то имеет смысл применить подстановку $\varphi(x)=u$. В этом случае говорят о ***введении функции под знак***

дифференциала: $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$. При этом полезно помнить следующие преобразования:

1) $dx = d(x+a), a - const;$

2) $dx = \frac{1}{a}d(ax), a \neq 0;$

3) $dx = \frac{1}{a}d(ax+b), a \neq 0, b - const;$

4) $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$;

5) $x^n dx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1})$;

6) $\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$;

7) $\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$;

8) $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d(\sqrt{x})$;

9) $\sin x dx = -d(\cos x)$;

10) $\cos x dx = d(\sin x)$;

11) $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\mathrm{tg}\, x)$;

12) $\frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(\mathrm{ctg}\, x)$;

13) $e^x dx = d(e^x)$;

14) $a^x dx = \frac{1}{\ln a}d(a^x)$;

15) $\frac{dx}{1+x^2} = d(\mathrm{arctg}\, x) = -d(\mathrm{arcctg}\, x)$;

16) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$.

Пример 2.2.1. Вычислить интегралы:

а) $\int e^{10x+2}dx$; б) $\int \sin(5x+3)dx$; в) $\int \frac{dx}{3-7x}$; г) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$.

Решение

а) Применим подстановку $10x+2=u$. Продифференцируем данное равенство: $(10x+2)'\,dx = 10dx = du$, откуда $dx = \frac{1}{10}du$.

Тогда $\int e^{10x+2}dx = \int e^u \frac{1}{10}du = \frac{1}{10}\int e^u du = \frac{1}{10}e^u + C$.

Возвращаясь к переменной x, получим окончательно: $\int e^{10x+2}dx = \frac{1}{10}e^{10x+2} + C$.

б) $\int \sin(5x+3)dx = \left| \begin{matrix} 5x+3=u \\ 5dx=du, dx=\frac{1}{5}du \end{matrix} \right| = \frac{1}{5}\int \sin u du = -\frac{1}{5}\cos u + C =$

$= -\frac{1}{5}\cos(5x+3) + C$.

При достаточном умении дифференцировать и знании таблицы интегралов и дифференциалов переменную ***u*** можно не вводить (но иметь ее в виду).

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{3-7x} = \int \frac{-\frac{1}{7}d(3-7x)}{3-7x} = -\frac{1}{7}\ln|3-7x| + C$.

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+9} = \int \frac{dx}{(2x)^2+9} = \int \frac{\frac{1}{2}d(2x)}{(2x)^2+9} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x}{3} + C = \frac{1}{6}\mathrm{arctg}\frac{2x}{3} + C$.

Заметим, что все рассмотренные интегралы являются почти табличными и могут быть легко вычислены с помощью свойства **6** неопределенного интеграла (см. пример **2.1.6**.).

Пример 2.2.2. Вычислить интегралы, вводя функции под знак дифференциала:

а) $\displaystyle\int e^{x^2} x\,dx$; б) $\displaystyle\int \cos^5 x \sin x\,dx$; в) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$; г) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$; е) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a}}$; ж) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+a}$; з) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+16}$.

Решение

а) $\displaystyle\int e^{x^2} x\,dx = \int e^{x^2}\cdot\frac{1}{2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

б) $\displaystyle\int \cos^5 x \sin x\,dx = \int \cos^5 x\left(-d(\cos x)\right) = -\frac{\cos^6 x}{6} + C$.

в) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \int \sqrt{1+x^3}\cdot\frac{1}{3}d\left(x^3\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(1+x^3\right)^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \frac{2}{9}\sqrt{\left(1+x^3\right)^3} + C$.

г) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = -\int \mathrm{tg}\frac{1}{x}\,d\left(\frac{1}{x}\right) = -\left(-\ln\left|\cos\frac{1}{x}\right|\right) + C = \ln\left|\cos\frac{1}{x}\right| + C$.

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$.

е) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \int \frac{\frac{1}{2}d\left(x^2 \pm a\right)}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x^2 \pm a} + C = \sqrt{x^2 \pm a} + C$.

ж) $\int \frac{xdx}{x^2 \pm a} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2 \pm a)}{x^2 \pm a} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 \pm a\right| + C$.

з) $\int \frac{xdx}{x^4 + 16} = \int \frac{xdx}{\left(x^2\right)^2 + 16} = \int \frac{\frac{1}{2}d\left(x^2\right)}{\left(x^2\right)^2 + 16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4} + C = \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4} + C$.

Пример 2.2.3. Найти интегралы:

а) $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1+\operatorname{ctg} x}}$; в) $\int \frac{\left(2\ln x + 3\right)^2}{x}dx$;

г) $\int \frac{\cos 5x dx}{\sqrt[6]{1 - 2\sin 5x}}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\left(3 + \arcsin x\right)^5}$; е) $\int \frac{3^x dx}{4 - 9^x}$;

ж) $\int \frac{\sqrt{1 - \log_4 x}}{x}dx$; з) $\int 5^x\left(3 + 2 \cdot 5^x\right)^9 dx$; и) $\int \frac{x^3}{x-1}dx$.

Решение

а) $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx = \left|\begin{array}{l} \sqrt{2x-1} = u \\ \frac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot 2dx = \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} = du \end{array}\right| = \int e^u du = e^u + C = e^{\sqrt{2x-1}} + C$.

б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1+\operatorname{ctg} x}} = \left|\begin{array}{l} 1 + \operatorname{ctg} x = u \\ -\frac{dx}{\sin^2 x} = du \end{array}\right| = -\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -2\sqrt{u} + C = -2\sqrt{1 + \operatorname{ctg} x} + C$.

в) $\int \frac{\left(2\ln x + 3\right)^2}{x}dx = \left|\begin{array}{l} 2\ln x + 3 = u \\ 2\frac{dx}{x} = du, \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}du \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^3}{3} + C =$

$= \frac{1}{6}\left(2\ln x + 3\right)^3 + C$.

г) $\int \frac{\cos 5x dx}{\sqrt[6]{1 - 2\sin 5x}} = \left|\begin{array}{l} 1 - 2\sin 5x = u \\ -10\cos 5x dx = du \end{array}\right| = -\frac{1}{10}\int \frac{du}{\sqrt[6]{u}} = -\frac{1}{10}\int u^{-\frac{1}{6}}du = -\frac{1}{10} \cdot \frac{u^{\frac{5}{6}}}{5/6} + C =$

$$= -\frac{6}{50}\sqrt[6]{u^5} + C = -\frac{3}{25}\sqrt[6]{\left(1 - 2\sin 5x\right)^5} + C.$$

д)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\left(3 + 2\arcsin x\right)^5} = \left| \begin{array}{l} 3 + 2\arcsin x = u \\ \dfrac{2dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^5} = \frac{1}{2}\int u^{-5}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-4}}{-4} + C =$$

$$= -\frac{1}{8u^4} + C = -\frac{1}{8\left(3 + 2\arcsin x\right)^4} + C.$$

е) $$\int \frac{3^x dx}{4 - 9^x} = \int \frac{3^x dx}{4 - \left(3^x\right)^2} = \left| \begin{array}{l} 3^x = u \\ 3^x dx = \dfrac{1}{\ln 3} du \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{du}{4 - u^2} = \frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{u+2}{u-2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4\ln 3}\ln\left|\frac{3^x + 2}{3^x - 2}\right| + C.$$

ж) $$\int \frac{\sqrt{1 - \log_4 x}}{x}dx = \left| \begin{array}{l} 1 - \log_4 x = u \\ -\dfrac{dx}{x\ln 4} = du, \dfrac{dx}{x} = -\ln 4 du \end{array} \right| = -\ln 4\int \sqrt{u}du = -\ln 4 \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C =$$

$$= -\frac{2\ln 4}{3}\sqrt{\left(1 - \log_4 x\right)^3} + C.$$

з) $$\int 5^x\left(3 - 2\cdot 5^x\right)^9 dx = \left| \begin{array}{l} 3 - 2\cdot 5^x = u \\ -2\cdot 5^x \ln 5dx = du, 5^x dx = -\dfrac{1}{2\ln 5}du \end{array} \right| = -\frac{1}{2\ln 5}\int u^9 du =$$

$$= -\frac{1}{2\ln 5}\cdot\frac{u^{10}}{10} + C = -\frac{1}{20\ln 5}\cdot\left(3 + 2\cdot 5^x\right)^{10} + C.$$

и) $$\int \frac{x^3}{x-1}dx = \left| \begin{array}{l} x - 1 = u \\ dx = du, x = u + 1 \end{array} \right| = \int \frac{\left(u+1\right)^3}{u}du = \int \frac{u^3 + 3u^2 + 3u + 1}{u}du =$$

$$= \int\left(u^2 + 3u + 3 + \frac{1}{u}\right)du = \frac{u^3}{3} + 3\cdot\frac{u^2}{2} + 3u + \ln|u| + C = \frac{1}{3}\left(x-1\right)^3 + \frac{3}{2}\left(x-1\right)^2 +$$

$$+3\left(x-1\right) + \ln|x-1| + C.$$

Пример 2.2.4. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; г) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$.

Решение

а) $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \left| \begin{matrix} x = t^3, dx = 3t^2dt \\ \sqrt[3]{x} = t, \sqrt[3]{x^2} = t^2 \end{matrix} \right| = \int \frac{\sin t \cdot 3t^2dt}{t^2} = 3\int \sin tdt = -3\cos t + C =$

$= -3\cos\sqrt[3]{x} + C$.

б) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^2, \sqrt{x} = t \\ dx = 2t\,dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{(t+1)-1}{1+t}dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt =$

$= 2\left(t - \ln|1+t|\right) + C = 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$.

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \left| \begin{matrix} 1+e^x = t^2 \\ e^x dx = 2tdt, dx = \dfrac{dt}{t^2-1} \\ t = \sqrt{1+e^x} \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2 \cdot \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$

$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C$.

г) $\int x\sqrt{x-1}\,dx = \left| \begin{matrix} x-1 = t^2, x = t^2+1 \\ dx = 2tdt, \sqrt{x-1} = t \end{matrix} \right| = \int \left(t^2+1\right) \cdot t \cdot 2tdt = 2\int \left(t^4+t^2\right)dt =$

$= 2\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right) + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить интегралы:

1. $\int \mathrm{ctg}\frac{2x}{3}dx$.
2. $\int \frac{dx}{2\sin(1-6x)}$.
3. $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x+3}{5}}$.
4. $\int \frac{dx}{9x^2+25}$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.
6. $\int 5^{\sin x}\cos x\,dx$.
7. $\int \frac{\cos(\ln x)dx}{x}$.
8. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}dx}{\sqrt{2x-1}}$.
9. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{3+4x^{10}}}$.
10. $\int \frac{e^xdx}{e^{2x}+25}$.
11. $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}dx}{\sqrt{16-e^x}}$.
12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[3]{1+\mathrm{tg}\,x}}$.

13. $\int e^{2-x^3}\cdot x^2dx$. 14. $\int \frac{10^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$. 15. $\int \frac{dx}{(\arccos 3x)^2\sqrt{1-9x^2}}$.

16. $\int \frac{\ln x-1}{x\sqrt{\ln x}}dx$. 17. $\int \frac{(2\lg x+7)^3}{x}dx$. 18. $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{3-\cos^2 x}}$.

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$. 20. $\int x^2\sqrt{x^2+5}\,dx$. 21. $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}$.

2.3. Метод интегрирования по частям

Этот метод сводится к вычислению интегралов по формуле

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

где $u=u(x), v=v(x)$ – непрерывно-дифференцируемые функции. Эта формула носит название формулы интегрирования по частям.

Подынтегральное выражение необходимо разбить на два множителя u и dv, при этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой может быть вычислен. Затем надо найти $du=u'dx$ и $v=\int dv$ и составить правую часть формулы. Оставшийся при этом интеграл $\int vdu$ должен стать или табличным, или хотя бы более простым по сравнению с первоначальным.

Заметим, что для упрощений вычислений при переходе от dv к v можно полагать $C=0$.

Методом интегрирования по частям вычисляются такие типы интегралов:

1. ***Интегралы вида*** $\int P(x)a^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, где $P(x)$ – многочлен степени n от x, k – действительное число. В этих интегралах следует положить $u=P(x)$, тогда dv – оставшаяся часть подынтегрального выражения.

Пример 2.3.1. Вычислить интегралы:

а) $\int xe^{5x}dx$; б) $\int (2x-3)\cdot 4^x dx$; в) $\int x\sin 3xdx$; г) $\int x^2\cos xdx$.

Решение

а) Разобьем подынтегральное выражение на два множителя, выбрав $u = x$, $dv = e^{5x}dx$. Найдем $du = (x)'\,dx = dx$, $v = \int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x}$. Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int xe^{5x}dx = x \cdot \frac{1}{5}e^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C.$$

Обратим внимание, что после применения формулы интеграл в правой части $\int e^{5x}dx$ является табличным и легко вычисляется.

б) $$\int (2x-3)\cdot 4^x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x-3, du = (2x-3)'\,dx = 2dx \\ dv = 4^x\,dx, v = \int 4^x\,dx = \dfrac{4^x}{\ln 4} \end{array} \right| = (2x-3)\cdot\frac{4^x}{\ln 4} -$$

$$-\int \frac{2\cdot 4^x\,dx}{\ln 4} = \frac{1}{\ln 4}(2x-3)\cdot 4^x - \frac{2}{\ln 4}\int 4^x\,dx = \frac{1}{\ln 4}(2x-3)\cdot 4^x - \frac{2}{\ln 4}\cdot\frac{4^x}{\ln 4} + C =$$

$$= \frac{1}{\ln 4}(2x-3)\cdot 4^x - \frac{2}{\ln^2 4}\cdot 4^x + C.$$

в) $$\int x\sin 3x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = (x)'\,dx = dx \\ dv = \sin 3x dx, & v = \int \sin 3x dx = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| = x\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) +$$

$$+\frac{1}{3}\int \cos 3x dx = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

г) $$\int x^2\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2, & du = (x^2)'\,dx = 2x dx \\ dv = \cos x dx, & v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = x^2\sin x - 2\int x\sin x dx.$$

Как видим, применение формулы позволило понизить на единицу степень x. К оставшемуся интегралу еще раз применим данный метод:

$$\int x\sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = (x)'\,dx = dx \\ dv = \sin x dx, & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C_1.$$

Окончательно получим:

$$\int x^2\cos x dx = x^2\sin x - 2(-x\cos x + \sin x + C_1) = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

2. ***Интегралы вида*** $\int P(x)\log_a x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$.

Для этих интегралов за u следует выбирать соответственно функции $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\,x$, $\mathrm{arcctg}\,x$. При этом $dv = P(x)dx$.

Пример 2.3.2. Вычислить интегралы:

а) $\int x^2 \ln x\,dx$; б) $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$; в) $\int \ln^2 x\,dx$; г) $\int \arcsin 2x\,dx$.

Решение

а) Положим $u = \ln x$, $dv = x^2dx$. Тогда $du = (\ln x)'\,dx = \frac{dx}{x}$, $v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}$.

Подставим данные в правую часть формулы интегрирования по частям:
$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

б)
$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{arctg}\,x, & du = (\mathrm{arctg}\,x)'\,dx = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\cdot \mathrm{arctg}\,x -$$
$$-\int \frac{x^2}{2}\cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{1+x^2}.$$

Пришли к интегралу, для вычисления которого разложим подынтегральную функцию на слагаемые:
$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2}\,dx - \int\frac{1}{1+x^2}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= x - \mathrm{arctg}\,x + C_1.$$

Тогда исходный интеграл равен:
$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}(x - \mathrm{arctg}\,x + C_1) = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x +$$
$$+C = \frac{1}{2}(x^2+1)\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}x + C.$$

в) В подынтегральной функции $P(x) = 1$, поэтому выберем $u = \ln^2 x$, $dv = 1\cdot dx = dx$.

Будем иметь:

$$\int \ln^2 x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x, & du = \left(\ln^2 x\right)' dx = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx \\ dv = dx, & v = \int dx = x \end{matrix} \right| = x\ln^2 x - 2\int x \cdot \frac{\ln x}{x}dx =$$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x dx .$$

Полученный интеграл еще раз проинтегрируем по частям:

$$\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \left(\ln x\right)' dx = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = \int dx = x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + C_1 .$$

Искомый интеграл равен:

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - x + C_1\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C =$$

$$= \left(\ln x - 2\right) \cdot x\ln x + 2x + C .$$

г) $$\int \arcsin 2x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin 2x, & du = \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}dx \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = x\arcsin 2x -$$

$$-\int x \cdot \frac{2dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = x\arcsin 2x - 2\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} .$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} = \left| \begin{matrix} 1-4x^2 = t \\ -8xdx = dt \end{matrix} \right| = -\frac{1}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{t} + C_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C_1 .$$

Окончательно будем иметь:

$$\int x\arcsin 2xdx = x\arcsin 2x - 2\left(-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C_1\right) = x\arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C.$$

3. ***Интегралы вида*** $\int e^{\alpha x}\sin \beta x dx$, $\int e^{\alpha x}\cos \beta x dx$, где α, β – действительные числа.

Интегралы этого типа интегрируют по частям дважды. При первом интегрировании безразлично, как разбивать подынтегральное выражение на сомножители, а при повторном интегрировании в качестве $\boldsymbol{u}$ нужно принять ту же функцию, что и вначале. В результате получают линейное уравнение относительно искомого интеграла, решая которое находят интеграл.

Пример 2.3.3. Вычислить интегралы:

а) $\int e^{2x}\cos x\,dx$; б) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

Решение

а) $\int e^{2x}\cos x\,dx = \begin{vmatrix} u=e^{2x}, & du=2e^{2x}dx \\ dv=\cos x dx, & v=\sin x \end{vmatrix} = e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x dx$.

К полученному интегралу снова применим формулу интегрирования по частям, обозначив $\begin{vmatrix} u=e^{2x}, & du=2e^{2x}dx \\ dv=\sin x dx, & v=-\cos x \end{vmatrix}$. Тогда будем иметь:

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x + 2\int \cos x e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x -$$

$$-4\int e^{2x}\cos x\,dx.$$

То есть $\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int e^{2x}\cos x\,dx$.

Перенося искомый интеграл в левую часть, получим:

$5\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x + C_1$, откуда

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{5}\left(e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x + C_1\right) = \frac{1}{5}e^{2x}\left(\sin x + 2\cos x\right) + C.$$

б) Покажем вычисление интеграла при любых значениях a и b, отличных от нуля.

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \begin{vmatrix} u=e^{ax}, & du=ae^{ax}dx \\ dv=\sin bx dx, & v=-\frac{1}{b}\cos bx \end{vmatrix} = -e^{ax}\cdot\frac{1}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u=e^{ax}, & du=ae^{ax}dx \\ dv=\cos bx dx, & v=\frac{1}{b}\sin bx \end{vmatrix} = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left[e^{ax}\cdot\frac{1}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx dx.$$

Введем обозначение $I = \int e^{ax}\sin bx\,dx$ и решим уравнение относительно неизвестного интеграла I:

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\cdot I;$$

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot I = \frac{e^{ax}}{b^2}\left(-b\cos bx + a\sin bx\right); \quad \left(b^2+a^2\right)\cdot I = e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right);$$

$$I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx-b\cos bx\right) \text{ или } \int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx-b\cos bx\right).$$

Методом интегрирования по частям можно вычислить и некоторые другие интегралы. Покажем несколько примеров.

Пример 2.3.4. Вычислить интегралы:

а) $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$; б) $\int\cos\ln x dx$; в) $\int\sqrt{x^2+4}\,dx$.

Решение

а) $$\int\frac{xdx}{\sin^2 x}=\left|\begin{matrix} u=x, & du=\left(x\right)'dx=dx \\ dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x}, & v=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x\end{matrix}\right|=-x\operatorname{ctg}x+\int\operatorname{ctg}xdx=$$

$$=-x\operatorname{ctg}x+\ln\left|\sin x\right|+C.$$

б) $$\int\cos\ln x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\cos\ln x, & du=-\dfrac{\sin\ln x}{x}dx \\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right|=x\cos\ln x+\int x\cdot\frac{\sin\ln x}{x}dx=$$

$$=x\cos\ln x+\int\sin\ln xdx=\left|\begin{matrix} u=\sin\ln x, & du=\dfrac{\cos\ln x}{x}dx \\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right|=x\cos\ln x+x\sin\ln x-$$

$$-\int x\cdot\frac{\cos\ln x}{x}dx==x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int\cos\ln xdx.$$

Пришли к исходному интегралу, который найдем из уравнения:

$\int\cos\ln xdx=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int\cos\ln xdx$. Имеем:

$$2\int\cos\ln xdx=x\cos\ln x+x\sin\ln x\Rightarrow\ \int\cos\ln xdx=\frac{1}{2}x\left(\cos\ln x+\sin\ln x\right)+C.$$

<u>Замечание.</u> В данном интеграле можно было сначала выполнить подстановку $\ln x=t$, поле чего проинтегрировать по частям.

б) $$\int\sqrt{x^2+4}\,dx=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{x^2+4}, du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+4}} \\ dv=dx, \qquad v=x\end{matrix}\right|=x\sqrt{x^2+4}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}}=x\sqrt{x^2+4}-$$

$$-\int \frac{\left(x^2+4\right)-4}{\sqrt{x^2+4}}dx = x\sqrt{x^2+4} - \int \frac{\left(x^2+4\right)}{\sqrt{x^2+4}}dx - \int \frac{-4}{\sqrt{x^2+4}}dx = x\sqrt{x^2+4} -$$

$$-\int \sqrt{x^2+4}\,dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = x\sqrt{x^2+4} - \int \sqrt{x^2+4}\,dx + 4\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|.$$

Получим уравнение:

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = x\sqrt{x^2+4} - \int \sqrt{x^2+4}\,dx + 4\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|,$$ откуда

$$2\int \sqrt{x^2+4}\,dx = x\sqrt{x^2+4} + 4\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|,$$

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить интегралы:

1. $\int (2x-5)e^{-3x}dx$. 2. $\int x\cdot 5^{-x}dx$. 3. $\int (4-x)\cos 5x dx$.

4. $\int \mathrm{arctg}\, 3x dx$. 5. $\int \log_2 4x\, dx$. 6. $\int \frac{\ln x\, dx}{x^3}$.

7. $\int \arccos\frac{x}{4}dx$. 8. $\int x^2 \sin x\, dx$. 9. $\int e^{2x}\sin 5x\, dx$.

10. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$. *Указание*: принять $u = x, dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

11. $\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$. *Указание*: $\sqrt[3]{x} = t \to \int t\,\mathrm{arctg}\, t\, dt$.

2.4. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен ax^2+bx+c в знаменателе

1. Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводятся к табличным путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене.

Пример 2.4.1. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$; б) $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+7x-3x^2}}$.

Решение

а) На основании формулы $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ выделим в знаменателе полный квадрат:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2\cdot 3x+3^2\right)-3^2+25} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+16}.$$

Полученный интеграл является табличным. Найдем его, используя формулу **12**, заменив x на $(x+3)$:

$$\int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \frac{1}{\sqrt{16}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{16}} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4} + C.$$

б) Преобразуем знаменатель дроби аналогично предыдущему примеру:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x-3} = \int \frac{dx}{\left(x^2-2x\cdot 1+1^2\right)-1^2-3} = \int \frac{dx}{(x-1)^2-4} = \frac{1}{2\sqrt{4}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{4}}{x-1+\sqrt{4}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C.$$

При вычислении интеграла была использована формула **13** таблицы интегралов, в которой x заменен на $(x-1)$.

в) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+2x\cdot 2+2^2\right)-2^2+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} =$$

$$= \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}\right| + C.$$

Выделение полного квадрата позволило привести данный интеграл к табличному интегралу **16**.

г) Вынесем коэффициент при x^2 из-под корня, а затем выделим полный квадрат.

$$\sqrt{5+7x-3x^2} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}x-x^2} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{5}{3}+2\cdot\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2-\left(\frac{7}{6}\right)^2-x^2} =$$

$$= \sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{5}{3}+\frac{49}{36}-\left(x^2-2\cdot\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2\right)} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{109}{36}-\left(x-\frac{7}{6}\right)^2}.$$

Тогда интеграл примет вид табличного интеграла **15**:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5+7x-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{109}{36}-\left(x-\frac{7}{6}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-7/6}{\sqrt{109/36}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x-7}{\sqrt{109}}+C.$$

2. Для интегралов $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ и $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ следует образовать в числителе производную знаменателя, затем разбить на сумму двух интегралов, первый из которых с помощью замены переменной, а второй − выделением полного квадрата сведутся к табличным интегралам.

Пример 2.4.2. Вычислить интегралы:

а) $\int\frac{x-4}{x^2+6x+25}dx$; б) $\int\frac{xdx}{\sqrt{4x^2-12x+1}}$.

Решение

а) Найдем производную знаменателя подынтегральной функции $\left(x^2+6x+25\right)'=2x+6$. Теперь преобразуем числитель так, чтобы из него можно было выделить выражение $2x+6$, а затем разобьем данный интеграл на сумму двух интегралов.

$$\int\frac{x-4}{x^2+6x+25}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-8}{x^2+6x+25}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6-14}{x^2+6x+25}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{x^2+6x+25}dx-$$

$$-7\int\frac{dx}{x^2+6x+25}=I_1+I_2.$$

К первому интегралу применим метод замены переменной, а ко второму − выделение полного квадрата.

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{x^2+6x+25}dx=\left|\begin{matrix}x^2+6x+25=t\\ (2x+6)dx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C_1=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+6x+25\right)+C_1;$$

$$I_2=7\int\frac{dx}{x^2+6x+25}=7\int\frac{dx}{x^2+2x\cdot3+3^2-3^2+25}=7\int\frac{dx}{(x+3)^2+16}=$$

$$=7\frac{1}{\sqrt{16}}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{} = 7\cdot\frac{1}{\sqrt{16}}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{16}}+C_2=\frac{7}{4}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{4}+C_2.$$

Тогда $\int\frac{x-4}{x^2+6x+25}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+6x+25\right)+\frac{7}{4}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{4}+C$.

б) Производная знаменателя $\left(4x^2-12x+1\right)'=8x-12$. Выполним преобразования:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{4x^2-12x+1}}=\frac{1}{8}\int\frac{\left(8x-12\right)+12}{\sqrt{4x^2-12x+1}}dx=\frac{1}{8}\int\frac{8x-12}{\sqrt{4x^2-12x+1}}dx+$$

$$+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-12x+1}}=I_1+I_2.$$

Аналогично предыдущему примеру вычислим оба интеграла.

$$I_1=\frac{1}{8}\int\frac{8x-12}{\sqrt{4x^2-12x+1}}dx=\left|\begin{array}{l}4x^2-12x+1=t\\ \left(8x-12\right)dx=dt\end{array}\right|=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{8}\cdot2\sqrt{t}+C_1=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2-12x+1}+C_1;$$

$$I_2=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-12x+1}}=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+\frac{1}{4}}}=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}=$$

$$=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2}}=\frac{3}{4}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2}\right|+C_2.$$

Тогда $\int\frac{xdx}{\sqrt{4x^2-12x+1}}=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2-12x+1}+\frac{3}{4}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2}\right|+C$.

3. В интегралах вида $\int\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx$ выполняют аналогичные предыдущему случаю преобразования и разбивают на два интеграла, один из которых находят подстановкой $x^2+px+q=t$, другой − с помощью

подстановки $x+\frac{p}{2}=t$ приводят к виду $\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}$ и вычисляют по ***рекуррентной формуле***: $I_{m+1}=\frac{t}{2ma^2\left(t^2+a^2\right)^m}+\frac{2m-1}{2ma^2}I_m \quad \left(m\geq 1\right)$.

Пример 2.4.3. Вычислить интеграл $\int\frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx$.

Решение

Производная трехчлена в знаменателе $\left(x^2+2x+3\right)'=2x+2$. Тогда $x-1=\frac{1}{2}\left(2x+2\right)-2$. Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int\frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx-2\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=I_1-I_2.$$

Вычислим каждый из интегралов.

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx=\left|\begin{matrix}x^2+2x+3=t\\ \left(2x+2\right)dx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int t^{-2}dt=-\frac{1}{2t}+C_1=$$

$$=-\frac{1}{2\left(x^2+2x+3\right)}+C_1.$$

$$I_2=2\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=2\int\frac{dx}{\left(\left(x+1\right)^2+2\right)^2}=\left|\begin{matrix}x+1=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=2\int\frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2}.$$

Найдем полученный интеграл, используя рекуррентную формулу.

При $m=1$: $\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C$.

Тогда при $m=2$: $\int\frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2}=\frac{t}{4\left(t^2+2\right)}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=\frac{t}{4\left(t^2+2\right)}+$

$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C$. То есть $I_2=\frac{x+1}{2\left(x^2+2x+3\right)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C_2$.

Окончательно имеем:

$$\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx = -\frac{1}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{x+1}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= -\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

4. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\left(x-\alpha\right)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ с помощью подстановки $x-\alpha=\frac{1}{t}$ приводятся к рассмотренным выше интегралам $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Пример 2.4.4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\left(x-2\right)\sqrt{-3+4x-x^2}}$.

Решение

Положим $x-2=\frac{1}{t}$, тогда $x=\frac{1+2t}{t}$ и $dx=-\frac{dt}{t^2}$. Получим интеграл

$$\int \frac{dx}{\left(x-2\right)\sqrt{-3+4x-x^2}} = -\int \frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\sqrt{-3+\frac{4\left(1+2t\right)}{t}-\left(\frac{1+2t}{t}\right)^2}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{-3+\frac{4+8t}{t}-\frac{1+4t+4t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{-3t^2+t\left(4+8t\right)-\left(1+4t+8t^2\right)}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C = -\ln\left|\frac{1}{x-2}+\sqrt{\frac{1}{\left(x-2\right)^2}-1}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{-3+4x-x^2}}{x-2}\right| + C = \ln\left|\frac{x-2}{1+\sqrt{-3+4x-x^2}}\right| + C.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$.
2. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$.
3. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$.
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$.   8. $\int \frac{xdx}{x^2+8x+20}$.   9. $\int \frac{x-2}{x^2+9}dx$.

10. $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+6}dx$.   11. $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$.   12. $\int \frac{11-8x}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$.

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.   14. $\int \frac{x+1}{(x+3)\sqrt{x^2+4x+5}}dx$.

2.5. Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется отношение двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ степени n и m соответственно:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m},\quad (a_0\neq 0, b_0\neq 0).$$

Если $n<m$, то дробь называется правильной, если $n\geq m$ − неправильной. Так, дробь $\frac{x^2+2x-1}{x^3-8}$ является правильной, а дроби $\frac{x^3+3x^2-5}{x-4}$ и $\frac{x^2+2}{3x^2-2x+1}$ − неправильные.

В случае неправильной дроби необходимо разделить многочлен числителя на многочлен знаменателя, чтобы выделить целую часть, то есть получить сумму целой рациональной функции и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}, \text{ где}$$

$M(x)$ − неполное частное от деления, $R(x)$ − остаток от деления.

Пример 2.5.1. Выделить целую часть в неправильной дроби:

а) $\frac{x^4+3x^3-7x^2+10x-8}{x+5}$;   б) $\frac{x^4+3}{x^2-2x}$.

Решение

а) Разделим многочлен числителя на многочлен знаменателя:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+3x^3-7x^2+10x-8 & x+5 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^4+5x^3\qquad\qquad\qquad} & x^3-2x^2+3x-5 \\
-2x^3-7x^2\qquad\quad\; & \\
-\underline{-2x^3-10x^2\qquad\quad\;} & \\
-3x^2+10x\quad\; & \\
-\underline{-3x^2+15x\quad\;} & \\
-5x-8 & \\
-\underline{-5x-25} & \\
17 &
\end{array}
$$

Получили: $M(x)=x^3-2x^2+3x-5$ – целая часть, $R(x)=17$ – остаток от деления.

Тогда исходная дробь может быть представлена в виде:

$$\frac{x^4+3x^3-7x^2+10x-8}{x+5}=x^3-2x^2+3x-5+\frac{17}{x+5}.$$

Заметим, что дробь $\dfrac{17}{x+5}$ уже является правильной.

б) Так как многочлен в числителе не содержит третьей, второй и первой степени x, то для удобства выполнения деления запишем его в виде $x^4+3=x^4+0x^3+0x^2+0x+3$. Получим:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+0x^3+0x^2+0x+3 & x^2-2x \\ \cline{2-2}
-\underline{x^4-2x^3\qquad\qquad\qquad} & x^2+2x+4 \\
2x^3+0x^2\qquad\quad\; & \\
-\underline{2x^3-4x^2\qquad\quad\;} & \\
4x^2+0x\quad\; & \\
-\underline{4x^2-8x\quad\;} & \\
8x+3 &
\end{array}
$$

Исходная дробь представима в виде:

$$\frac{x^4+3}{x^2-2x}=x^2+2x+4+\frac{8x+3}{x^2-2x},$$

где $\dfrac{8x+3}{x^2-2x}$ – правильная рациональная дробь.

Займемся теперь интегрированием правильной рациональной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$. Для этого необходимо:

1) разложить многочлен $Q(x)$ на линейные множители $(x-x_i)^{k_i}$, отвечающие его действительным корням x_i кратности k_i, и квадратичные множители $\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{m_j}$, где $p^2-4q<0$, отвечающие его комплексным корням кратности m_j:

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_2}\ldots, \quad (2.5.1)$$

где p,q – действительные, а n,m – целые неотрицательные числа;

2) разложить дробь на сумму дробей вида $\dfrac{A}{(x-x_i)^{k_i}}$ или $\dfrac{Bx+C}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{m_j}}$, называемых ***простейшими***, следующим образом:

- для каждого множителя в разложении (2.5.1) записать столько простейших дробей, какова его кратность;

- знаменателями каждой дроби будут все степени этого множителя, начиная с первой и заканчивая той степенью, которую этот множитель имеет в разложении;

- числителями этих дробей будут служить либо постоянные $A_1, A_2, \ldots$ (в случае действительных корней знаменателя) либо линейные функции $B_1x+C_1,\ B_2x+C_2, \ldots$ (когда знаменатель имеет комплексные корни).

Таким образом, получим:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\cdots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1}+$$

$$+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{B_{m_1}x+C_{m_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}}+\cdots, \quad (2.5.2)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_{k_1}, \ldots, B_1, B_2, \ldots, B_{m_1}, C_1, C_2, \ldots, C_{m_1}, \ldots$ – неопределенные коэффициенты.

3) найти эти коэффициенты, используя метод неопределенных коэффициентов или метод частных значений.

Суть ***метода неопределенных коэффициентов*** состоит в том, что правую часть равенства (2.5.2) следует привести к общему знаменателю, который равен многочлену $Q(x)$. Получим две равные дроби с одинаковыми знаменателями, значит, многочлены в их числителях тождественно равны. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и в правой частях этого тождества, приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения искомых коэффициентов.

При нахождении коэффициентов ***методом частных значений*** в равенство тождественных многочленов числителей необходимо подставлять любые значения x столько раз, сколько коэффициентов предстоит определить. При этом вычисления значительно упрощаются, если переменной x придавать значения действительных корней знаменателя.

Замечание. На практике удобно сначала найти все возможные коэффициенты метод ом частных значений, а для отыскания остальных использовать метод неопределенных коэффициентов, комбинируя оба способа.

4) теперь остается вычислить $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ как сумму интегралов от найденных простейших дробей следующих типов:

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$.

II. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A \cdot \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$.

III. $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$.

IV. $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx$.

Замечание. Вычисление интегралов **III** и **IV** типа подробно рассмотрено в пункте **2.4** (см. примеры **2.4.2.** и **2.4.3.**).

Пример 2.5.2. Представить дроби в виде суммы простейших дробей:

а) $\frac{x^2+3x}{x(x+5)(x-3)}$; б) $\frac{x^2-3x+6}{(x-3)^2(x+2)^3}$; в) $\frac{5x^3-6x+7}{x(x-3)(x^2+5)}$;

г) $\dfrac{3x^2-4x+5}{x^3(x+2)(x^2+1)}$; д) $\dfrac{5x^2-6x+7}{(x^2+3)(x^2+2x+6)}$; е) $\dfrac{x^3+x^2+x}{(x-4)(x^2+8)^2}$.

Решение

а) Знаменатель дроби представляет собой произведение трех множителей, отвечающих его однократным действительным корням $x=0, x=-5, x=3$. Тогда в разложении дроби на сумму простейших надо записать три дроби со знаменателями $x, x+5, x-3$ и числителями A, B, C:

$$\frac{x^2+3x}{x(x+5)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+5}+\frac{C}{x-3}.$$

б) Знаменатель имеет два корня: $x=3$ кратности 2 и $x=-2$ кратности 3. Значит, сумма будет включать 5 дробей со знаменателями $x-3,(x-3)^2$, $x+2,(x+2)^2,(x+2)^3$. Так как все корни – действительные числа, то числителями дробей будут служить постоянные A, B, C, D, E. Получим:

$$\frac{x^2-3x+6}{(x-3)^2(x+2)^3}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{E}{(x+2)^3}.$$

в) Сумма будет содержать три дроби со знаменателями $x, x-3, x^2+5$. Первые две имеют действительные корни знаменателя $x=0$ и $x=3$, поэтому их числителями будут служить постоянные A, B. Знаменатель x^2+5 имеет пару сопряженных комплексных корней, поэтому в числитель третьей дроби запишем линейную функцию $Cx+D$. Будем иметь:

$$\frac{5x^3-6x+7}{x(x-3)(x^2+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{Cx+D}{x^2+5}.$$

г) Имеем действительные корни знаменателя $x=0$ кратности 3 и $x=-2$ кратности 1, а так же пару сопряженных комплексных корней множителя x^2+1. Запишем разложение:

$$\frac{3x^2-4x+5}{x^3(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}.$$

д) Знаменатель имеет две пары комплексных корней кратности 1. Заметим, что многочлен x^2+2x+6 не раскладывается на линейные множители. В этом случае получим:

$$\frac{5x^2-6x+7}{\left(x^2+3\right)\left(x^2+2x+6\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+6}.$$

е) Знаменатель имеет один действительный корень $x=4$ и пару сопряженных комплексных корней кратности **2**. Получим представление в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^3+x^2+x}{(x-4)\left(x^2+8\right)^2}=\frac{A}{x-4}+\frac{Bx+C}{x^2+8}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+8\right)^2}.$$

Пример 2.5.3. Вычислить интегралы:

а) $\int\frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$; б) $\int\frac{dx}{x^2-6x+5}$; в) $\int\frac{3x-1}{x^2-4x-12}dx$;

г) $\int\frac{2x-1}{x^3+4x^2-5x}dx$; д) $\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$; е) $\int\frac{x^3dx}{x^2+2x+1}$;

ж) $\int\frac{x^2+5x-2}{x^3+x^2-x-1}dx$; з) $\int\frac{2x+1}{x^3+x}dx$; и) $\int\frac{x^3+x^2-4x+1}{x^4+2x^2+1}dx$.

Решение

а) Дробь $\frac{x}{(x+1)(2x+1)}$ является правильной. Разложим ее на сумму простейших дробей: $\frac{x}{(x+1)(2x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+1}$. Умножив обе части равенства на общий знаменатель, получим: $x=A(2x+1)+B(x+1)$.

Найдем коэффициенты A и B ***методом частных значений***, придавая x значения корней знаменателя: $x=-1$ и $x=-\frac{1}{2}$. При $x=-1$ получим: $-1=A(2\cdot(-1)+1)+B(-1+1)$, откуда $-1=-A\Rightarrow A=1$. Подставляя $x=-\frac{1}{2}$, найдем B: $-\frac{1}{2}=A\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)+B\left(-\frac{1}{2}+1\right)$, откуда $-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}B\Rightarrow B=-1$.

Коэффициенты A и B можно найти и ***методом неопределенных коэффициентов***. Для этого в равенстве $x=A(2x+1)+B(x+1)$ раскроем скобки и сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями x:

$$x = A(2x+1) + B(x+1) = 2Ax + A + Bx + B = (2A+B)x + (A+B).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях, получим систему уравнений: $\begin{cases} 1 = 2A + B, \\ 0 = A + B, \end{cases}$ из которой найдем $A = 1,\ B = -1$.

Таким образом, разложение дроби на простейшие имеет вид: $\dfrac{x}{(x+1)(2x+1)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2x+1}$.

Осталось проинтегрировать полученную сумму:

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{2x+1} = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C = \ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\right| + C.$$

б) Разложим знаменатель подынтегральной дроби на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни трехчлена.

Корнями трехчлена $x^2 - 6x + 5$ являются числа $x_1 = 1, x_2 = 5$. Тогда $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$.

Разложим дробь $\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5}.$$

Тогда $1 = A(x-5) + B(x-1)$. Для определения коэффициентов A и B используем частные значения x: 1 и 5.

$$\begin{array}{l|l} x = 1 & 1 = -4A,\ A = -\dfrac{1}{4}, \\[2ex] x = 5 & 1 = 4B,\ B = \dfrac{1}{4}. \end{array}$$

Значит, $\dfrac{1}{(x-1)(x-5)} = \dfrac{-1/4}{x-1} + \dfrac{1/4}{x-5} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-5} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

Следовательно, интеграл равен:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{4}\left(\ln|x-5| - \ln|x-1|\right) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C.$$

в) Представим подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{3x-1}{x^2-4x-12}=\frac{3x-1}{(x+2)(x-6)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-6}.$$

Найдем коэффициенты A и B из равенства $3x-1=A(x-6)+B(x+2)$.

$$\begin{array}{l|l} x=-2 & -8=-8A,\ A=1, \\ x=6 & 16=8B,\ B=2. \end{array}$$

Итак, данный интеграл равен:

$$\int\frac{3x-1}{x^2-4x-12}dx=\int\frac{1}{x+2}dx+\int\frac{2}{x-6}dx=\int\frac{dx}{x+2}+2\int\frac{dx}{x-6}=\ln|x+2|+$$

$$-2\ln|x-6|+C=\ln\frac{|x+2|}{(x-6)^2}+C.$$

Заметим, что интегралы б) и в) можно вычислить выделением полного квадрата в знаменателе (см. примеры **2.4.1** и **2.4.2.**).

г) Разложим знаменатель подынтегральной дроби на множители и представим дробь в виде суммы простейших дробей:

$$x^3+4x^2-5x=x\left(x^2+4x-5\right)=x(x+5)(x-1).$$

$$\frac{2x-1}{x^3+4x^2-5x}=\frac{2x-1}{x(x+5)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+5}+\frac{C}{x-1}.$$

Тогда $2x-1=A(x+5)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+5)$. Для определения коэффициентов A, B, C используем значения корней знаменателя:

$$\begin{array}{l|l} x=0 & -1=-5A\Rightarrow A=\frac{1}{5}, \\ x=1 & 1=6C\Rightarrow C=\frac{1}{6}, \\ x=-5 & -11=30B\Rightarrow B=-\frac{11}{30}. \end{array}$$

Итак, $\displaystyle\frac{2x-1}{x^3+4x^2-5x}=\frac{1/5}{x}+\frac{-11/30}{x+5}+\frac{1/6}{x-1}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x}-\frac{11}{30}\cdot\frac{1}{x+5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1}.$

Искомый интеграл равен:

$$\int\frac{2x-1}{x^3+4x^2-5x}dx=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x}-\frac{11}{30}\int\frac{dx}{x+5}+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{11}{30}\ln|x+5|+$$

$$+\frac{1}{6}\ln|x-1|+C=\frac{6}{30}\ln|x|-\frac{11}{30}\ln|x+5|+\frac{5}{30}\ln|x-1|+C=\ln\sqrt[30]{\frac{x^6(x-1)^5}{(x+5)^{11}}}+C.$$

д) Разложение подынтегральной дроби на сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+3}.$$

Так как знаменатель имеет только два различных действительных корня ($x=1$ и $x=-3$), метод частных значений позволит нам найти только два из четырех неизвестных коэффициентов. Остальные вычислим, применяя метод неопределенных коэффициентов.

$$x^2+1=A(x-1)^2(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x+3)+D(x-1)^3=$$

$$=A\left(x^3+x^2-5x+3\right)+B\left(x^2+2x-3\right)+C(x+3)+D\left(x^3-3x^2+3x-1\right)=$$

$$=(A+D)x^3+(A+B-3D)x^2+(-5A+2B+C+3D)x+(3A-3B+3C-D).$$

$x=1$	$2=4C\Rightarrow C=\frac{1}{2}$,
$x=-3$	$10=-64D\Rightarrow D=-\frac{5}{32}$,
x^3	$0=A+D\Rightarrow A=-D=\frac{5}{32}$,
x^2	$1=A+B-3D\Rightarrow B=1-A+3D=1-\frac{5}{32}-\frac{15}{32}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}.$

Искомый интеграл:

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx=\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}-\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=\frac{5}{32}\ln|x-1|+\frac{3}{8}\cdot\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^{-2}}{-2}-\frac{5}{32}\ln|x+3|+C=\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|-$$

$$-\frac{3}{8(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)^2}+C.$$

е) Данная подынтегральная дробь − неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, разделив числитель дроби на ее знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^3+0x^2+0x+0 \\ x^3+2x^2+x \end{array} & \begin{array}{l} x^2+2x+1 \\ \hline x-2 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{l} -2x^2-x+0 \\ -2x^2-4x-2 \end{array} & \\ \hline 3x+2 & \end{array}$$

Получим: $\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}=x-2+\dfrac{3x+2}{x^2+2x+1}$.

Теперь интеграл можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$\int\frac{x^3dx}{x^2+2x+1}=\int(x-2)dx+\int\frac{3x+2}{x^2+2x+1}dx=I_1+I_2.$$

$I_1=\int(x-2)dx=\dfrac{x^2}{2}-2x+C_1$. Чтобы вычислить второй интеграл, разложим дробь $\dfrac{3x+2}{x^2+2x+1}$ на сумму простейших дробей.

$$\frac{3x+2}{x^2+2x+1}=\frac{3x+2}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2},\quad 3x+2=A+B(x+1)=Bx+(A+B).$$

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & -3+2=A\Rightarrow A=-1\ , \\ x^1 & 3=B\Rightarrow B=3. \end{array}$$

Тогда

$$I_2=\int\frac{3x+2}{x^2+2x+1}=\int\frac{-1}{(x+1)^2}dx+\int\frac{3}{x+1}dx=-1\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+3\ln|x+1|+C_2=$$

$$=\frac{1}{x+1}+3\ln|x+1|+C_2.$$

Окончательно: $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{x^2+2x+1}=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{x+1}+3\ln|x+1|+C$.

ж) Подынтегральная дробь – правильная. Разложим на множители ее знаменатель:

$$x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x^2-1)(x+1)=(x-1)(x+1)^2.$$

Тогда $\dfrac{x^2+5x-2}{x^3+x^2-x-1}=\dfrac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}$.

Разложим полученную дробь на простейшие:

$$\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}, \text{ откуда}$$

$$x^2+5x-2=A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1).$$

$x=1$	$4=4A\Rightarrow A=1$,
$x=-1$	$-6=-2C\Rightarrow C=3$,
x^2	$1=A+B\Rightarrow B=1-A=1-1=0$.

Искомый интеграл:

$$\int\frac{x^2+5x-2}{x^3+x^2-x-1}dx=\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\ln|x-1|-\frac{3}{x+1}+C.$$

з) Разложим знаменатель дроби на множители: $x^3+x=x\left(x^2+1\right)$. Видим, что знаменатель имеет один действительный корень $x_1=0$ и пару сопряженных комплексных корней $x_{2,3}=\pm i$. Поэтому разложение дроби на сумму простейших имеет вид:

$$\frac{2x+1}{x^3+x}=\frac{2x+1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}, \text{ откуда}$$

$$2x+1=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)x=Ax^2+A+Bx^2+Cx=(A+B)x^2+Cx+A.$$

$x=0$	$1=A,$
x^2	$0=A+B\Rightarrow B=-A=-1,$
x^1	$2=C.$

Тогда $\int\frac{2x+1}{x^3+x}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{-x+2}{x^2+1}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{2}{x^2+1}dx=\int\frac{dx}{x}-$

$$=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+2\int\frac{dx}{x^2+1}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+2\operatorname{arctg}x+C.$$

и) Знаменатель дроби $x^4+2x^2+1=\left(x^2+1\right)^2$ имеет двукратный комплексный корень, поэтому разложение дроби на простейшие принимает вид:

$$\frac{x^3+x^2-4x+1}{x^4+2x^2+1}=\frac{x^3+x^2-4x+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$$x^3+x^2-4x+1=(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D=Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D=$$

$$=Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 1=A, \\ x^2 & 1=B, \\ x^1 & -4=A+C\Rightarrow C=-4-A=-5, \\ x^0 & 1=B+D\Rightarrow D=1-B=0. \end{array}$$

То есть $\displaystyle\int\frac{x^3+x^2-4x+1}{x^4+2x^2+1}dx=\int\frac{x+1}{x^2+1}dx+\int\frac{-5x}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}-$

$$-5\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{\frac{1}{2}d(x^2+1)}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x-5\int\frac{\frac{1}{2}d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x-$$

$$-\frac{5}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+\frac{5}{2(x^2+1)}+C.$$

Задания для самостоятельной работы

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$.
2. $\displaystyle\int\frac{xdx}{2x^2-2x+3}$.
3. $\displaystyle\int\frac{(x-2)dx}{x^3-4x^2+3x}$.
4. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x-1)}$.
5. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)}$.
6. $\displaystyle\int\frac{(x^2-6x+2)dx}{x^3-4x^2+4x}$.
7. $\displaystyle\int\frac{x^5+2x^4+3}{x^2-1}dx$.
8. $\displaystyle\int\frac{(x^3+1)dx}{x^2+4x}$.
9. $\displaystyle\int\frac{(x^2+3x-4)dx}{x^3+2x}$.
10. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-x^2}$.
11. $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^3-1}$.
12. $\displaystyle\int\frac{x-4}{x^3+x^2+x}dx$.
13. $\displaystyle\int\frac{x-3}{x^3-4x^2}dx$.
14. $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^4-16}dx$.
15. $\displaystyle\int\frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}$.
16. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+6x^2+8}$.
17. $\displaystyle\int\frac{x^3-2x}{(x^2+4)^2}dx$.
18. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$.

2.6. Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических

Интегралы от тригонометрических функций во многих случаях можно рационализировать путем введения различных подстановок или существенно упростить с помощью формул тригонометрии (см. приложение 3). Заметим, что интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Многие из них вообще не вычисляются аналитически. Рассмотрим функции, которые могут быть всегда проинтегрированы.

1. ***Интегралы вида*** $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ − функция, рациональная относительно $\sin x$, $\cos x$, приводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента с помощью ***универсальной тригонометрической подстановки*** $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. При этом подынтегральное выражение необходимо преобразовать, используя известные формулы тригонометрии: $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

Пример 2.6.1. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+3\cos x}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x + 5\cos x + 5}$.

Решение

а) Подынтегральная функция рационально зависит от $\cos x$. Введем подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. При этом $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Подставляя, получим:

$$\int \frac{dx}{5+3\cos x} = \int \frac{1}{5+3\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{2dt}{5(1+t^2)+3(1-t^2)} = 2\int \frac{dt}{2t^2+8} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

б) Подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x, \cos x$. Тогда

$$\int \frac{dx}{2\sin x + 5\cos x + 5} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{4t}{1+t^2} + \frac{5\left(1-t^2\right)}{1+t^2} + 5\right)} = 2\int \frac{dt}{4t + 5\left(1-t^2\right) + 5\left(1+t^2\right)} = 2\int \frac{dt}{4t+10} =$$

$$= \int \frac{dt}{2t+5} = \frac{1}{2}\ln\left|2t+5\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 5\right| + C.$$

На практике такая подстановка часто приводит к громоздким вычислениям, поэтому применяется только тогда, когда нельзя применить другие подстановки, вид которых зависит от функции $R\left(\sin x, \cos x\right)$. Рассмотрим возможные случаи.

а) Если $R\left(\sin x, \cos x\right)$ − четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R\left(-\sin x, -\cos x\right) = R\left(\sin x, \cos x\right)$, то подстановка $\operatorname{tg} x = t$ преобразует исходный интеграл в интеграл от рациональной функции аргумента t. При этом используют формулы тригонометрии: $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Пример 2.6.2. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x - 3\sin^2 x}$.

Решение

а) Так как подынтегральная функция четная относительно $\sin x$, то применим подстановку $\operatorname{tg} x = t$, откуда $x = \operatorname{arctg} t, \ dx = \frac{dt}{1+t^2}, \ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$. Будем иметь:

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2 - \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(2 - \frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{2\left(1+t^2\right) - t^2} = \int \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

б) Подынтегральная функция четная относительно $\sin x$ и $\cos x$.

$$\int\frac{dx}{2\cos^2 x-3\sin^2 x}=\left|\begin{matrix}\operatorname{tg}x=t,\ x=\operatorname{arctg}t,\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{2\cdot\dfrac{1}{1+t^2}-3\cdot\dfrac{t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\dfrac{2}{1+t^2}-\dfrac{3t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{2-3t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}t+\sqrt{2}}{\sqrt{3}t-\sqrt{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}x-\sqrt{2}}\right|+C.$$

б) Если $R(\sin x,\cos x)$ − нечетная функция относительно $\sin x$, т.е. $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то вводят подстановку $\cos x=t$.

Пример 2.6.3. Вычислить интегралы:

а) $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$; б) $\int\frac{2-\cos^2 x}{2\cos^2 x-1}\sin x\,dx$.

Решение

а) Подынтегральная функция нечетная относительно $\sin x$. Применим подстановку $\cos x=t$, предварительно выполнив некоторые преобразования:

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{\cos^2 x}dx=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\\ \sin xdx=-dt\end{matrix}\right|=-\int\frac{1-t^2}{t^2}dt=$$

$$=\int\frac{t^2-1}{t^2}dt=\int\left(1-t^{-2}\right)dt=t-\frac{t^{-1}}{-1}+C=t+\frac{1}{t}+C=\cos x+\frac{1}{\cos x}+C.$$

б) $$\int\frac{2-\cos^2 x}{2\cos^2 x-1}\sin x\,dx=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\\ \sin xdx=-dt\end{matrix}\right|=-\int\frac{2-t^2}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{t^2-2}{t^2-\dfrac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}}{t^2-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int dt-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}t-\frac{3\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\cos x-\frac{3\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C.$$

в) Если $R(\sin x,\cos x)$ − нечетная функция относительно $\cos x$, т.е. $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то используют подстановку $\sin x=t$.

Пример 2.6.4. Вычислить интегралы:

а) $\int\frac{\cos^3 x\,dx}{2+\sin x}$; б) $\int\frac{\cos^7 x\,dx}{\sin^4 x}$.

Решение

а) Подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$. Введем подстановку $\sin x=t$, предварительно преобразовав функцию:

$$\int\frac{\cos^3 x\,dx}{2+\sin x}=\int\frac{\cos^2 x\cos x\,dx}{2+\sin x}=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\,dx}{2+\sin x}=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{1-t^2}{2+t}dt.$$

Проинтегрируем полученную неправильную рациональную дробь, выделив в ней целую часть:

$$\int\frac{1-t^2}{2+t}dt=-\int\frac{t^2-1}{t+2}dt=-\int\left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)dt=-\frac{t^2}{2}+2t-3\ln|t+2|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\sin^2 x+2\sin x-3\ln|\sin x+2|+C.$$

б) $$\int\frac{\cos^7 x\,dx}{\sin^4 x}=\int\frac{\cos^6 x\cos x\,dx}{\sin^4 x}=\int\frac{\left(\cos^2 x\right)^3\cos x\,dx}{\sin^4 x}=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)^3\cos x\,dx}{\sin^4 x}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{\left(1-t^2\right)^3}{t^4}dt=\int\frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^4}-3\int\frac{dt}{t^2}+3\int dt-\int t^2dt=$$

$$=\frac{t^{-3}}{-3}-3\frac{t^{-1}}{-1}+3t-\frac{t^3}{3}+C=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{3}{\sin x}+3\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$$

2. ***Интегралы вида*** $\int R(\operatorname{tg} x)dx$, $\int R(\operatorname{ctg} x)dx$ вычисляются с помощью подстановок $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$ соответственно. При этом $dx = \pm\dfrac{dt}{1+t^2}$.

Пример 2.6.5. Найти интегралы:

а) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$; б) $\int \dfrac{3-2\operatorname{tg} x}{\sin 2x}dx$; в) $\int \dfrac{dx}{\cos^8 x}$.

Решение

а) $$\int \operatorname{ctg}^4 x dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = t \\ dx = -\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = -\int t^4 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = -\int\left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt = -\frac{t^3}{3} + t +$$

$$+\operatorname{arcctg} x + C = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) + C = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x + C.$$

Данный интеграл можно было бы вычислить несколько иначе:

$$\int \operatorname{ctg}^4 x dx = \int \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 x\, dx = \int \operatorname{ctg}^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int \operatorname{ctg}^2 x \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \operatorname{ctg}^2 x dx =$$

$$= -\int \operatorname{ctg}^2 x d(\operatorname{ctg} x) - \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x + C.$$

б) Учитывая, что $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, применим подстановку $\operatorname{tg} x = t$:

$$\int \frac{3-2\operatorname{tg} x}{\sin 2x}dx = \int \frac{3-2\operatorname{tg} x}{\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}}dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t, dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{3-2t}{\dfrac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{3-2t}{t}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{3}{t} - 2\right)dt = \frac{1}{2}\left(3\ln|t| - 2t\right) + C = \frac{3}{2}\ln|\operatorname{tg} x| - \operatorname{tg} x + C.$$

в) Перейдем в подынтегральной функции к тангенсу:

$$\int \frac{dx}{\cos^8 3x} = \int\left(\frac{1}{\cos^2 3x}\right)^3 \cdot \frac{dx}{\cos^2 3x} = \int\left(1 + \operatorname{tg}^2 3x\right)^3 \cdot \frac{dx}{\cos^2 3x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} 3x = t \\ \dfrac{dx}{\cos^2 3x} = \dfrac{1}{3}dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int\left(1+t^2\right)^3 dt = \frac{1}{3}\int\left(1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6\right)dt = \frac{1}{3}\left(t + 3\cdot\frac{t^3}{3} + 3\cdot\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 3x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 3x + \frac{1}{21}\operatorname{tg}^7 3x + C.$$

3. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}$, $\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$, где $n \in N$ находят с помощью универсальной тригонометрической подстановки (см. п.1).

Пример 2.6.6. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = 2\int \frac{\left(1+t^2\right)^3 dt}{8t^3\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{\left(1+t^2\right)^2 dt}{t^3} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3}dt = \frac{1}{4}\int\left(t^{-3}+2t^{-1}+t\right)dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^{-2}}{-2}+2\ln|t|+\frac{t^2}{2}\right)+C = -\frac{1}{8t^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{8}t^2+C = -\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+C.$$

4. При нахождении интегралов вида $\int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \cos ax \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \sin bx\, dx$, где $a \neq b$, применяются тригонометрические формулы:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right],$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right],$$

$$\sin x \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right].$$

Если $a = b$, то $\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2}\int \sin 2ax dx = -\frac{1}{4a}\cos 2ax + C$,

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2}\int\left(1+\cos 2ax\right)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax + C,$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{1}{2}\int\left(1-\cos 2ax\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax + C.$$

Пример 2.6.7. Вычислить интегралы

а) $\int \sin 6x \cos 7x dx$; б) $\int \sin 3x \sin 4x dx$;

в) $\int \sin^2 \frac{x}{8} dx$; г) $\int \cos 9x \cos 6x \cos 3x dx$.

Решение

а) Преобразуем подынтегральную функцию, переходя от произведения к сумме: $\sin 6x \cos 7x = \frac{1}{2}\left[\sin(6x-7x)+\sin(6x+7x)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(-x)+\sin 13x\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[-\sin x + \sin 13x\right]$. Теперь проинтегрируем:

$$\int \sin 6x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int(-\sin x + \sin 13x)dx = \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{13}\cos 13x\right) + C = \frac{1}{2}\cos x -$$

$$-\frac{1}{26}\cos 13x + C.$$

б)

$$\int \sin 3x \sin 4x dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos(3x-4x)-\cos(3x+4x)\right]dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos(-x)-\cos 7x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\cos x - \cos 7x\right]dx = \frac{1}{2}\left(\sin x - \frac{1}{7}\sin 7x\right) + C = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{14}\sin 7x + C.$$

в) Понизим степень синуса в подынтегральной функции: $\sin^2\frac{x}{8} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{x}{4}\right)$.

Тогда $\int \sin^2\frac{x}{8}dx = \frac{1}{2}\int\left(1-\cos\frac{x}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\left(x - 4\sin\frac{x}{4}\right) + C = \frac{1}{2}x - 2\sin\frac{x}{4} + C$.

в) Так как $\cos 9x \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 15x)$, то

$$\cos 9x \cos 6x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 15x)\cos 3x = \frac{1}{2}\cos^2 3x + \frac{1}{2}\cos 15x \cos 3x.$$

Учитывая, что $\cos^2 3x = \frac{1}{2}(1+\cos 6x)$ и $\cos 15x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 12x + \cos 18x)$,

получим: $\cos 9x \cos 6x \cos 3x = \frac{1}{4}(1 + \cos 6x + \cos 12x + \cos 18x)$.

Тогда $\int \cos 9x \cos 6x \cos 3x dx = \frac{1}{4}\int(1+\cos 6x + \cos 12x + \cos 18x)dx =$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{12}\sin 12x + \frac{1}{18}\sin 18x\right) + C = \frac{1}{4}x + \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{48}\sin 12x +$$

$$+\frac{1}{72}\sin 18x + C.$$

5. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, где $m, n \in N$, вычисляются с помощью подстановки $\sin x = t$ при нечетном n, а при нечетном m − с помощью подстановки $\cos x = t$.

Если оба показателя m и n − четные, используются тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right),\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 2.6.8. Вычислить интегралы:

а) $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx$; б) $\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx$; в) $\int \sin^2 \frac{x}{3} \cos^4 \frac{x}{3}\,dx$.

Решение

а) Так как степень $\cos x$ нечетная, то применим подстановку $\sin x = t$.

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x\,dx = \int \sin^4 x\left(1 - \sin^2 x\right)\cos x\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix}\sin x = t \\ \cos x dx = dt\end{matrix}\right| = \int t^4\left(1 - t^2\right)dt = \int\left(t^4 - t^6\right)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

б) Как видим, степень $\sin x$ нечетная, поэтому введем подстановку $\cos x = t$.

$$\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \sin x dx = \int \cos^2 x\left(1 - \cos^2 x\right)\sin x\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix}\cos x = t \\ \sin x dx = -dt\end{matrix}\right| = \int t^2\left(1 - t^2\right)\left(-dt\right) = -\int\left(t^2 - t^4\right)dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x +$$

$$+\frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

в) Обе тригонометрические функции в четных степенях, поэтому понизим степени синуса и косинуса.

$$\int \sin^2 \frac{x}{3} \cos^4 \frac{x}{3}\,dx = \int \sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3}\,dx = \int\left(\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\right)^2 \cos^2 \frac{x}{3}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{4}\sin^2 \frac{2x}{3}\cos^2 \frac{x}{3}dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 \frac{2x}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2x}{3}\right)dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 \frac{2x}{3}dx +$$

$$+\frac{1}{8}\int \sin^2 \frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{4x}{3}\right)dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 \frac{2x}{3} \cdot \frac{3}{2}d\left(\sin\frac{2x}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{3}{4}\sin\frac{4x}{3}\right) + \frac{3}{16} \cdot \frac{\sin^3 \frac{2x}{3}}{3} + C = \frac{1}{16}x - \frac{3}{64}\sin\frac{4x}{3} + \frac{1}{16}\sin^3 \frac{2x}{3} + C.$$

Задания для самостоятельной работы

1. $\int \sin x \sin 3x dx$.
2. $\int \sin 6x \cos 7x\, dx$.
3. $\int \sin^2 \dfrac{x}{8} dx$.
4. $\int \cos^3 2x dx$.
5. $\int \cos^3 x \sin^4 x\, dx$.
6. $\int \mathrm{tg}^3\, 2x\, dx$.
7. $\int \dfrac{dx}{5+3\cos x}$.
8. $\int \dfrac{dx}{1+\sin^2 x}$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x}$.
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^6 x}$.
11. $\int \dfrac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x}$.
12. $\int \dfrac{\sin^3 x dx}{\cos^7 x}$.
13. $\int \dfrac{\mathrm{tg}\, x dx}{1+\mathrm{tg}\, x}$.
14. $\int \dfrac{\sin^3 x dx}{1+\cos x}$.
15. $\int \dfrac{\cos^3 x dx}{\sqrt[4]{\sin x}}$.
16. $\int \dfrac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.
17. $\int \dfrac{dx}{5-\sin^2 x+2\cos^2 x}$.
18. $\int \dfrac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$.
19. $\int \dfrac{\cos x dx}{\sin^2 x-6\sin x+5}$.
20. $\int \dfrac{dx}{1-\sin^4 x}$.
21. $\int \dfrac{\cos x dx}{\sin^3 x-\cos^3 x}$.

2.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интегралы от иррациональных функций не всегда вычисляются в элементарных функциях. Рассмотрим некоторые виды интегралов, для которых удачная подстановка дает возможность преобразовать данную функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден всегда.

1. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, где R − рациональная функция, n − натуральное число и a, b, c, d − постоянные, вычисляются с помощью одной из подстановок:

$t=\sqrt[n]{x}$, если $b=c=0$;

$t=\sqrt[n]{ax+b}$, если $c=0$;

$t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, в остальных случаях.

Пример 2.7.1. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$; б) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$; в) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx$.

Решение

а) Введем подстановку $t=\sqrt{x}$ или $x=t^2$, тогда $dx=2t\,dt$. Будем иметь:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}=\int \frac{t\cdot 2tdt}{t+1}=2\int \frac{t^2dt}{t+1}=2\int \frac{\left(t^2-1\right)+1}{t+1}dt=2\int \frac{(t-1)(t+1)+1}{t+1}dt=$$

$$=2\int (t-1)dt+2\int \frac{dt}{t+1}=2\cdot\frac{(t-1)^2}{2}+2\ln|t+1|+C=\left(\sqrt{x}-1\right)^2+2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$$

б) $$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}=\left|\begin{matrix} t=\sqrt[3]{2x-3},\ 2x-3=t^3 \\ x=\frac{1}{2}\left(t^3+3\right),\ dx=\frac{3}{2}t^2dt \end{matrix}\right|=\frac{3}{4}\int \frac{\left(t^3+3\right)t^2dt}{t}=\frac{3}{4}\int\left(t^4+3t\right)dt=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{t^5}{5}+3\cdot\frac{t^2}{2}\right)+C=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2}+C.$$

в) $$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx=\left|\begin{matrix} t=\sqrt{\frac{x+1}{x}},\ \frac{x+1}{x}=t^2 \\ x=\frac{1}{t^2-1},\ dx=-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2} \end{matrix}\right|=-2\int \frac{\left(t^2-1\right)^2t^2dt}{\left(t^2-1\right)^2}=-2\int t^2dt=$$

$$=-2\cdot\frac{t^3}{3}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^3}+C.$$

2. Если в состав функции входят корни различных степеней $\sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}},\sqrt[n_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2}},\dots,\sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}$, то в качестве новой переменной нужно взять $t=\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где s − наименьшее общее кратное чисел $n_1,n_2,\dots,n_k$ (НОК($n_1,n_2,\dots,n_k$)).

Пример 2.7.2. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{7+2x}-\sqrt{7+2x}}$; б) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+x}dx$.

Решение

а) Как видно, в подынтегральной функции содержатся корни разных степеней. Сделаем подстановку $t=\sqrt[6]{7+2x}$ или $7+2x=t^6$ ($n_1=3, n_2=2,$ $s=\text{НОК}(3;2)=6$). Тогда $2dx=6t^5dt,\ dx=3t^5dt$. Учтем, что $\sqrt[3]{7+2x}=t^2$, а $\sqrt{7+2x}=t^3$. Исходный интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{7+2x}-\sqrt{7+2x}}=\int\frac{3t^5dt}{t^2-t^3}=-3\int\frac{t^3dt}{t-1}=-3\int\left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=-3\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C=-\sqrt[6]{(7+2x)^3}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{(7+2x)^2}+\sqrt[6]{7+2x}+$$

$$+\ln\left|\sqrt[6]{7+2x}-1\right|+C=-\sqrt{7+2x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{7+2x}+\sqrt[6]{7+2x}+\ln\left|\sqrt[6]{7+2x}-1\right|+C.$$

б) Наименьшее общее кратное степеней корней, входящих в подынтегральное выражение, равно **4**. Сделаем подстановку $t=\sqrt[4]{x}$ или $x=t^4$. При этом $\sqrt{x}=t^2$. Тогда $dx=4t^3dt$ и интеграл принимает вид:

$$\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+x}dx=\int\frac{1+t}{t^2+t^4}\cdot 4t^3dt=4\int\frac{(1+t)t}{1+t^2}dt=4\int\frac{t^2+t}{t^2+1}dt=4\int\frac{(t^2+1)+t-1}{t^2+1}dt=$$

$$=4\int\left(1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=4\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|-\operatorname{arctg}t\right)+C=4\sqrt[4]{x}+2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|-$$

$$-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C.$$

3. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx, \int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,$ $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ с помощью ***тригонометрических подстановок***: $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ (или $x=a\,\mathrm{tg}\,t$), $x=a\sin t$ (или $x=a\cos t$) и $x=\dfrac{a}{\cos t}$ (или $x=\dfrac{a}{\sin t}$) соответственно приводятся к интегралам от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Пример 2.7.3. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+3}}$; б) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$; в) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$; г) $\displaystyle\int\sqrt{1-4x-x^2}dx$.

Решение

а) Вычислим данный интеграл с помощью подстановки $x=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t$. Тогда $dx=\frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t}$, $t=\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{3}\int\frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t\right)^2+3}}=\sqrt{3}\int\frac{dt}{\cos^2 t\cdot 3\,\mathrm{tg}^2 t\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2 t+3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\cos^2 t\cdot\mathrm{tg}^2 t\sqrt{\mathrm{tg}^2 t+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sin^2 t\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}=\frac{1}{3}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}.$$

Теперь, вводя новую переменную $z=\sin t,\ dz=\cos t\,dt$, будем иметь:

$$\frac{1}{3}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{z^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{3z}+C=-\frac{1}{3\sin t}+C=-\frac{1}{3\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}+C.$$

б) Применим подстановку $x=2\sin t$. Тогда $dx=2\cos t\,dt,\ t=\arcsin\frac{x}{2}$.

Получим:

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int\left(2\sin t\right)^2\cdot\sqrt{4-\left(2\sin t\right)^2}\cdot 2\cos t\,dt=16\int\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=$$

$$=16\int\sin^2 t\,\cos^2 t\,dt.$$

Пришли к известному типу интеграла (см. п.**2.6**, пример **2.6.8.**):

$$16\int\sin^2 t\,\cos^2 t\,dt=16\int\left(\sin t\cos t\right)^2dt=16\int\frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt=4\int\frac{1}{2}\left(1-\cos 4t\right)dt=$$

$$=2\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{2}\right)+C.$$

в)

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\left|\begin{array}{l}x=\frac{1}{\cos t},\ dx=\frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t},\\ t=\arccos\frac{1}{x}\end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}{\frac{1}{\cos t}}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=\int\sqrt{\mathrm{tg}^2 t}\,\mathrm{tg}\,t\,dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)dt=\mathrm{tg}\,t-t+C=\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{1}{x}\right)-\arccos\frac{1}{x}+C.$$

г) Преобразуем подынтегральную функцию, выделив в квадратном трехчлене полный квадрат:

$$\int\sqrt{1-4x-x^2}\,dx=\int\sqrt{-\left(x^2+4x+4\right)+5}\,dx=\int\sqrt{5-\left(x+2\right)^2}\;dx.$$

Обозначив через $t=x+2$ и применив подстановку $t=\sqrt{5}\sin z$, $dt=\sqrt{5}\cos z\,dz$, получим:

$$\int\sqrt{5-\left(x+2\right)^2}\;dx=\int\sqrt{5-5\sin^2 z}\cdot\sqrt{5}\cos z dz=5\int\sqrt{1-\sin^2 z}\cos z dz=5\int\cos^2 z dz=$$

$$=\frac{5}{2}\int\left(1+\cos 2z\right)dz=\frac{5}{2}\left(z+\frac{1}{2}\sin 2z\right)+C=\frac{5}{2}z+\frac{5}{4}\sin 2z+C.$$

Вернемся к первоначальной переменной, учитывая, что $z=\arcsin\frac{t}{\sqrt{5}}$:

$$\int\sqrt{1-4x-x^2}\,dx=\frac{5}{2}\arcsin\frac{t}{\sqrt{5}}+\frac{5}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{t}{\sqrt{5}}\right)+C=\frac{5}{2}\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}+$$

$$+\frac{5}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

Задания для самостоятельной работы

1. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+2}$.
3. $\int\sqrt{\frac{3x+7}{5x+12}}\,dx$.
4. $\int\sqrt{3+2x-x^2}\;dx$.
5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.
6. $\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx$.
7. $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(2+x^2\right)^3}}$.
8. $\int\frac{\sqrt{5-x^2}}{x}\,dx$.
9. $\int\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt[4]{\left(2x+1\right)^3}+1}\,dx$.
10. $\int\sqrt{6x-x^2-7}\,dx$.
11. $\int x\sqrt{6-x}\,dx$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
2. Щипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
4. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис – пресс, 2009. – 576 с.
5. Щипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2003. –304 с.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 336 с.
7. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика. Приклади і задачі: Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 624 с.

Приложение 1

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

а) ***с натуральным показателем***:

$$\boxed{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ раз}=a^n}$$

1. $a^0=1$.
2. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.
3. $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.
4. $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$.
5. $\left(ab\right)^n=a^nb^n$.
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$.
7. $\dfrac{1}{a^n}=a^{-n}$.

б) ***с рациональным показателем***:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[m]{a^n},\ a>0, m\in Z, n\in N}$$

8. $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$.
9. $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

Приложение 2

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

1. Вынесение общего множителя за скобку:

$$12x^4+24x^2=\underline{12x^2}\cdot x^2+\underline{12x^2}\cdot 2=12x^2\left(x^2+2\right).$$

2. Группировка: $2x^3-x^2+6x-3=\left(2x^3-x^2\right)+\left(6x-3\right)=$

$$=x^2\cdot\underline{\left(2x-1\right)}+3\cdot\underline{\left(2x-1\right)}=\left(2x-1\right)\left(x^2+3\right).$$

3. Использование формул сокращенного умножения:

$a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$ – разность квадратов

$a^3\pm b^3=\left(a\pm b\right)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$ – сумма (разность) кубов

$a^2\pm 2ab+b^2=\left(a\pm b\right)^2$ – полный квадрат суммы (разности)

$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=\left(a\pm b\right)^3$ – куб суммы (разности).

4. Разложение квадратного трехчлена:

$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, где x_1,x_2 – корни уравнения $ax^2+dx+c=0$.

Приложение 3

ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного угла:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1,$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

2. Формулы сложения:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha, \ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

3. Формулы двойного угла:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

4. Формулы суммы и разности тригонометрических функций:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

5. Формулы произведения тригонометрических функций:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

6. Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

7. Формулы универсальной подстановки:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}, \qquad \cos 2\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Приложение 4

СПИСОК МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И СЛОВОСОЧЕТАНИЙ НА РУССКОМ И ФРАНЦУЗСКОМ ЯЗЫКАХ

аналогично – de manière similaire à

выбирать – choisir

выделить полный квадрат – sélectionnez un carré parfait

действительные числа – nombres réel

деление – division

дифференцируемая функция – fonction différentiable

дробно-рациональная функция – fonction fractionnaire rationnelle

замена переменной – changement de variable

интервал – intervalle

интеграл – intégrale

интегрирование по частям – intégration par parties

иррациональная функция – fonction irrationnelle

комплексные числа – nombres complexe

кратность – degré; multiplicité

линейное уравнение – l'équation linéaire

метод – méthode

метод частных значений – la méthode de points de données

многочлен – polynôme

наименьшее общее кратное – LCM (lowest common multiple)

неопределенный интеграл – intégrale indéfinie

неопределенный коэффициент – indefinite coefficient

неотрицательные числа – nombres arithmétique

непосредственное интегрирование – intégration immédiate

неправильная дробь – fraction impropre

нечетная (четная) функция – fonction impaire (paire)

непрерывный – continu

обратить внимание – prêter attention

общий знаменатель – dénominateur commun

определенный интеграл – intégrale définie

остаток – reste; différence; excès

первообразная функции – fonction primitive

понижение степени – l'abaissement du degré

позволяет (позволить) – permet (permettre)

правая часть – second membre d'une équation

правильная дробь – fraction propre

преобразование – traduction; modification

произвольная постоянная – constante arbitraire

простейшие (элементарные) дроби – fraction simple

разложить на множители – factoriser

рациональная функция – fonction rationnelle

рекуррентная формула – la formule de récurrence

свойства – propriétés; caractéristiques

совокупность – ensemble; complexe

сравнить – comparer

существует – exister

таблица – table

тригонометрия – trigonométrie

тригонометрическая формула – formules trigonométriques

частное – quotient

СПИСОК МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И СЛОВОСОЧЕТАНИЙ НА РУССКОМ И АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКАХ

аналогично – analogous (to); analogical

выбирать – to choose

выделить полный квадрат – distinguish a perfect square

действительные числа – real numbers

деление – division

дифференцируемая функция – differentiable function

дробно-рациональная функция – fractional rational function

замена переменной – change of variable

интервал – interval

интеграл – integral

интегрирование по частям – integration by parts

иррациональная функция – irrational function

комплексные числа – complex numbers

кратность – multiplicity

линейное уравнение – linear equation

метод – method

метод частных значений – the method of particular values

многочлен – polynomial

наименьшее общее кратное – LCM (lowest common multiple)

неопределенный интеграл – indefinite integral

неопределенный коэффициент – indefinite coefficient

неотрицательные числа – nonnegative numbers

непосредственное интегрирование – direct integration

неправильная дробь – improper fraction

нечетная функция – uneven function

непрерывный – continuous

обратить внимание – pay attention; note

общий знаменатель – common denominator

определенный интеграл – definite integral

остаток – excess

первообразная функции – primitive function

понижение степени – decrease the degree

позволяет (позволить) – afford; make it possible

правая часть – чего-л. the right-hand side of smth (уравнения или неравенства)

правильная дробь – proper fraction

преобразование – transformation

произвольная постоянная – a constant; arbitrary constant

простейшие (элементарные) дроби – partial fractions

разложить на множители – factorize; expand the number into factors

рациональная функция – rational function

рекуррентная формула – recurrence formula

свойства – properties; characteristics; features

совокупность – complex; class

сравнить – compare

существует – exist

таблица – table

тригонометрия – trigonometry

тригонометрическая формула – trigonometric formula

частное – quotient