МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

В.Л. КОПОРУЛІН, Л.В. МОССАКОВСЬКА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

РОЗДІЛ
“ВИЗНАЧЕНИЙ ТА НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ”

Затверджено Вченою радою НМетАУ
як навчальний посібник для студентів напряму
6.050702 – електромеханіка
Протокол № 6 від 25.05.2015

Дніпропетровськ НМетАУ 2015

УДК 517(07)

Копорулін В.Л., Моссаковська Л.В. Вища математика. Розділ “Визначений та невласні інтеграли”: Навч. посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2015. – 111 с.

Наведені вихідні означення, пояснений геометричний та фізичний зміст визначеного інтеграла, вказані умови його існування й основні властивості. Докладно розглянуте обчислення інтегралів від неперервних та кусково-неперервних функцій.

Наведені вихідні означення невласних інтегралів, пояснений їх геометричний зміст. Розглянуте дослідження невласних інтегралів за означенням та за допомогою узагальненої первісної, дослідження збіжності з використанням відповідних ознак, заміна змінної та інтегрування частинами.

Розглянуті застосування визначеного та невласних інтегралів до розв’язання деяких геометричних задач.

Викладення теоретичних положень супроводжується необхідними ілюстраціями і розв’язанням відповідних прикладів.

Призначений для студентів напряму 6.050702 – електромеханіка та інших напрямів.

Іл. 39. Бібліогр.: 8 найм.

Друкується за авторською редакцією

Відповідальний за випуск В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти: О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф. (НГУ)
В.Г. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ ім. О. Гончара)

З М І С Т

В С Т У П

Поняття визначеного інтеграла є одним з найважливіших у вищій математиці. Це пов'язано не лише з тим, що до визначеного інтеграла фактично зводяться інтеграли інших типів (кратні, криволінійні, поверхневі), а й з його широким застосуванням у фундаментальних та прикладних дослідженнях, зокрема, при розв'язанні різноманітних задач геометрії, механіки й фізики. Тому цілком зрозуміла та увага, яка повинна бути приділена вивченню даного розділу. Особливо це стосується вироблення навичок з обчислення визначених інтегралів, що є вкрай важливим при розв'язанні практичних задач.

Тема “Невласні інтеграли” взагалі є досить складною. Разом з тим у переважній більшості наявної літератури вона подана дуже стисло. Тому при викладанні матеріалу автори намагалися якомога докладніше пояснювати деякі важливі пункти, зокрема, обчислення невласних інтегралів за допомогою узагальненої первісної або застосування ознак збіжності, супроводжуючи подання теоретичних положень розв'язанням відповідних прикладів. Матеріал п.2.6 не є обов'язковим. Він носить переважно теоретичний характер і має на меті докладніше проілюструвати дослідження збіжності невласних інтегралів від знакозмінних функцій.

Особливу увагу автори приділили повноті й послідовності викладення, а також деяким питанням, які у переважній більшості наявної літератури подаються дуже стисло. Зокрема це стосується інтегрування кусково-неперервних функцій, заміни змінної і використання узагальненої первісної.

У третій частині розглянуте одне з застосувань визначеного та невласних інтегралів, а саме, розв'язання за їх допомогою деяких задач геометричного змісту – обчислення площ плоских фігур, довжин дуг плоских ліній, об'ємів тіл і площ поверхонь обертання.

Викладення теоретичного матеріалу супроводжується розв'язанням значної кількості прикладів, у зв'язку з чим посібник також може бути використаний при самостійному вивченні даної теми.

Посібник призначений в першу чергу для студентів інженерних і технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів, однак він, як сподіваються автори, буде також корисним усім, хто вивчає вищу математику.

1. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Означення визначеного інтеграла як границі інтегральної суми

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$, $a<b$. Назвемо $\tau-$***розбиттям*** відрізка $[a,b]$ будь-яку скінченну множину *довільно* вибраних точок $\tau=\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, для якої

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{i-1}<x_i<x_{i+1}<\dots<x_{n-1}<x_n=b\,.$$

При цьому точки $x_i\ (i=\overline{0,n})$ називаються ***точками $\tau-$розбиття***, а відрізки $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=\overline{1,n})$ – ***частковими відрізками***, які відповідають даному $\tau-$розбиттю. Позначимо через Δx_i довжину часткового відрізка $[x_{i-1}, x_i]$, тобто $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i=\overline{1,n})$ (всього таких відрізків буде n).

На кожному відрізку *довільно* виберемо точку ζ_i і позначимо множину цих точок

$$\mathbf{Z}=\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}.$$

Утворимо суму

$$\sigma(f,\tau,\mathbf{Z})=\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,\Delta x_i\,, \tag{1.1}$$

яка називається ***інтегральною сумою*** функції $f(x)$, що відповідає даному $\tau-$розбиттю відрізка $[a,b]$ на часткові та даному вибору $\mathbf{Z}$ проміжних точок ζ_i.

Слід зауважити, що інтегральна сума (1.1) залежить не лише від функції $f(x)$, але й від τ та $\mathbf{Z}$ *окремо*. Це означає, що суми, обчислені при *одному й тому самому* $\tau-$розбитті, можуть бути *зовсім різні*! Тому визначимо, що ми будемо вважати *границею* суми (1.1).

Позначимо через λ_τ *довжину найбільшого часткового відрізка* даного $\tau-$розбиття, тобто

$$\lambda_\tau=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\},$$

і назвемо його ***діаметром $\tau-$розбиття***. Очевидно, що число n точок $\tau-$розбиття прямує до нескінченності, коли діаметр розбиття λ_τ прямує до нуля. Зауважимо, що обернене твердження, взагалі кажучи, може бути невірним.

Число I називається ***границею інтегральної суми*** $\sigma(f,\tau,Z)$ при $\lambda_\tau \to 0$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при будь-якому $\tau-$розбитті відрізка $[a,b]$, такому, що $\lambda_\tau < \delta$, виконується нерівність $|\,\sigma(f,\tau,Z) - I\,| < \varepsilon$.

Таким чином, *за означенням*, границя I інтегральної суми, якщо така границя існує, *скінченна і не залежить* ані від $\tau-$розбиття відрізка $[a,b]$ на часткові, ані від вибору Z проміжних точок ζ_i. Символічно це записується у вигляді

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma(f,\tau,Z) = I \quad \left(\text{або } \sigma(f,\tau,Z) \to I \text{ при } \lambda_\tau \to 0 \right). \qquad (1.2)$$

Отже нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$ і нехай (1.1) – її інтегральна сума на цьому відрізку.

Якщо границя (1.2) існує, то вона називається ***визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$*** і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким чином, *за означенням*

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma(f,\tau,Z) = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (1.3)$$

Інтегральна сума (1.1) називається ***сумою Рімана***, за прізвищем математика, який вперше сформулював означення її границі у загальному вигляді і дослідив межі його застосування. Отже, і сам визначений інтеграл іноді називають ***інтегралом Рімана***.

Числа a і b називаються відповідно ***нижньою*** та ***верхньою межами*** інтегрування; функція $f(x)$ називається ***підінтегральною функцією***; $f(x)dx$ називається ***підінтегральним виразом,*** а $x-$***змінною інтегрування***. Відрізок $[a,b]$ прийнято називати ***відрізком*** або ***проміжком інтегрування***.

Функція $f(x)$, для якої на відрізку $[a,b]$ існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (або, що те ж саме, границя (1.2)) називається ***інтегровною*** на цьому відрізку.

Безпосередньо з означення випливає, що:

1. Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування, тобто, наприклад,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du\,. \qquad (1.4)$$

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю, тобто

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,. \qquad (1.5)$$

3. Для будь-якого дійсного числа c

$$\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a). \qquad (1.6)$$

4. При переставленні меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,. \qquad (1.7)$$

Зауваження. Властивості 2-4 можуть бути також прийняті за означенням.

1.2. Геометричний зміст визначеного інтеграла
(на прикладі розв'язання задачі про обчислення площі криволінійної трапеції)

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$ і є *невід'ємною* на цьому відрізку, тобто $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a,b]$.

Назвемо ***криволінійною трапецією*** фігуру, обмежену графіком функції $y = f(x)$, відрізками прямих $x = a$ й $x = b$ між точками їх перетину з графіком та віссю Ox, а також відрізком вісі Ox між точками $(a,0)$ й $(b,0)$. Ця фігура зображена на рис. 1.1. Обчислимо її площу S.

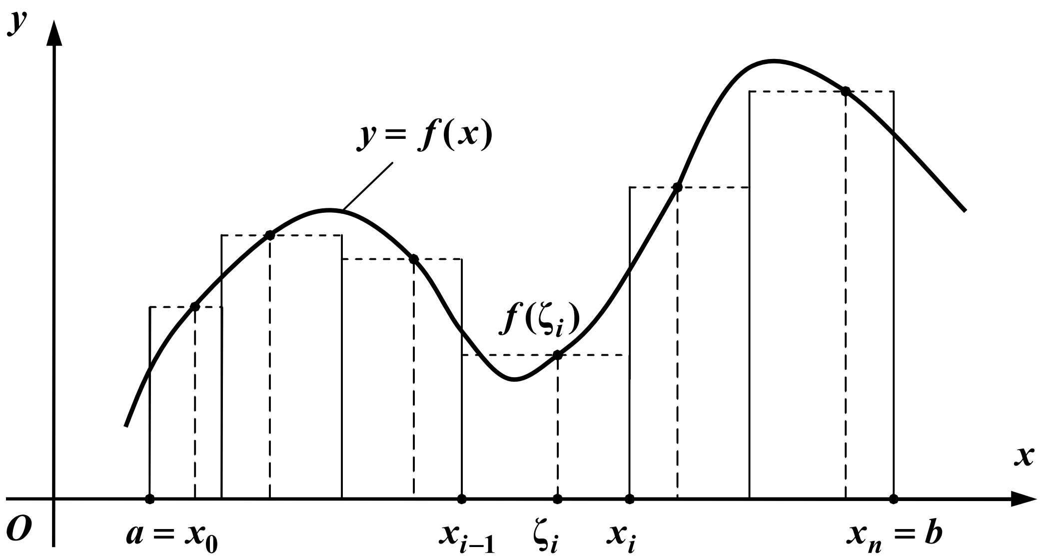

Рис. 1.1

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на *довільні* часткові відрізки $[x_{i-1}, x_i]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b .$$

Довжину $x_i - x_{i-1}$ i-го часткового відрізка $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=\overline{1,n})$ позначимо через Δx_i. Виберемо *довільно* проміжні точки $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Неважко бачити, що площа кожного заштрихованого прямокутника із сторонами Δx_i й $f(\zeta_i)$ дорівнює $S_i = f(\zeta_i)\,\Delta x_i$. Тоді площа східчастої фігури, що складається з цих прямокутників, чисельно дорівнює

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,\Delta x_i .$$

Вона являє собою інтегральну суму (1.1) і є наближеним чисельним значенням площі криволінійної трапеції.

Із зменшенням *усіх* величин Δx_i, тобто із зменшенням величини $\max\{\Delta x_i\}$ $(i=\overline{1,n})$ значення $\tilde{S}$ прямуватиме до границі

$$\lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,\Delta x_i , \tag{1.8}$$

яка може існувати або не існувати.

Якщо поставити вимогу, щоб функція $f(x)$ була *інтегровною* на $[a,b]$, то це буде означати, що границя (1.8) існує і точне значення шуканої площі є

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1.9)$$

У цьому і полягає ***геометричний зміст визначеного інтеграла***: на певному відрізку визначений інтеграл функції, невід'ємної й інтегровної на цьому відрізку, чисельно дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції.

Зауважимо, що геометричний зміст визначеного інтеграла може бути проілюстрований також розв'язанням деяких інших задач геометрії, зокрема, задачі про обчислення об'єму бруса зі змінним поперечним перерізом (інші задачі будуть розглянуті у гл. 3). Також слід зауважити, що взагалі зміст визначеного інтеграла не обмежується лише геометрією, а визначається змістом тієї конкретної задачі, розв'язок якої зображує цей інтеграл. Деякими прикладами проілюструємо, зокрема, його фізичний зміст.

1.3. Фізичний зміст визначеного інтеграла

1.3.1. Робота змінної сили

Розглянемо точку, яка під дією сили $\overline{F}$ перемістилася вздовж осі Ox з точки $x = a$ в точку $x = b$ $(a < b)$. Обчислимо роботу W сили $\overline{F}$ на відрізку $[a,b]$ у випадку, коли ця сила змінна за величиною і діє вздовж осі Ox, тобто $\overline{F} = f(x) \cdot \overline{i}$.

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ...$ $< x_{n=1} < x_n = b$ на n часткових відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n})$. Позначимо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Якщо довжина Δx_i $i-$го часткового відрізка досить мала, то можна припустити, що сила $\overline{F}$ на цьому відрізку змінюється незначно і її величина є сталою, яка наближено дорівнює значенню функції $f(x)$ у певній довільно вибраній точці $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Тому робота сили $\overline{F}$ на $i-$му частковому відрізку наближено дорівнює $f(\zeta_i)\Delta x_i$, а на відрізку $[a,b]$ – сумі робіт на усіх часткових відрізках, тобто

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i.$$

Точність цієї наближеної рівності збільшується, коли величина $\max\{\Delta x_i\}$ $(i=\overline{1,n})$ зменшується. Природно вважати, що при цьому значення роботи сили $\overline{F}$ на відрізку $[a,b]$ прямуватиме до границі

$$\lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,\Delta x_i, \tag{1.10}$$

якщо така границя взагалі існує.

При умові, що функція $f(x)$ є інтегровною на $[a,b]$, скінченна границя (1.10) існує за означенням і точне значення роботи є

$$W=\int_a^b f(x)dx. \tag{1.11}$$

Рівність (11) виражає ***фізичний зміст визначеного інтеграла***: робота змінної сили $\overline{F}=f(x)\,\bar{i}$ на відрізку $[a,b]$ дорівнює визначеному інтегралу функції $f(x)$ на цьому відрізку.

Розв'язання багатьох інших фізичних задач дає нам чисельні приклади застосування визначеного інтеграла. Розглянемо коротко ще дві з цих задач.

1.3.2. Пройдений шлях

Нехай точка рухається вздовж деякої лінії зі швидкістю $v=v(t)$. Обчислимо довжину s шляху, який пройде точка за проміжок часу від моменту $t=T_1$ до моменту $t=T_2$.

Розіб'ємо проміжок $[T_1,T_2]$ на довільні проміжки $[t_{i-1},t_i]$ $(i=\overline{1,n},\ t_0=T_1,\ t_n=T_2)$ й позначимо $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. Якщо величина Δt_i досить мала, то можна наближено вважати швидкість на цьому проміжку часу сталою. Її величину можна прийняти рівною $v(\tau_i)$, де $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$ – довільна точка. Тоді шлях, який пройде точка за проміжок Δt_i, наближено дорівнює $v(\tau_i)\Delta t_i$, а увесь шлях наближено дорівнює $\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$.

Із зменшенням величини $max\{\varDelta t_i\}$ $(i=\overline{1,n})$ значення довжини шляху прямуватиме до границі $\lim\limits_{\max\{\Delta t_i\}\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$.

Якщо поставити вимогу, щоб функція $v(t)$ була інтегровною на $[T_1, T_2]$, то, за означенням, буде існувати скінченна границя і *точне значення* шуканої довжини шляху є

$$s = \int\limits_{T_1}^{T_2} v(t)dt. \qquad (1.12)$$

1.3.3. Маса неоднорідного бруса

Нехай прямолінійний брус із сталим поперечним перерізом лежить на осі Ox так, що його кінці збігаються з точками $x = a$ й $x = b$. Брус не є однорідним, тобто лінійна густина матеріалу бруса є функцією $\rho = \rho(x)$ і має розмірність "одиниця маси / одиниця довжини".

Обчислимо масу m бруса. Для цього розіб'ємо брус на n довільних частин довжиною $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = \overline{1, n})$, $x_0 = a$, $x_n = b$. Якщо величина Δx_i досить мала, то можна наближено вважати густину матеріалу цієї частини бруса сталою й прийняти її величину рівною $\rho(\zeta_i)$, де $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ – довільна точка. Тоді маса $i-$ї частини бруса довжиною Δx_i наближено дорівнює $\rho(\zeta_i)\Delta x_i$, а маса всього бруса наближено дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\zeta_i)\Delta x_i$. Якщо поставити вимогу, щоб функція $\rho(x)$ була інтегровною на відрізку $[a, b]$, тобто щоб існувала скінченна границя $\lim\limits_{\max\{\Delta x_i\}\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\zeta_i)\Delta x_i$, то, за означенням, дістанемо *точне значення* маси бруса

$$m = \int\limits_{a}^{b}\rho(x)dx. \qquad (1.13)$$

Як бачимо, незалежно від конкретного змісту тієї чи іншої задачі, визначений інтеграл, який фактично і є її розв'язком, повинен існувати. Очевидно, для цього підінтегральна функція на відрізку інтегрування повинна задовольняти певним вимогам. Проте в означенні визначеного інтеграла про ці вимоги не йдеться. Це питання, що має велике теоретичне і практичне значення, ми розглянемо далі.

1.4. Умови існування визначеного інтеграла
(класи інтегровних функцій)

Насамперед відзначимо, що означення визначеного інтеграла може бути дане *лише для обмежених* на відрізку $[a,b]$ функцій $f(x)$, тобто таких, що $m \le f(x) \le M$, де $x \in [a,b]$, а m, M – дійсні числа. Якщо це було б не так, а саме $f(x)$ була б необмеженою на $[a,b]$ то вона була б необмеженою хоча б на одному з часткових відрізків $[x_{i-1}, x_i]$. Тоді можна вибрати проміжну точку $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ таку, щоб значення $f(\zeta_i)$, а з ним і інтегральна сума (1.1), були б як завгодно великими. При цьому, очевидно, границя (1.2) не буде скінченною, тобто визначений інтеграл не існуватиме. Таким чином, ***якщо функція інтегровна на деякому відрізку, то вона обмежена на цьому відрізку***.

Обернене твердження, взагалі кажучи, невірне, оскільки існують функції, які обмежені на відрізку, але не інтегровні на ньому. Одним з найвідоміших прикладів такої функції є так звана ***функція Діріхле***:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \text{ - раціональне} \\ 0, \text{ якщо } x \text{ - ірраціональне} \end{cases},$$

яка на відрізку $[0,1]$ є обмеженою $(0 \le D(x) \le 1)$, але не є інтегровною.

Таким чином, *обмеженість функції на відрізку є **необхідною умовою** її інтегровності, але не є достатньою.*

Розглянемо ***достатні умови*** інтегровності функції.

Теорема 1.1. Якщо функція неперервна на деякому відрізку, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Сформульована теорема дає лише одну з можливих достатніх умов інтегровності функції. Клас інтегровних функцій значно ширший, що підтверджується наступними теоремами.

Теорема 1.2. Якщо функція обмежена на деякому відрізку і має на ньому лише скінченне число точок розриву, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Зокрема, умовам теореми задовольняють так звані *кусково-неперервні* функції, тобто такі, що мають на відрізку інтегрування розриви лише першого роду (усувні чи неусувні), а в решті точок відрізку залишаються неперервними. Приклад графіка кусково-неперервної функції наведений на рис.1.2. У точці $x = c_1$ функція терпить усувний розрив першого роду, а у точці $x = c_2$ – неусувний розрив першого роду (стрибок) справа.

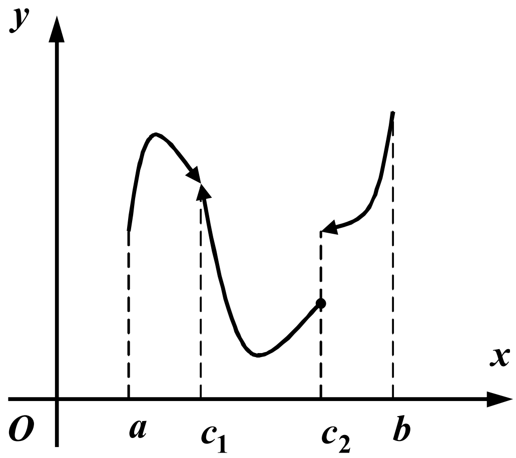

Рис. 1.2

Теорема 1.3. Якщо функція обмежена і монотонна на деякому відрізку, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Зазначимо, що такі функції можуть мати не лише скінченну, а й нескінченну кількість точок розриву першого роду.

1.5. Властивості визначеного інтеграла

Деякі найпростіші з цих властивостей вказані у п.1.1. Далі розглянемо інші властивості, причому, якщо це не буде застережено спеціально, будемо вважати можливими обидва випадки $a < b$ й $a > b$ (маючи на увазі властивість 4 п.1.1).

1.5.1. Властивості, що виражаються рівностями

Окрім властивостей 2 - 4 (п.1.1), до них віднесемо такі.

1. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$, то функція $C\cdot f(x)$ $(C=const)$ також інтегровна на цьому відрізку, причому

$$\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \tag{1.14}$$

тобто сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.

Д о в е д е н н я. Дійсно, за означенням,

$$\int_a^b C\,f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} C\,f(\zeta_i)\Delta x_i = C\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i = C\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на відрізку $[a,b]$, то функція $f(x)\pm g(x)$ також є інтегровною на цьому відрізку, причому

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \tag{1.15}$$

Д о в е д е н н я. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ довільним чином на n часткових відрізків і складемо інтегральні суми для усіх трьох інтегралів. При цьому проміжні точки ζ_i у кожному з часткових відрізків вибираємо довільно, але для усіх трьох сум – одні й ті самі. Тоді будемо мати

$$\sum_{i=1}^{n}[f(\zeta_i)\pm g(\zeta_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\zeta_i)\Delta x_i.$$

Оскільки границі при $\lambda\to 0$ обох сум справа існують, то існує і границя при $\lambda\to 0$ суми зліва. Тоді, за означенням, маємо рівність (1.15).

Зауваження. Ця властивість є справедливою не лише для двох, але й для будь-якого скінченного числа доданків. Відзначимо також, що наведені властивості становлять собою так звану ***лінійність*** визначеного інтеграла, оскільки їх прямим наслідком є рівність

$$\int_a^b [C\,f(x) \pm D\,g(x)]dx = C\int_a^b f(x)dx \pm D\int_a^b g(x)dx, \tag{1.16}$$

де $C = const$, $D = const$.

3. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на найбільшому з відрізків $[a,b]$, $[a,c]$ і $[c,b]$, то вона інтегровна і на двох інших й для будь-якого взаємного розташування точок a,b і c має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{1.17}$$

Д о в е д е н н я . Спочатку припустимо, що $a < c < b$ і функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$.

Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$ на n часткових відрізків таким чином, щоб точка $x = c$ збігалася з однією з точок розбиття, наприклад, $c = x_k$ $(2 \le k \le n-2)$. Тоді, склавши інтегральну суму для відрізка $[a,b]$ $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,\Delta x_i$, можемо розбити її на дві суми $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)\,\Delta x_i$ й $\sigma_2 = \sum_{i=k+1}^{n} f(\zeta_i)\,\Delta x_i$ відповідно для відрізків $[a,c]$ й $[c,b]$, тобто $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Оскільки функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то границя $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma$ існує. Але тоді існують і обидві границі $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma_1$ й $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma_2$, причому $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma_1 + \lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma_2$, що доводить рівність (1.17).

Інші випадки розташування точок a, b і c зводяться до вже розглянутого. Нехай, наприклад, $b < a < c$ і функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[b,c]$. Тоді, за доведеним,

$$\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx,$$

звідки, на підставі (1.7), маємо

$$-\int_c^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx.$$

Міняючи місцями перші два інтеграли, дістанемо рівність (1.17).

Цю властивість звичайно називають ***адитивністю*** визначеного інтеграла.

1.5.2. Властивості, що виражаються нерівностями

4. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$ $(a<b)$ і всюди на цьому відрізку $f(x)\geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0. \qquad (1.18)$$

Д о в е д е н н я . Оскільки $f(x)\geq 0$ і $a<b$, то для будь-якого розбиття відрізка $[a,b]$ маємо $f(\zeta_i)\geq 0$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$ $(i=\overline{1,n})$. Але ж тоді $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,\Delta x_i \geq 0$. Тому границя $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ існує і також невід'ємна, що й доводить нерівність (1.18).

Н а с л і д о к. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$ $(a<b)$ і всюди на $[a,b]$ $f(x)\leq 0$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq 0. \qquad (1.19)$$

Цю властивість можна було б сформулювати і так: якщо підінтегральна функція є знакосталою на відрізку інтегрування, то визначений інтеграл зберігає її знак.

5. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на відрізку $[a,b]$ $(a<b)$ і всюди на цьому відрізку $f(x)\leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)dx. \qquad (1.20)$$

Д о в е д е н н я . Оскільки $f(x)\leq g(x)$, то $f(x)-g(x)\geq 0$. Використовуючи властивості 2 і 4, дістанемо нерівність (1.20).

6. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$ $(a<b)$, то функція $|f(x)|$ також інтегровна на цьому відрізку, причому

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (1.21)$$

Доведення цієї властивості не наводимо.

7. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$ $(a<b)$ й m і M – відповідно її найменше і найбільше значення на цьому відрізку, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \tag{1.22}$$

Д о в е д е н н я . Оскільки $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$ і $a<b$, то при розбитті відрізка $[a,b]$ на часткові відрізки усі $\Delta x_i > 0$. Тоді $m\Delta x_i \le f(\zeta_i)\Delta x_i \le M\Delta x_i$ або $m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i \le M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$. Маючи на увазі, що $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = b-a$ і переходячи до границі при $\lambda \to 0$, дістанемо нерівність (1.22).

Таким чином, на підставі доведеної властивості, визначений інтеграл *може бути оцінений*, причому числа $m(b-a)$ й $M(b-a)$ становлять собою його оцінки відповідно знизу і зверху.

1.5.3. Теорема про середнє значення

Теорема 1.4. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$ й m і M – відповідно її найменше і найбільше значення на цьому відрізку, то існує число μ, $m \le \mu \le M$, таке, що

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \tag{1.23}$$

Д о в е д е н н я . За властивістю 7 маємо

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

звідки $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$. Поклавши $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ дістанемо рівність (1.23), де $m \le \mu \le M$.

Зауваження. Рівність (1.23) справедлива в *обох* випадках $a<b$ і $a>b$.

Н а с л і д о к . Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то існує точка $x=c$, $a<c<b$, така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a). \tag{1.24}$$

Дійсно, оскільки $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то за першою теоремою Вейєрштрасса вона обмежена на цьому відрізку, тобто існують числа m і M, такі, що $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$. Тоді, за другою теоремою Больцано-Коші, яке б не було число μ, таке, що $m \le \mu \le M$, завжди знайдеться проміжна точка $x=c$ $(a<c<b)$, така, що $f(c)=\mu$.

Величина $f(c)$ називається ***середнім значенням*** функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Формула (1.24) має простий ***геометричний зміст***: якщо $f(x)\ge 0$ на відрізку $[a,b]$, то площа криволінійної трапеції (заштрихована) дорівнює площі прямокутника з тією ж основою $b-a$ і з висотою $f(c)$ (рис. 1.3).

Формула (1.24), як і термін "середнє значення функції", може набувати також фізичного змісту, якщо під функцією розуміти швидкість, силу, густину речовини, потужність або інші фізичні категорії.

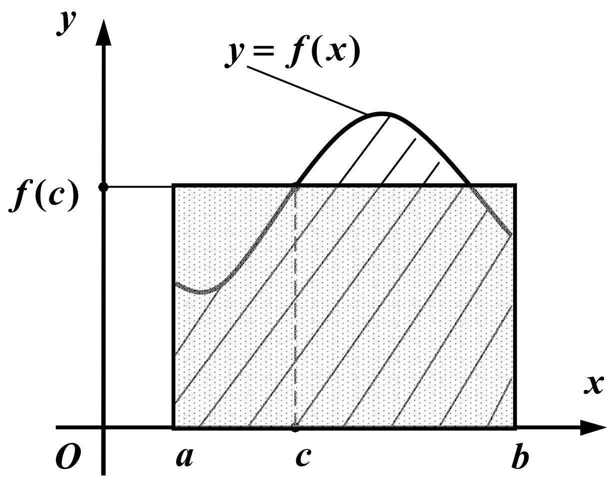

Рис. 1.3

1.5.4. Зміна значень інтегровної функції

На завершення наведемо без доведення ще одну важливу властивість визначеного інтеграла, тісно пов'язану з його означенням.

9. Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$. Якщо змінити значення цієї функції в скінченному числі точок, то її інтегровність не порушиться, а значення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ залишиться незмінним.

Неважко зрозуміти, що наведена властивість залишається справедливою і у тому випадку, коли в скінченному числі точок відрізка $[a,b]$ функція $f(x)$ *взагалі не визначена*. Довизначення її у цих точках довільними значеннями не змінює значення відповідного інтеграла. Надалі будемо мати це на увазі, зокрема, при обчисленні інтегралів від кусково-неперервних функцій.

1.6. Обчислення визначених інтегралів

1.6.1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею. Теорема Барроу

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$ й x – довільна фіксована точка цього відрізка. Тоді з адитивності визначеного інтеграла випливає, що на відрізку $[a,x]$ $f(x)$ також інтегровна, тобто існує $\int_a^x f(t)dt$. Оскільки визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування, то позначимо її літерою t, щоб відрізнити від верхньої межі, яка позначена літерою x. Зрозуміло, що цей інтеграл є деякою функцією $\Phi(x)$ змінної x:

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \quad x\in[a,b]. \tag{1.25}$$

Функція $\Phi(x)$ називається ***інтегралом зі змінною верхньою межею інтегрування***. Доведено, що ця функція *неперервна* на відрізку $[a,b]$. Чи буде вона *диференційовною* на цьому відрізку, – залежить від функції $f(x)$. Має місце теорема, яка належить *Ісааку Барроу* (1630-1677), який до 1669 р. був вчителем *Ньютона* (1642-1727).

Теорема 1.5 (Барроу). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то функція $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ диференційовна на цьому відрізку, причому

$$\Phi'(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b].$$

Зауваження. У точках $x=a$ й $x=b$ йдеться про відповідні *однобічні* похідні $\Phi'(a+0)$ й $\Phi'(b-0)$. Таким чином, за теоремою Барроу та згідно з означенням функція $\Phi(x)$ є первісною функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Д о в е д е н н я . Виберемо довільну точку $x\in[a,b]$ і надамо їй приросту Δx таким чином, щоб $(x+\Delta x)\in[a,b]$. Відповідний приріст $\Delta\Phi$ функції $\Phi(x)$ у точці x з урахуванням адитивності визначеного інтеграла є

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^{x} f(t)dt=$$

$$=\int\limits_a^{x} f(t)dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^{x} f(t)dt=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а, отже, і на відрізку $[x,\ x+\Delta x]$, то, згідно з теоремою про середнє значення (1.24) існує точка $x=c\ \ (x<c<x+\Delta x)$, така, що

$$\Delta\Phi=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\cdot\Delta x. \qquad (1.26)$$

Якщо $\Delta x\to 0$, то $x+\Delta x\to x$ і $c\to x$. Тоді з неперервності функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ випливає, що

$$\lim_{c\to x} f(c)=f(x) \text{ або } \lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x). \qquad (1.27)$$

Тому, за означенням похідної, з урахуванням (1.26) і (1.27), маємо

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x),$$

що і треба було довести.

Якщо $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$, то функція $\Phi(x)$ (1.25) буде чисельно дорівнювати площі частини криволінійної трапеції (заштрихована на рис. 1.4).

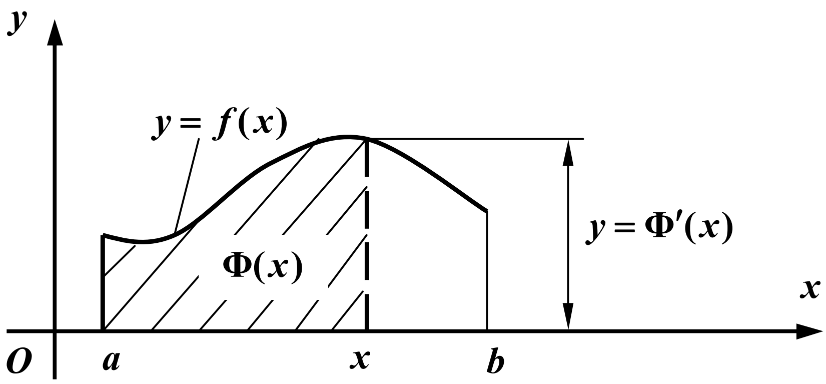

Рис. 1.4

Геометричний зміст розглянутої теореми полягає у тому, що похідна змінної площі $\Phi(x)$ по скінченній абсцисі x дорівнює скінченній ординаті y.

Теорема Барроу має велике принципове й застосовне значення. Вона стверджує, що ***для всякої неперервної на відрізку*** $[a,b]$ ***функції завжди існує первісна***, прикладом якої є визначений інтеграл (1.25) зі змінною верхньою межею. Будь-яка інша первісна $F(x)$ функції $f(x)$ може відрізнятися від $\Phi(x)$ лише на сталу, тобто $\Phi(x) = F(x) + C \quad \forall x \in [a,b]$. Оскільки ж $F(x) + C$ становить собою невизначений інтеграл $\int f(x)dx$, то

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]. \tag{1.28}$$

Таким чином, теорема Барроу встановлює зв'язок між невизначеним та визначеним інтегралами і за суттю є теоремою існування невизначеного інтеграла.

1.6.2. Інтегрування неперервних функцій. Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема 1.6. Якщо функція $f(x)$ *неперервна* на відрізку $[a,b]$ і $F(x)$ – *яка-небудь* її *первісна* на цьому відрізку, то справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{1.29}$$

Ця рівність називається ***формулою Ньютона-Лейбніца*** і становить собою *основну формулу інтегрального числення*.

Д о в е д е н н я. Якщо $F(x)$ є будь-якою первісною функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то, оскільки $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ також є первісною, має місце співвідношення $\Phi(x)=F(x)+C$, де $C-$деяка стала. Очевидно, що $\Phi(a)=\int\limits_a^a f(t)\,dt=0$ згідно із властивістю (1.5) визначеного інтеграла. Отже маємо $0=F(a)+C$, звідки $C=-F(a)$. Тоді $\int\limits_a^x f(x)dx=F(x)-F(a)$. Зокрема, при $x=b$ дістаємо формулу (1.29).

Зауваження. Для скорочення запису різницю $F(b)-F(a)$ звичайно позначають символом “подвійної підстановки” $F(x)\Big|_a^b$, отже формула Ньютона-Лейбніца може бути записана у вигляді $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона-Лейбніца дає ефективний і простий спосіб обчислення визначеного інтеграла від *неперервної* функції, який не потребує громіздких і технічно складних операцій обчислення границь інтегральних сум. Треба лише знати *будь-яку первісну*. Для багатьох функцій, первісна яких може бути виражена у скінченному вигляді через елементарні функції, визначений інтеграл обчислюється безпосередньо за формулою Ньютона-Лейбніца. Однак треба бути впевненим, що функція $F(x)$, *формально знайдена* як $\int f(x)\,dx$, *дійсно є первісною* функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тобто *неперервна* в усіх без винятку точках відрізка $[a,b]$. Невиконання цієї умови може привести до помилкового результату. Наведемо деякі приклади.

Приклад 1.1. $\int\limits_0^1\left(e^x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx=\left[e^x+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right]_0^1=e+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}-e^0-$

$$-\frac{2}{\pi}\cos 0 = e - 1 - \frac{2}{\pi}.$$

Приклад 1.2. $$\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_{-2}^{0} \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = \left[arctg(x+2)\right]_{-2}^{0} =$$

$$= arctg2 - arctg0 = arctg2.$$

Приклад 1.3. $$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \arcsin^2 x \, d(\arcsin x) =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\arcsin^3 x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^3}{648}.$$

В наведених прикладах формально знайдені функції $F(x)$ визначені на *усьому* відрізку інтегрування і, оскільки ці функції є елементарними, вони неперервні *всюди* на цьому відрізку. Таким чином, знайдені функції $F(x)$ *справді є первісними*. Отже застосування формули Ньютона-Лейбніца у наведених прикладах *є обгрунтованим*.

Приклад 1.4. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$.

Розв'язання. Перш за все відзначимо, що

$$f(x) = \frac{1}{1+3\sin^2 x} > 0 \qquad \forall x \in [0,\pi].$$

Як і раніше, знайдемо формально функцію $F(x)$, розуміючи під символом $\int$ деяку первісну:

$$F(x) = \int \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int \frac{1}{1+4tg^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} arctg(2tgx).$$

Якщо вважати, що знайдена $F(x)$ дійсно є первісною на відрізку $[0,\pi]$, то отримаємо

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \left[\frac{1}{2} arctg(2tgx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(arctg0 - arctg0) = 0.$$

Результат невірний, оскільки інтеграл від *строго додатної* на відрізку інтегрування функції не може дорівнювати нулю. Справа в тому, що обрана за первісну функція $F(x)$ насправді нею не є, оскільки не визначена і має розрив першого роду в точці $x=\frac{\pi}{2}$. Дійсно,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{2}arctg(2tgx)=\frac{1}{2}arctg(+\infty)=\frac{\pi}{4},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{1}{2}arctg(2tgx)=\frac{1}{2}arctg(-\infty)=-\frac{\pi}{4}.$$

Вірний результат можна одержати, якщо знайти *іншу* функцію $F(x)$, яка була б неперервною на відрізку $[0,\pi]$, і обрати її за первісну. Наприклад, нею може бути функція

$$F(x)=\int\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\int\frac{1}{ctg^2x+4}\,\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{2}arctg(2ctgx).$$

Тоді маємо вірний результат:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\left[-\frac{1}{2}arctg(2ctgx)\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{2}\left[arctg(-\infty)-arctg(+\infty)\right]=\frac{\pi}{2}.$$

Зауваження. Показано також, що формула Ньютона-Лейбніца застосовна і тоді, коли функція $F(x)$ неперервна скрізь, окрім хоча б однієї з межових точок відрізка інтегрування, але має в цій точці відповідну скінченну односторонню границю. Тоді $F(x)$ може бути довизначена звичайним чином і, внаслідок цього, визнана неперервною на усьому відрізку, тобто первісною. Це ілюструється наступним прикладом.

__**Приклад 1.5.**__ Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi}\frac{dx}{5-4\cos x}$.

Розв'язання. Формально знайдена функція $F(x)=\frac{2}{3}arctg\left(3tg\frac{x}{2}\right)$, як бачимо, не визначена у точці $x=\pi$ (верхня межа інтегрування), тобто не є неперервною на відрізку $[0,\pi]$, а отже й не є первісною функції $f(x)=\frac{1}{5-4\cos x}$ на цьому відрізку. Проте, оскільки в точці $x=\pi$ існує скінченна границя зліва $F(\pi-0)=\lim\limits_{x\to\pi-0}F(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$, то, якщо покласти, як звичайно, $F(\pi)=F(\pi-0)$, функція $F(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}arctg\left(3tg\frac{x}{2}\right), & 0\le x<\pi,\\ \frac{\pi}{3}, & x=\pi\end{cases}$ буде не тільки визначеною, але й неперервною (зліва) у точці $x=\pi$. Отже $F(x)$ може бути обрана первісною функції $f(x)$ на відрізку $[0,\pi]$. Тому маємо

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{5-4\cos x}=\left[\frac{2}{3}arctg\left(3tg\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}arctg0=\frac{\pi}{3}.$$

Повертаючись до попереднього прикладу, слід визнати, що вірний результат можна було б отримати і за допомогою функції $F(x)=\frac{1}{2}arctg(2tgx)$, якщо відрізок $[0,\pi]$ розбити на два відрізки $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ й $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Тоді, враховуючи, що обидві односторонні границі $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm0}F(x)$ є скінченними і довизначивши $F(x)$ відповідним чином, тобто так, щоб вона була неперервною *на обох* відрізках, отримали б вірний результат

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\left[\frac{1}{2}arctg(2tgx)\right]_0^{\pi/2}+$$

$$+\left[\frac{1}{2}arctg(2tgx)\right]_{\pi/2}^{\pi}=\left(\frac{\pi}{4}-0\right)+\left[0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\pi}{2}.$$

1.6.3. Інтегрування кусково-неперервних функцій. Узагальнена формула Ньютона-Лейбніца

Досі йшлося про обчислення визначених інтегралів від *неперервних* функцій. Інтегрування *кусково-неперервних* функцій розглянемо окремо.

По-перше, обчислення таких інтегралів можна проводити, розбиваючи увесь відрізок інтегрування на *проміжки неперервності* підінтегральної функції. Довизначивши її при необхідності до неперервної на кожному з *відрізків*, що відповідають вказаним проміжкам, на підставі властивості 9 (п.1.5.4) та користуючись властивістю 3 (п.1.5.1), знаходимо шуканий інтеграл як суму інтегралів на усіх відрізках.

Зауваження. На практиці, як правило, *одразу* розглядають суму інтегралів на відповідних *відрізках, вважаючи* на підставі властивості 9 підінтегральну функцію вже *довизначеною до неперервної* на цих відрізках. Наприклад (рис.1.2)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx .$$

По-друге, якщо підінтегральна функція $f(x)$ має на відрізку інтегрування $[a,b]$ так звану *узагальнену первісну* $F(x)$, то обчислити інтеграл можна також за ***узагальненою формулою Ньютона-Лейбніца***:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) . \tag{1.30}$$

Нагадаємо, що функція $F(x)$ називається ***узагальненою первісною*** інтегровної (тобто обмеженої, але не обов'язково неперервної) функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, якщо на цьому відрізку:

1) $F(x)$ неперервна;
2) рівність $F'(x) = f(x)$ виконується всюди, окрім, може бути, скінченного числа точок розриву функції $f(x)$.

Зазначимо, що у випадку неперервної функції $f(x)$ це означення збігається з означенням первісної у звичайному розумінні.

Наведемо деякі приклади.

<u>**Приклад 1.6.**</u> Обчислити інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, де $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x < 0, \\ \sin\dfrac{3x}{2}, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

Розв'язання. Підінтегральна функція є кусково-неперервною на відрізку $[-\pi,\pi]$. Якщо ми спробуємо, як і раніше, формально знайти $F(x)$, то отримаємо

$$F(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0, \\ -\dfrac{2}{3}\cos\dfrac{3x}{2}, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$ Очевидно, що ця функція не є узагальненою первісною, оскільки вона має розрив першого роду у точці $x=0$:

$$\lim_{x\to 0-0} F(x) = \lim_{x\to 0-0} x = 0, \quad \lim_{x\to 0+0} F(x) = \lim_{x\to 0+0}\left(-\frac{2}{3}\cos\frac{3x}{2}\right) = -\frac{2}{3}.$$

Тому формула (1.30) незастосовна, і інтеграл обчислюється на підставі властивостей 3 і 9, а саме:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi} \sin\frac{3x}{2}dx = x\,\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{3}\cos\frac{3x}{2}\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= 0-(-\pi)-\frac{2}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2}-\cos 0\right) = \pi + \frac{2}{3}.$$

Приклад 1.7. Обчислити інтеграл $\int\limits_{1/e}^{e} f(x)\,dx$, де $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & \dfrac{1}{e} \le x < 1, \\ \dfrac{1}{x}, & 1 \le x \le e. \end{cases}$

Розв'язання. Підінтегральна функція є кусково-неперервною на відрізку $\left[\dfrac{1}{e}, e\right]$. Її графік наведений на рис. 1.5.

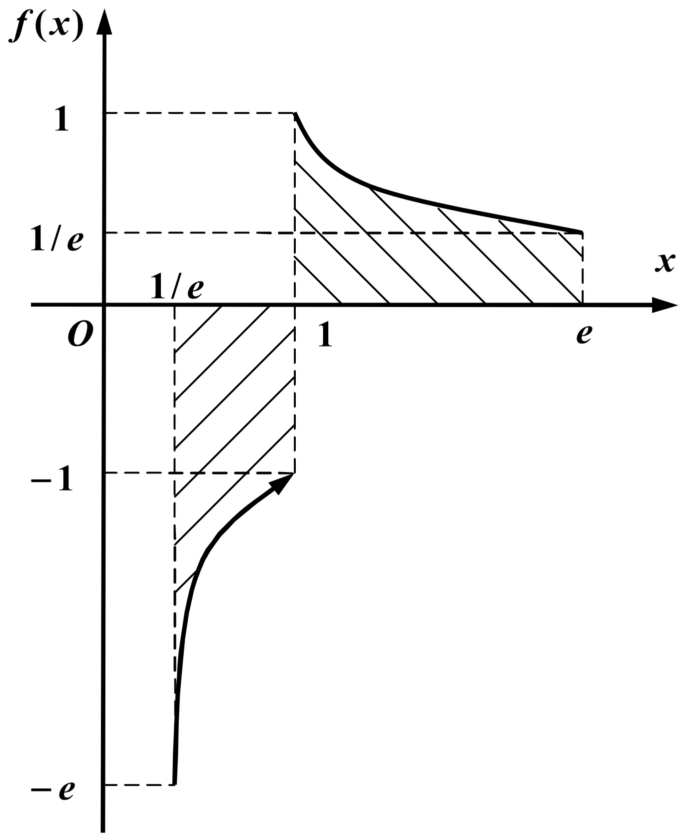

Рис. 1.5

Оскільки у даному випадку функція $F(x)=\begin{cases}-\ln x, & \frac{1}{e}\le x<1,\\ \ln x, & 1\le x\le e\end{cases}=|\ln x|$

неперервна при $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$ (рис. 1.6) й $F'(x)=f(x)$ всюди на $\left[\frac{1}{e},e\right]$, окрім точки $x=1$, то ця функція, згідно з означенням, є узагальненою первісною функції $f(x)$ на відрізку інтегрування. Тому за узагальненою формулою Ньютона-Лейбніца маємо

$$\int_{1/e}^{e} f(x)dx=|\ln x|\Big|_{1/e}^{e}=|\ln e|-\left|\ln\frac{1}{e}\right|=1-1=0.$$

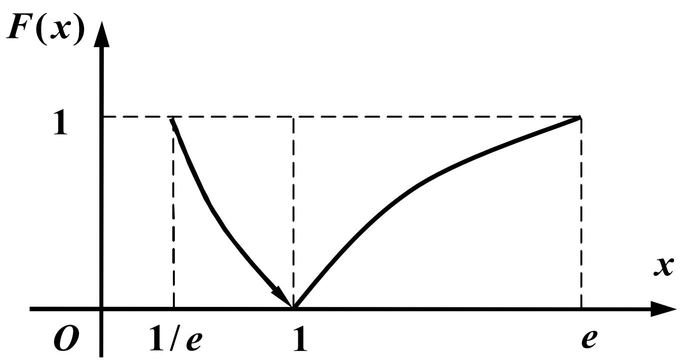

Рис. 1.6

Отриманий результат відповідає рис. 1.5 (площі заштрихованих криволінійних трапецій дорівнюють одна одній), а також результату, знайденому безпосередньо, на підставі властивостей 9 і 3:

$$\int_{1/e}^{e} f(x)dx=\int_{1/e}^{1}\left(-\frac{1}{x}\right)dx+\int_{1}^{e}\frac{1}{x}dx=-\ln x\Big|_{1/e}^{1}+\ln x\Big|_{1}^{e}=-\left(\ln 1-\ln\frac{1}{e}\right)+(\ln e-\ln 1)=$$

$$=-\ln e+\ln e=0.$$

На завершення відзначимо, що інтеграли від кусково-неперервних функцій досить часто зустрічаються при розв'язанні багатьох задач, зокрема, при розкладанні функцій у тригонометричні ряди. Як буде показано у гл. 2, використання узагальненої первісної дозволяє значно спростити дослідження збіжності невласних інтегралів від функцій, необмежених на відрізку інтегрування, а також обчислення цих інтегралів в разі їх існування.

1.6.4. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема 1.7. Нехай треба обчислити інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, де функція $f(x)$ *неперервна* на відрізку $[a,b]$.

Якщо виконуються умови:

1) функція $\varphi(t)$ неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha,\beta]$;

2) $\varphi(\alpha)=a,\ \ \varphi(\beta)=b$;

3) при змінюванні змінної t на відрізку $[\alpha,\beta]$ значення функції $x=\varphi(t)$ не виходять за межі відрізку $[a,b]$,

то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt. \tag{1.31}$$

Формула (1.31) називається ***формулою заміни змінної*** (або ***підстановки***) у визначеному інтегралі.

Д о в е д е н н я. Розглянемо складену функцію $F\left[\varphi(t)\right]$, де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ (ця первісна існує, оскільки $f(x)$ неперервна на $[a,b]$). Тоді справджується рівність $F'(x)=f(x)\ \ \forall x\in[a,b]$.

За правилом диференціювання складеної функції маємо

$$\frac{d}{dt}F\left[\varphi(t)\right]=F'_\varphi\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t),$$

отже функція $F\left[\varphi(t)\right]$ є первісною функції $f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha,\beta]$.

Звідси за формулою Ньютона-Лейбніца та на підставі умови 2) теореми одночасно маємо

$$\int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=F\left[\varphi(t)\right]\Big|_\alpha^\beta=F\left[\varphi(\beta)\right]-F\left[\varphi(\alpha)\right]=F(b)-F(a)$$

та

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

що і доводить рівність (1.31).

Практичне застосування даної теореми потребує зробити ряд зауважень.

По-перше, на відміну від заміни змінної у невизначеному інтегралі, заміна змінної у визначеному інтегралі не потребує повернення до початкової змінної. Треба лише змінити межі інтегрування за формулами $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$ де $\varphi^{-1}(t)$ – функція, обернена до функції $\varphi(t)$ (існує за умовами теореми).

По-друге, якщо функція $\varphi(t)$ не монотонна, то може статися, що нові межі інтегрування будуть знайдені неоднозначно. Тому на практиці заміну змінної радять проводити, наскільки це можливо, за допомогою монотонних неперервно диференційовних функцій. Зазначимо також, що вимога монотонності функції $\varphi(t)$ знімає з функції $f(x)$ вимогу її неперервності. Вона повинна бути лише *інтегровною*, але ж не обов'язково неперервною.

По-третє, іноді набагато зручніше замість підстановки $x = \varphi(t)$ застосувати так звану "обернену" підстановку $t = \psi(x)$, де функція $\psi(x)$ строго монотонна і неперервно диференційовна на відрізку $[a, b]$, а множиною її значень є відрізок $[\alpha, \beta]$. Тоді існує обернена функція $x = \psi^{-1}(t)$, яка задовольняє умови теореми, а нові межі інтегрування визначаються безпосередньо рівностями $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$. Отже в цьому випадку маємо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\psi^{-1}(t)\right]\left[\psi^{-1}(t)\right]' dt. \tag{1.32}$$

На завершення підкреслимо, що при заміні змінної у визначеному інтегралі треба уважно стежити за виконанням *усіх* умов теореми, зокрема за *однозначністю* як прямої, так і оберненої функцій. В протилежному випадку можна отримати невірний результат.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.8. Обчислити інтеграл $\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція неперервна на відрізку $[3, 4]$. Застосуємо підстановку $x = \frac{1}{t}$. Нові межі інтегрування α і β знайдемо відповідно з рівнянь $3 = \frac{1}{\alpha}$ і $4 = \frac{1}{\beta}$, отже $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{4}$. Функція $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ задовольняє умови теореми, оскільки на відрізку $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right]$ вона неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}$, $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = 3$, $\varphi\left(\frac{1}{4}\right) = 4$ і, якщо $\frac{1}{3} \le t \le \frac{1}{4}$, то $3 \le \varphi(t) \le 4$ (останнє витікає з монотонності $\varphi(t)$ на даному відрізку). Тоді, оскільки $\sqrt{t^2} = |t| = t$ при $3 \le t \le 4$, маємо

$$\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}} = -\int_{1/3}^{1/4} \frac{dt}{t\sqrt{25 - \frac{1}{t^2}}} = -\int_{1/3}^{1/4} \frac{dt}{\sqrt{25t^2 - 1}} =$$

$$= \left[-\frac{1}{5}\ln\left|5t + \sqrt{25t^2 - 1}\right|\right]_{1/3}^{1/4} = -\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}.$$

<u>Приклад 1.9.</u> Обчислити інтеграл $\int_0^{3\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 8}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція на відрізку $[0,\ 3\ln 2]$ неперервна. Скористаємось підстановкою $t = \sqrt{e^x + 8}$. Тоді нові межі інтегрування обчислюються безпосередньо: $\alpha = \sqrt{e^0 + 8} = 3$, $\beta = \sqrt{e^{3\ln 2} + 8} = 4$. Оскільки функція $\psi(x) = \sqrt{e^x + 8}$ строго монотонна (зростає) і неперервна на відрізку $[0,\ 3\ln 2]$, то існує обернена функція $x = \ln\left|t^2 - 8\right|$, яка на відрізку $[3, 4]$ також монотонно зростає (від 0 до $3\ln 2$) і неперервна разом зі своєю похідною $x' = \frac{2t}{t^2 - 8}$, тобто задовольняє умови теореми. Тоді

$$\int_0^{3\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 8}} = 2\int_3^4 \frac{dt}{t^2 - 8} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t - 2\sqrt{2}}{t + 2\sqrt{2}}\right|\Bigg|_3^4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2\ln\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} + \ln 2\right).$$

<u>Приклад 1.10.</u> Обчислити інтеграл $\int_1^5 (x - 3)^2 dx$ за допомогою підстановки $(x - 3)^2 = t$.

Розв'язання. Обернена функція $x = 3 \pm \sqrt{t}$ двозначна. Тому відрізок інтегрування $[1, 5]$ треба розбити на два відрізки $[1, 3]$ й $[3,5]$ і в першому інтегралі покласти $x = 3 - \sqrt{t}$, а в другому $x = 3 + \sqrt{t}$. Тоді будемо мати

$$\int_1^5 (x - 3)^2 dx = -\int_4^0 t\frac{dt}{2\sqrt{t}} + \int_0^4 t\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^4 \sqrt{t}\, dt = \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^4 = \frac{16}{3}.$$

Безпосереднє обчислення дає той самий результат:

$$\int_1^5 (x-3)^2 dx = \left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_1^5 = \frac{1}{3}\left[2^3-(-2)^3\right] = \frac{16}{3}.$$

Приклад 1.11. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int_{-1/2}^{-\sqrt{3}/2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx$.

Розв'язання. Нехай $x = \sin t$. Нові межі інтегрування знайдемо відповідно з рівнянь $-\frac{1}{2} = \sin\alpha$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\beta$. Обидва рівняння мають нескінченну множину розв'язків, з яких ми можемо, взагалі кажучи, вибрати *довільну* пару. Але функція $\varphi(t) = \sin t$ не є монотонною, тому пара α, β повинна бути вибрана такою, щоб на відповідному відрізку $[\alpha, \beta]$ ця функція задовольняла умови теореми. Зокрема це стосується умови 3. Зазначимо, що таких "можливих" пар (як і "неможливих") буде нескінченна кількість.

Виберемо $\alpha = \frac{7\pi}{6}$, $\beta = \frac{4\pi}{3}$. На відрізку $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$ функція $\varphi(t) = \sin t$ задовольняє усі умови теореми. Враховуючи, що $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} =$ $t \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$, будемо мати

$$\int_{-1/2}^{-\sqrt{3}/2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx = -\int_{7\pi/6}^{4\pi/3} \frac{\cos t \cdot \cos t}{\sin^2 t}\, dt = \int_{7\pi/6}^{4\pi/3} \frac{\sin^2 t - 1}{\sin^2 t}\, dt = [t + ctgt]\Big|_{7\pi/6}^{4\pi/3} =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}.$$

Зауваження. Якби ми обрали іншу пару, наприклад $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, $\beta = -\frac{\pi}{3}$ (вона, як неважко перевірити, також є "можливою"), то, з урахуванням того, що $\sqrt{1-x^2} = |\cos t| = \cos t$ при $t \in \left[-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right]$, мали б той самий результат. Серед "неможливих" укажемо, наприклад, пару $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, $\beta = -\frac{2\pi}{3}$. Це так, оскільки на відрізку $\left[-\frac{\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}\right]$ значення функції $\sin t$ виходять за межі заданого відрізку $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, тобто порушується умова 3 теореми.

<u>Приклад 1.12.</u> Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$ додатна і неперервна на відрізку $[0,2\pi]$. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $tg\frac{x}{2} = t$. Тоді обидві нові межі інтегрування, знайдені безпосередньо $(\alpha = tg0,\ \beta = \mathrm{tg}\pi)$, дорівнюють нулю. Але ж тоді і сам інтеграл дорівнює нулю, що неможливо для визначеного інтеграла від додатної функції.

Справа в тому, що функція $t = tg(x/2)$ на відрізку $[0,2\pi]$ не є неперервною, а саме, має розрив в точці $x = \pi$. Тому знайдена формально функція

$$F(x) = \int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}$$

також має розрив у згаданій точці, внаслідок чого вона не є первісною для функції $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$ на відрізку $[0,\ 2\pi]$. Але, оскільки існують скінченні границі

$$\lim_{x\to\pi-0} F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg(+\infty) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad \text{й} \quad \lim_{x\to\pi+0} F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

то функції

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} arcctg \frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}, & x \in [0,\pi), \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}, & x = \pi \end{cases} \quad \text{й} \quad F_2(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{\sqrt{3}}, & x = \pi, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}, & x \in (\pi,2\pi] \end{cases}$$

будуть неперервними відповідно на відрізках $[0,\pi]$ й $[\pi,\ 2\pi]$, а отже, первісними для $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$ на цих відрізках. Тоді, скориставшись адитивністю визначеного інтеграла і формулою Ньютона-Лейбніца, дістанемо правильний результат

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=F_1(\pi)-F_1(0)+F_2(2\pi)-F_2(\pi)=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-0+0-\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

На останнє відзначимо деякі ***частинні випадки*** заміни змінної у визначеному інтегралі.

1. Якщо функція $f(x)$ – парна, тобто $f(-x)=f(x)$, й неперервна на $[-a,a]$, то

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^{a}f(x)\,dx. \tag{1.33}$$

2. Якщо функція $f(x)$ – непарна, тобто $f(-x)=-f(x)$, й неперервна на $[-a,a]$, то

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0. \tag{1.34}$$

3. Якщо функція $f(x)$ – періодична з періодом T, тобто $f(x+T)=f(x)$, неперервна на $[a,a+T]$, то вона інтегровна на $[b,b+T]$ $(a\neq b)$, причому

$$\int_a^{a+T}f(x)\,dx=\int_b^{b+T}f(x)\,dx, \text{ де } a\neq b.$$

Наведені співвідношення дозволяють у багатьох випадках значно спростити обчислення визначених інтегралів. Наприклад, можна відразу сказати, що $\int_{-2}^{2}\frac{x^5dx}{x^8+1}=0$, оскільки підінтегральна функція непарна і неперервна на відрізку інтегрування $[-2,2]$, а $\int_{0,1\pi}^{2,1\pi}\cos^5 x\sin x\,dx=\int_0^{2\pi}\cos^5 x\sin x dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^5 x\sin x dx=0$, тому що підінтегральна функція непарна, всюди неперервна і має період $T=2\pi$.

1.6.5. Інтегрування частинами

Теорема 1.8. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ неперервно диференційовні на відрізку $[a,b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b u\,dv = uv\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (1.35)$$

Д о в е д е н н я. За правилом диференціювання добутку $d(uv) = udv + vdu$.

Оскільки первісною для $d(uv)$ буде добуток $u\,v$, то на підставі лінійності визначеного інтеграла та за формулою Ньютона-Лейбніца маємо

$$uv\,\Big|_a^b = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du.$$

звідки і випливає формула (1.35).

Зауваження. Формула (1.35) називається ***формулою інтегрування частинами***. Вона фактично зводить обчислення інтеграла $\int_a^b u\,dv$ до обчислення інтеграла $\int_a^b v\,du$. Для того, щоб у цьому був сенс, інтеграл $\int_a^b v\,du$ повинен бути простішим за вихідний $\int_a^b u\,dv$. Цього можна домогтися, якщо за функцію u у вихідному інтегралі обрати таку, що спрощується при диференціюванні. Якщо необхідно, формула інтегрування частинами може бути застосована послідовно кілька разів.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.13. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x^2 3^x\,dx$.

Розв'язання. Якщо підінтегральна функція має вигляд $P(x)a^{bx}$, $P(x)e^{bx}$, $P(x)\sin ax$, $P(x)\cos ax$, де $P(x)$ – многочлен степеня n, то приймаємо $u(x) = P(x)$. У цьому випадку формула (1.35) застосовується послідовно n разів.

Отже,

$$\int_0^1 x^2 3^x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2, & du = 2xdx, \\ dv = 3^x dx, & v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{matrix} \right| = \frac{3^x}{\ln 3} x^2 \Big|_0^1 - \frac{2}{\ln 3} \int_0^1 x 3^x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = 3^x dx, & v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{matrix} \right| = \frac{3}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3} \left[\frac{3^x}{\ln 3} x \Big|_0^1 - \frac{1}{\ln 3} \int_0^1 3^x dx \right] =$$

$$= \frac{3}{\ln 3} - \frac{6}{\ln^2 3} + \frac{2}{\ln^2 3} \cdot \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 3} \left(3 - \frac{6}{\ln 3} + \frac{4}{\ln^2 3} \right).$$

Приклад 1.14. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^e x^3 \ln x \, dx$.

Розв'язання. У випадку, коли підінтегральна функція має вигляд $P(x)\ln x$, $P(x)\arcsin ax$, $P(x)\arccos ax$, $P(x)\, arctgax$, $P(x)\, arcctgax$, де $P(x)$ – многочлен, то за $u(x)$ приймаємо множник при $P(x)$. Отже, в даному випадку

$$\int_1^e x^3 \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = x^3 dx, & v = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{x^4}{16} \Big|_1^e =$$

$$= \frac{1}{16}(3e^4 + 1).$$

Зауваження. Підінтегральна функція може мати вигляд $x^\lambda \ln x$. В цьому випадку також приймаємо $u = \ln x$.

Приклад 1.15. Обчислити інтеграл $\int\limits_3^4 \sqrt{25 - x^2} dx$.

Розв'язання. Цей інтеграл може бути віднесений до так званих "циклічних" інтегралів, тобто таких, які знаходяться з відповідного рівняння, отриманого після одно- або двократного інтегрування частинами. До "циклічних", зокрема, належать інтеграли $\int\limits_a^b c^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$ й $\int\limits_a^b c^{\alpha x} \cos \beta x \, dx$ (у частинному випадку

$c = e$). Отже,

$$\int_3^4 \sqrt{25-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} u=\sqrt{25-x^2}, & du=-\dfrac{x\,dx}{\sqrt{25-x^2}}, \\ dv=dx, & v=x \end{matrix} \right| = x\sqrt{25-x^2}\Big|_3^4 + \int_3^4 \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx =$$

$$= 0 - \int_3^4 \frac{25-x^2-25}{\sqrt{25-x^2}}dx = -\int_3^4 \sqrt{25-x^2}\,dx + 25\arcsin\frac{x}{5}\Big|_3^4 =$$

$$= -\int_3^4 \sqrt{25-x^2}\,dx + 25\left(\arcsin\frac{4}{5} - \arcsin\frac{3}{5}\right).$$

Таким чином, дістали рівняння відносно шуканого інтеграла

$$\int_3^4 \sqrt{25-x^2}\,dx = -\int_3^4 \sqrt{25-x^2}\,dx + 25\left(\arcsin\frac{4}{5} - \arcsin\frac{3}{5}\right),$$

з якого знаходимо

$$\int_3^4 \sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{25}{2}\left(\arcsin\frac{4}{5} - \arcsin\frac{3}{5}\right).$$

1.6.6. Наближені обчислення визначених інтегралів

Нехай треба обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де функція $f(x)$ неперервна на відрізку інтегрування $[a,b]$. Якщо яка-небудь її первісна $F(x)$ на цьому відрізку відома і є елементарною функцією, тобто виражається у скінченному вигляді через основні елементарні функції, то вказаний інтеграл можна обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца (1.29). Проте в багатьох випадках знайти первісну $F(x)$ дуже складно, хоча й відомо, що вона існує і є елементарною функцією. Тоді визначений інтеграл найчастіше обчислюють наближено. Якщо ж первісна $F(x)$ не є елементарною функцією, або підінтегральна функція $f(x)$ задана графічно чи таблицею, то формула

Ньютона-Лейбніца взагалі незастосовна. У цих випадках визначений інтеграл обчислюють наближено, користуючись відповідними квадратурними формулами. Найпростішими з них, а тому й найбільш уживаними, є формули прямокутників, трапецій і Сімпсона (формула парабол). Крім того, деякі з алгоритмів наближеного обчислення визначених інтегралів грунтуються саме на цих формулах. Тому наведемо їх з деякими зауваженнями.

Формула прямокутників

Нехай функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a,b]$ (рис. 1.7).

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n часткових відрізків рівновіддаленими точками $x_k = a + \frac{b-a}{n} k \ \ (k = \overline{0, n})$. Тоді довжина кожного з часткових відрізків буде дорівнювати $h = \frac{b-a}{n}$. *Середини* відрізків позначимо через c_k, отже, $c_k = a + \frac{2k-1}{2} h \ \ (k = \overline{1, n})$. Тоді площа східчастої фігури, що складається з n

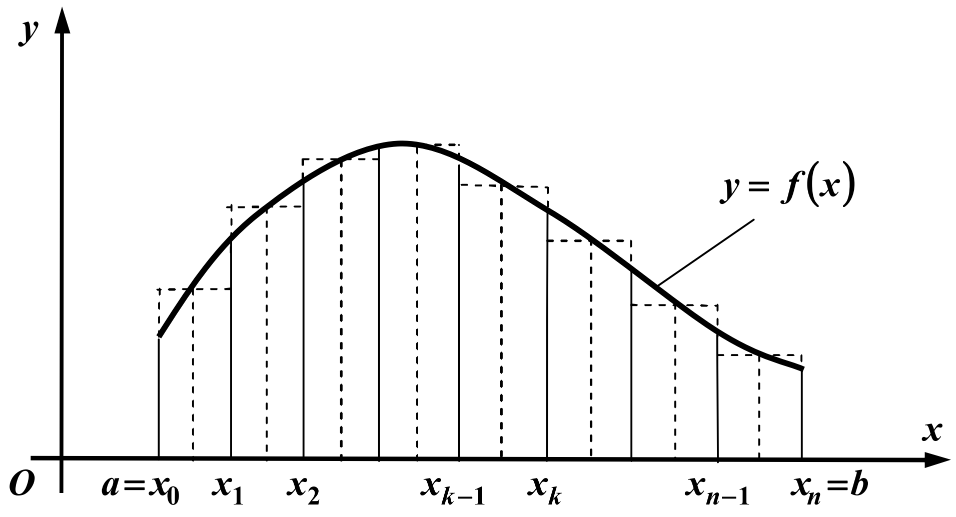

Рис. 1.7

прямокутників зі сторонами h й $f(c_k)$, буде наближено дорівнювати площі криволінійної трапеції. Отже, це буде означати, що

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{k=1}^{n} f(c_k), \qquad (1.36)$$

де $h = \dfrac{b-a}{n}$, $c_k = a + \dfrac{2k-1}{2}h$.

Формула (1.36) називається ***формулою прямокутників***. В подальшому, говорячи "формула прямокутників", ми будемо мати на увазі саме цю формулу. Вона може бути застосована також у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \tag{1.37}$$

якщо висоти прямокутників обчислюються на *лівих* кінцях $x_k = a + kh$ $(k = \overline{0, n-1})$ часткових відрізків, і у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=1}^{n} f(x_k), \tag{1.38}$$

якщо висоти обчислюються на *правих* кінцях $x_k = a + kh$ $(k = \overline{1, n})$.

Доведено, що коли функція $f(x)$ має на відрізку $[a,b]$ неперервну другу похідну $f''(x)$, то абсолютні похибки наближених рівностей (1.37) і (1.38) оцінюються за формулою

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \tag{1.39}$$

де $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$.

Для рівності ж (1.36) ця похибка оцінюється за формулою

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2. \tag{1.40}$$

Зауважимо, що формули (1.39), (1.40) дозволяють не тільки оцінювати абсолютні похибки відповідних квадратурних формул (якщо n задано), але й підбирати n так, щоб інтеграл міг бути обчислений з наперед заданою точністю.

Формула трапецій

Замінимо криву $y = f(x)$ ламаною лінією, ланки якої сполучають точки $P_{k-1}\left(x_{k-1}, f(x_{k-1})\right)$ і $P_k\left(x_k, f(x_k)\right)$, де $x_k = a + hk \ \ (k = \overline{0, n})$, $h = \dfrac{b-a}{n}$ (рис.1.8).

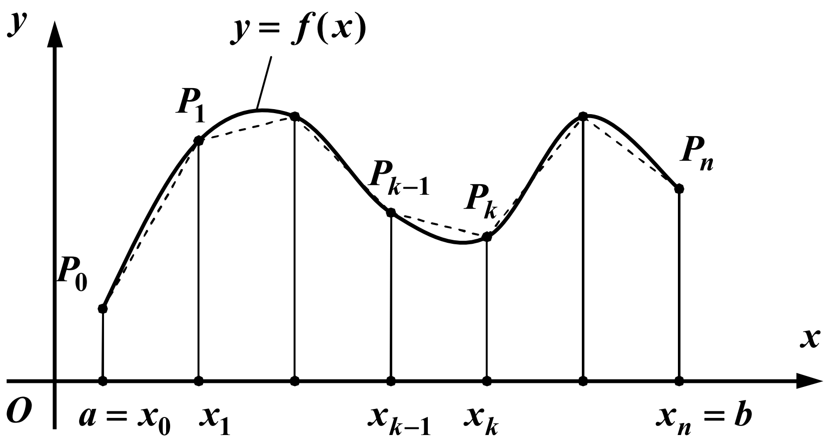

Рис. 1.8

Тоді площа криволінійної трапеції буде наближено дорівнювати площі фігури, обмеженої зверху ламаною $P_1 P_2 \ldots P_n$, тобто сумі площ трапецій з основами $f\left(x_{k-1}\right)$ й $f\left(x_k\right)$ і висотою h. Підсумувавши вказані площі, дістанемо формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(x_k\right)\right), \tag{1.41}$$

де $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Формула (1.41) називається ***формулою трапецій***. Якщо функція $f(x)$ має на відрізку $[a,b]$ неперервну другу похідну $f''(x)$, то абсолютна похибка наближеної рівності (1.41) оцінюється за формулою (1.39), тобто застосування формул прямокутників і трапецій призводить до похибки *одного порядку*, але похибка формули трапецій оцінюється *вдвічі більшою* величиною, ніж похибка формули прямокутників.

Зауважимо, що у випадку *лінійної* функції $f(x) = \alpha x + \beta$ обидві формули (прямокутників і трапецій) дають *точний* результат, оскільки $f''(x) = 0$.

Формула Сімпсона

Нехай, як і раніше, функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a,b]$.

Розіб'ємо увесь відрізок на *парне* число $2n$ однакових частинних відрізків довжиною $h=\dfrac{b-a}{2n}$ точками $x_i = a + hi \quad (i=\overline{0,\,2n})$ (рис. 1.9).

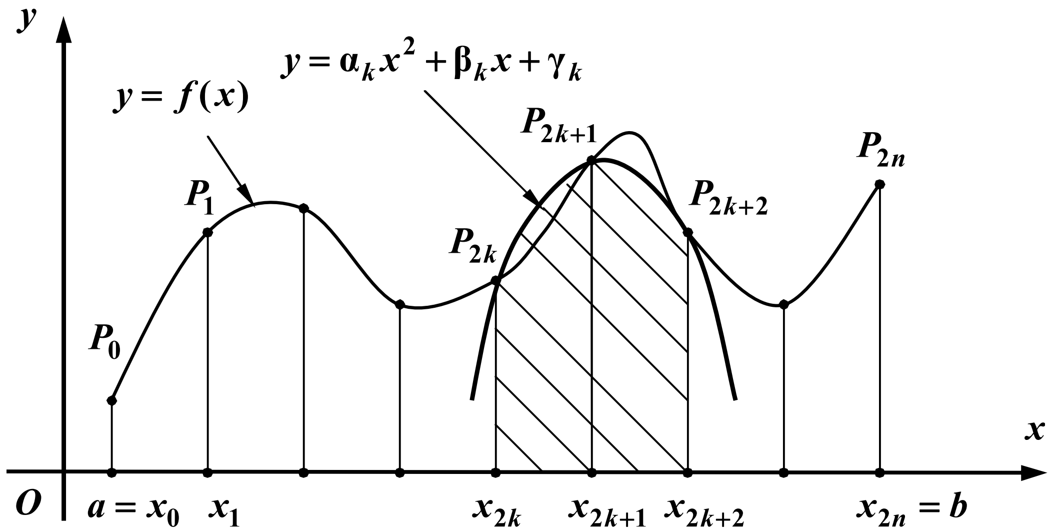

Рис. 1.9

Кожну пару суміжних криволінійних трапецій, побудованих на відрізках $[x_{2k}, x_{2k+1}]$ й $[x_{2k+1}, x_{2k+2}]$ $(k=\overline{0,\,n-1})$, замінимо однією криволінійною трапецією, що обмежена зверху дугою параболи $y=\alpha_k x^2+\beta_k x+\gamma_k$, яка сполучає точки $P_{2k}(x_{2k}, f(x_{2k}))$, $P_{2k+1}(x_{2k+1}, f(x_{2k+1}))$ і $P_{2k+2}(x_{2k+2}, f(x_{2k+2}))$. Площа цієї трапеції обчислюється за формулою

$$S_k = \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} \left(\alpha_k x^2 + \beta_k x + \gamma_k\right) dx,$$

де $\alpha_k = \dfrac{f(x_{2k}) + f(x_{2k+2}) - 2f(x_{2k+1})}{2h^2}$, $\beta_k = \dfrac{f(x_{2k+2}) - f(x_{2k})}{2h}$, $\gamma_k = f(x_{2k+1})$.

Підсумувавши площі усіх трапецій, дістанемо наближену рівність

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) \right], \qquad (1.42)$$

де

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad x_i = a + hi \quad (i = \overline{1,\, 2n-1}).$$

Формула (1.42) називається ***формулою Сімпсона*** або ***формулою парабол***. Доведено, що якщо функція $f(x)$ має на відрізку $[a, b]$ неперервну четверту похідну $f^{IV}(x)$, то абсолютна похибка наближеної рівності (1.42) оцінюється за формулою

$$\Delta \le \frac{(b-a)^5}{180\,(2n)^4} M_4, \tag{1.43}$$

де $M_4 = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{IV}(x) \right|$.

Формула Сімпсона дає *точний* результат, якщо функція $f(x)$ є *многочленом*, степінь якого не перевищує *трьох* (тоді $f^{IV}(x) = 0$). Порівняння формул (1.39), (1.40) з формулою (1.43) показує, що при одному і тому ж числі точок розбиття відрізка $[a, b]$ формула Сімпсона повинна давати результат суттєво точніший, ніж формули прямокутників і трапецій. Практика обчислень свідчить, що у більшості випадків це дійсно справджується.

Приклад 1.16. Розглянемо інтеграл $I = \int\limits_0^2 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$.

Розв'язання. Оскільки первісна $F(x)$ може бути знайдена у скінченному вигляді, а саме, $F(x) = 2\sqrt{1+x^3}$, то точне значення цього інтеграла неважко дістати за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$I = F(2) - F(0) = 2\left(\sqrt{1+2^3} - \sqrt{1+0}\right) = 4.$$

Обчислимо інтеграл за допомогою наведених формул прямокутників, трапецій і Сімпсона та порівняємо результати обчислень зі знайденим точним значенням.

Застосуємо формулу прямокутників (1.36). Для цього значення підінтегральної функції обчислимо у точках $c_k = a + \frac{2k-1}{2} h \quad (k = 1, 2, \ldots, 10)$:

k	c_k	$f(c_k)$	k	c_k	$f(c_k)$
1	0,1	0,0300	6	1,1	2,3776
2	0,3	0,2664	7	1,3	2,8355
3	0,5	0,7071	8	1,5	3,2271
4	0,7	1,2685	9	1,7	3,5655
5	0,9	1,8480	10	1,9	3,8632

Тоді за формулою прямокутників

$$I \approx h\left[f(c_1)+f(c_2)+\ldots f(c_{10})\right] = 0{,}2\cdot 19{,}9889 \approx 3{,}9978 .$$

Розіб’ємо тепер відрізок $[0,2]$ на $2n=10$ однакових частин і обчислимо значення підінтегральної функції у точках розбиття x_k з округленням у четвертому знаку після коми:

k	x_k	$f(x_k)$	k	x_k	$f(x_k)$
0	0,0	0,0000	6	1,2	2,6155
1	0,2	0,1195	7	1,4	3,0389
2	0,4	0,4653	8	1,6	3,4021
3	0,6	0,9794	9	1,8	3,7187
4	0,8	1,5614	10	2,0	4,0000
5	1,0	2,1213			

Оскільки $h=\dfrac{b-a}{2n}=\dfrac{2-0}{10}=0{,}2$, то за формулою трапецій (1.41) маємо

$$I \approx h\left[\frac{f(x_0)+f(x_{10})}{2}+f(x_1)+\ldots+f(x_9)\right] = 0{,}2\left[\frac{0+4}{2}+18{,}0221\right] \approx 4{,}0044 .$$

В той же час за формулою Сімпсона (1.42)

$$I \approx \frac{h}{3}\{\, f(x_0)+f(x_{10})+2\,[\, f(x_2)+\ldots+f(x_8)]+4[\, f(x_1)+\ldots+f(x_9)]\,\}=$$

$$=\frac{0{,}2}{3}\left(0+4+2\cdot 8{,}0443+4\cdot 9{,}9778\right) \approx 3{,}99999 .$$

Оскільки похибка округлення в усіх випадках – одна й та сама (можна вважати, що остаточна похибка округлення не перевищує 10^{-3}), то, порівнюючи усі отримані результати між собою, бачимо, що, як і очікувалося, найбільш точне значення інтеграла обчислено за формулою Сімпсона. При цьому помилка результату, отриманого за формулою прямокутників, вдвічі менша за помилку результату, отриманого за формулою трапецій.

<u>Приклад 1.17.</u> Розглянемо інтеграл $I = \int\limits_1^2 \frac{e^x}{x} dx$.

Розв'язання. На відміну від попереднього прикладу, ми не можемо знайти його точне значення (за формулою Ньютона-Лейбніца), оскільки первісна не виражається у скінченному вигляді через елементарні функції.

Обчислимо цей інтеграл наближено, застосувавши формулу Сімпсона. Розіб'ємо відрізок $[1,2]$ на $2n = 10$ однакових частин та складемо таблицю значень підінтегральної функції, обчислюючи їх з чотирма знаками після коми:

k	x_k	$f(x_k)$	k	x_k	$f(x_k)$
0	1,0	2,7183	6	1,6	3,0956
1	1,1	2,7311	7	1,7	3,2200
2	1,2	2,7668	8	1,8	3,3609
3	1,3	2,8225	9	1,9	3,5189
4	1,4	2,8966	10	2,0	3,6945
5	1,5	2,9878			

Оскільки $h = \frac{2-1}{10} = 0,1$, то за формулою Сімпсона маємо

$$I \approx \frac{0,1}{3}\left[2,7183 + 3,6945 + 2 \cdot 12,1199 + 4 \cdot 15,2803\right] \approx 3,0591.$$

Оцінимо абсолютну похибку знайденого результату.

Оскільки

$$f^{IV}(x) = \frac{e^x}{x^5}\left(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24\right),$$

то

$$\left|f^{IV}(x)\right| < e^2\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x^3}+\frac{24}{x^4}+\frac{24}{x^5}\right) \le 7{,}4(1+4+12+24+24) < 500.$$

Тоді абсолютна похибка власне формули Сімпсона

$$\Delta < \frac{1}{180\cdot 10^4}500 = 0{,}00028 < 0{,}0003.$$

Абсолютна похибка остаточного округлення не перевищує $\mathbf{0{,}0001}$. Отже загальна абсолютна похибка, яка виникла при застосуванні формули Сімпсона та від округлення значень функції, не перевищує $\mathbf{0{,}0004}$.

Таким чином,

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx = 3{,}0591 \pm 0{,}0004.$$

Слід зауважити, що насправді загальна похибка значно менша, оскільки оцінки (1.39), (1.40) та (1.43) доволі грубі. Точне значення цього інтеграла складає **3,059119998...**, тобто у знайденому нами наближеному значенні усі знаки вірні.

Сучасні системи комп'ютерної математики, зокрема, **Mathcad**, **Maple**, **Mathematica** дозволяють не тільки обчислювати визначені інтеграли з великою точністю, але й отримувати прийнятні вирази багатьох первісних, якщо вони існують в замкненому вигляді. При всьому цьому найпростіші способи наближених обчислень не втрачають своєї актуальності не тільки з методичної точки зору, але й як досить прийнятна альтернатива складним алгоритмам, і тоді, коли комп'ютера "немає під рукою", а в дуже високій точності обчислювань немає потреби.

2. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Поняття визначеного інтеграла як границі інтегральних сум вводилося за припущеннями, що проміжок інтегрування є замкненим, тобто скінченним, а підінтегральна функція на цьому проміжку необхідно обмежена. Якщо відповідний визначений інтеграл існує, то часто його називають визначеним інтегралом у *власному розумінні* або просто ***власним інтегралом***, а про підінтегральну функцію говорять, що на даному відрізку вона ***інтегровна у власному розумінні***. Відмова принаймні від одного зі згаданих припущень приводить нас до більш загального поняття – визначеного інтеграла у *невласному розумінні* або ***невласного*** інтеграла. Розрізняють невласні інтеграли ***першого роду*** (від функцій, обмежених на нескінченному проміжку) і невласні інтеграли ***другого роду*** (від функцій, не обмежених на скінченному проміжку). Слід зазначити, що таке відокремлення носить достатньо умовний характер, оскільки обидва типи інтегралів можуть бути поєднані, але з методичної точки зору воно цілком виправдане.

2.1. Невласні інтеграли першого роду

2.1.1. Означення та геометричний зміст

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a,+\infty)$ й інтегровна у звичайному розумінні на будь-якому відрізку $[a,B]$ $(B>a)$, тобто визначений інтеграл $\int_a^B f(x)dx$ існує при усякому $B>a$.

Невласним інтегралом першого роду функції $f(x)$ ***на проміжку*** $[a,+\infty)$ (або ***невласним інтегралом першого роду з нескінченною верхньою межею***) називається границя $\lim\limits_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx$, яка позначається символом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Таким чином, *за означенням,*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx. \tag{2.1}$$

Якщо ця границя скінченна, то говорять, що інтеграл (2.1) ***існує*** або ***збігається***, а функція $f(x)$ називається ***інтегровною у невласному розумінні*** *на проміжку* $[a,+\infty)$. Якщо ж границя (2.1) нескінченна або взагалі не існує, то про відповідний інтеграл говорять, що він ***не існує*** або ***розбігається***, а функція $f(x)$ називається *неінтегровною* на даному проміжку.

Аналогічно визначається і позначається ***невласний інтеграл першого роду функції*** $f(x)$ ***на проміжку*** $(-\infty,b]$ (або ***невласний інтеграл першого роду з нескінченною нижньою межею***)

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to -\infty}\int_{A}^{b} f(x)dx. \tag{2.2}$$

Збіжність (розбіжність) цього інтеграла й інтегровність (неінтегровність) функції $f(x)$ на відповідному проміжку визначаються так само, як і для інтеграла (2.1).

Невласний інтеграл першого роду функції $f(x)$ ***на проміжку*** $(-\infty,+\infty)$ (або ***невласний інтеграл першого роду з нескінченними межами***) визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to -\infty \\ B\to +\infty}}\int_{A}^{B} f(x)dx, \tag{2.3}$$

де граничні переходи по A і по B повинні бути *незалежними* один від одного. В цьому випадку, взявши *довільну* точку $x = c$, можна покласти

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx. \tag{2.3$'$}$$

Неважко бачити, що цей інтеграл фактично є сумою попередніх інтегралів, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to -\infty}\int_{A}^{c} f(x)dx + \lim_{B\to +\infty}\int_{c}^{B} f(x)dx. \tag{2.3$''$}$$

Вочевидь, це означення не залежить від вибору точки $x = c$.

Інтеграл $(2.3')$, а, отже, і (2.3), вважається *збіжним* тільки у тому випадку, коли одночасно *збігаються обидва* інтеграли справа і *розбіжним*, коли *розбігається хоча б один* зі вказаних інтегралів. Стосовно рівності $(2.3'')$ це означає, що інтеграл збігається тоді і лише тоді, коли *обидві* границі, знайдені *незалежно* одна від одної, є *скінченними*, і розбігається, коли *принаймні одна* з цих границь нескінченна чи взагалі не існує. Відповідно до цього функція $f(x)$ називається *інтегровною* або *неінтегровною* на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

Зауваження. Границя

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \tag{2.4}$$

у разі її скінченності називається ***головним значенням*** (за Коші) невласного інтеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ і позначаєтья символом $\mathbf{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (від початкових букв слів *“Valeur principale”*, що в перекладі с французького означає *“головне значення”*). В цьому випадку говорять, що *інтеграл* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *існує* або *збігається “у змісті головного значення”*. З існування (збіжності) невласного інтеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ у *звичайному змісті*, тобто з існування й скінченності *обох* границь *окремо* у рівності $(2.3'')$ випливає його існування (збіжність) й у змісті головного значення. *Обернене твердження*, взагалі кажучи, *невірне*.

Таким чином, з наведених означень випливає, що невласні інтеграли являють собою границі інтегралів зі змінними межами інтегрування, на відміну від звичайних визначених інтегралів, що є границями інтегральних сум.

Геометричний зміст, наприклад, інтеграла $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ полягає в тому, що якщо функція $f(x)$ невід’ємна на проміжку $[a,+\infty)$, то цей інтеграл (у разі його збіжності) чисельно дорівнює площі “нескінченної” криволінійної трапеції, зображеної на рис. 2.1. Якщо ж інтеграл розбігається, то площа цієї трапеції не може бути виражена ніяким означеним числом. Аналогічний зміст мають інтеграли (2.2) та (2.3).

На завершення відзначимо, що, оскільки невласний інтеграл є за суттю границею визначеного інтеграла зі змінною межею інтегрування, то властивості невласних інтегралів в цілому аналогічні властивостям звичайного визначеного інтеграла.

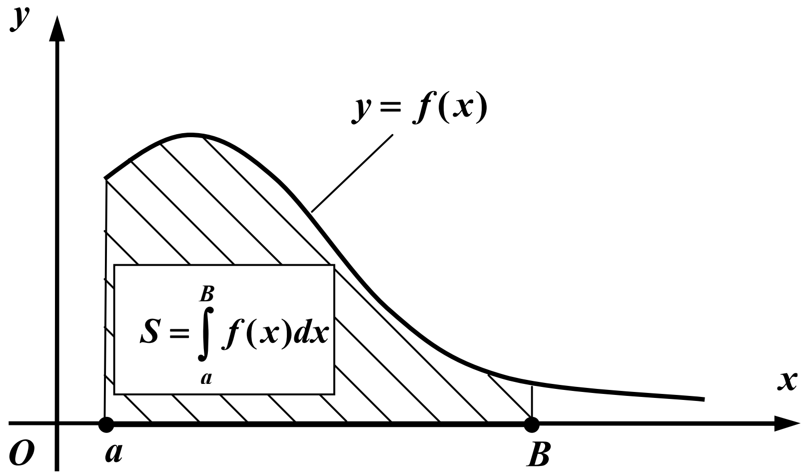

Рис. 2.1

2.1.2. Дослідження збіжності за допомогою означення. Обчислення збіжних інтегралів

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a,+\infty)$, інтегровна у власному розумінні на будь-якому відрізку $[a,B]$ $(B>a)$ і така, що первісну $F(x)$ ми *можемо знайти* у скінченному вигляді. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^B f(x)dx = F(B)-F(a)$$

і з означення (2.1) випливає, що

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} F(B)-F(a). \tag{2.5}$$

Отже збіжність або розбіжність інтеграла (2.1) залежить від того, чи буде скінченною границя $\lim\limits_{B\to+\infty} F(B)$ або ні. Якщо так, то це означає, що скінченна первісна $F(x)$ існує на *усьому* проміжку $[a,+\infty)$, інтеграл збігається за означенням і може бути обчислений за формулою (2.5), яка в цьому випадку називається ***узагальненою формулою Ньютона-Лейбніца для інтеграла*** $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Якщо ввести умовне позначення для *скінченної* границі

$$\lim_{B\to+\infty} F(B) = F(+\infty),$$

то формула (2.5) буде мати вигляд

$$\int_{a}^{B} f(x)dx = F(+\infty) - F(a). \qquad (2.6)$$

У випадку, коли границя $\lim\limits_{B\to+\infty} F(B)$ не є скінченною (нескінченна або взагалі не існує), *за означенням* інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ не існує, тобто розбігається.

За аналогічними припущеннями відносно функції $f(x)$ та її первісної $F(x)$ на підставі (2.2) та (2.3) будемо мати

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{A\to-\infty} F(A), \qquad (2.7)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_{A}^{B} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} F(B) - \lim_{A\to-\infty} F(A). \qquad (2.7')$$

Якщо границя $\lim\limits_{A\to-\infty} F(A)$ не є скінченною (тобто нескінченна або взагалі не існує), то інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ розбігається. Для розбіжності інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ достатньо, щоб принаймні одна з двох границь $\lim\limits_{A\to-\infty} F(A)$ або $\lim\limits_{B\to+\infty} F(B)$ не була скінченною.

Позначаючи умовно *скінченну* границю $\lim\limits_{A\to-\infty} F(A) = F(-\infty)$, дістанемо узагальнені формули Ньютона-Лейбніца для *збіжних* інтегралів (2.2) та (2.3) відповідно:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - F(-\infty), \qquad (2.8)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty). \qquad (2.9)$$

Нагадаємо, що в останньому випадку *обидві* границі повинні бути знайдені *незалежно* одна від одної.

Розглянемо деякі приклади.

<u>Приклад 2.1.</u> Обчислити невласні інтеграли першого роду або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x-5}$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx$; в) $\int\limits_{-\infty}^{\pi} \cos x \, dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 3^x dx$.

Розв'язання.

а) За означенням (тут і надалі первісна $F(x)$ знайдена окремо) маємо

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x-5} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{2}^{B} \frac{dx}{(x+2)^2-9} = \left\{ F(x) = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| \right\} =$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{B\to+\infty} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| \Bigg|_{1}^{B} \right] = \frac{1}{6}\left(\lim_{B\to+\infty} \ln\left|\frac{B-1}{B+5}\right| - \ln\frac{1}{7} \right) = \frac{1}{6}\left(\ln \lim_{B\to+\infty}\left|\frac{B-1}{B+5}\right| + \ln 7 \right) =$$

$$= \frac{1}{6}(\ln 1 + \ln 7) = \frac{1}{6}\ln 7.$$

Оскільки границя скінченна, то інтеграл збігається і дорівнює $\frac{1}{6}\ln 7$.

б) За означенням

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left\{ F(x) = \frac{1}{3}\ln^3 x \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{B\to+\infty} \left[\ln^3 x \Big|_{1}^{B} \right] = \frac{1}{3}\left(\lim_{B\to+\infty} \ln^3 B - \ln^3 1 \right).$$

Оскільки границя не є скінченною (а саме, $\lim\limits_{B\to+\infty} \ln^3 B = +\infty$), то інтеграл розбігається.

в) За означенням

$$\int\limits_{-\infty}^{\pi} \cos x \, dx = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{\pi} \cos x \, dx = \{F(x) = \sin x\} = \lim_{A\to-\infty} \left[\sin x \Big|_{A}^{\pi} \right] =$$

$$= \sin\pi - \lim_{A\to-\infty} \sin A.$$

Оскільки границя не є скінченною (а саме, $\lim\limits_{A\to-\infty}\sin A$ взагалі не існує), то інтеграл розбігається.

г) За означенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}}\int_A^B\frac{dx}{x^2+4x+5}=\{F(x)=arctg(x+2)\}=$$

$$=\lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}}\left[arctg(x+2)\Big|_A^B\right]=\lim_{B\to+\infty}arctg(B+2)-\lim_{A\to-\infty}arctg(A+2)=$$

$$=arctg(+\infty)-arctg(-\infty)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

Обидві границі, знайдені незалежно одна від одної, скінченні. Отже, інтеграл збігається і дорівнює π.

д) За означенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty}3^x dx=\lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}}\int_A^B 3^x dx=\left\{F(x)=\frac{3^x}{\ln 3}\right\}=\frac{1}{\ln 3}\lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}}\left[3^x\Big|_A^B\right]=$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\left[\lim_{B\to+\infty}3^B-\lim_{A\to-\infty}3^A\right].$$

Обидві границі знайдені незалежно одна від одної. Оскільки перша з них не є скінченною (а саме, нескінченна), а друга скінченна (дорівнює нулю), то інтеграл розбігається.

2.2. Невласні інтеграли другого роду

2.2.1. Означення та геометричний зміст

Нехай функція $f(x)$ визначена на скінченному проміжку $[a,b)$, інтегровна у власному розумінні на будь-якому відрізку $[a,b-\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$, але *необмежена* у всякому лівому напівоколі $(b-\varepsilon,b)$ точки $x=b$. У цьому випадку точка $x=b$ називається ***особливою точкою*** функції $f(x)$.

Зауваження. Необмеженість функції $f(x)$ у лівому напівоколі точки $x=b$ означає, що при наближенні зліва до цієї точки, тобто при $x\to b-0$, функція $f(x)$ необмежено зростає *за модулем*, але при цьому *не обов'язково є нескінченно великою*. Прикладом може служити функція $f(x)=\frac{1}{x-b}\sin\frac{1}{x-b}$ $(a\le x<b)$, яка в лівому напівоколі точки $x=b$ необмежена, але не може вважатися нескінченно великою, оскільки не монотонна (границя $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{1}{x-b}\sin\frac{1}{x-b}$ взагалі не існує). Можна лише сказати, що у точці $x=b$ ця функція має лівосторонній розрив другого роду (який не є нескінченним!).

Невласним інтегралом другого роду функції $f(x)$ ***на проміжку*** $[a,b)$ (або ***невласним інтегралом другого роду з особливою точкою*** $x=b$) називається границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, яка позначається символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таким чином, *за означенням*,

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (2.10)$$

Якщо ця границя скінченна, то говорять, що інтеграл (2.10) *існує* або *збігається,* а функція $f(x)$ називається ***інтегровною у невласному розумінні на проміжку*** $[a,b)$**.** Якщо ж границя (2.10) нескінченна, або взагалі не існує*,* то про відповідний інтеграл говорять, що він *не існує*, або *розбігається,* а функція $f(x)$ називається *неінтегровною* на даному проміжку.

Якщо функція $f(x)$ невід'ємна на проміжку $[a,b)$, то ***геометричний зміст*** даного інтеграла збігається зі змістом невласних інтегралів першого роду, а саме: якщо інтеграл збігається, то його значення чисельно дорівнює площі "нескінченної" криволінійної трапеції (рис. 2.2). Слід тільки зауважити, що в цьому разі "нескінченність" трапеції обумовлена необмеженістю функції $f(x)$.

У випадку розбіжності інтеграла площа вказаної трапеції не може бути виражена ніяким визначеним числом.

Нехай тепер функція $f(x)$ визначена на скінченному проміжку $(a,b]$, інтегровна у власному розумінні на будь-якому відрізку $[a+\eta,b]$, де $0<\eta<b-a$, але необмежена в усякому правому напівоколі $(a,a+\eta)$ точки $x=a$, котра, як і в попередньому випадку, називається *особливою* точкою функції $f(x)$ (рис. 2.3).

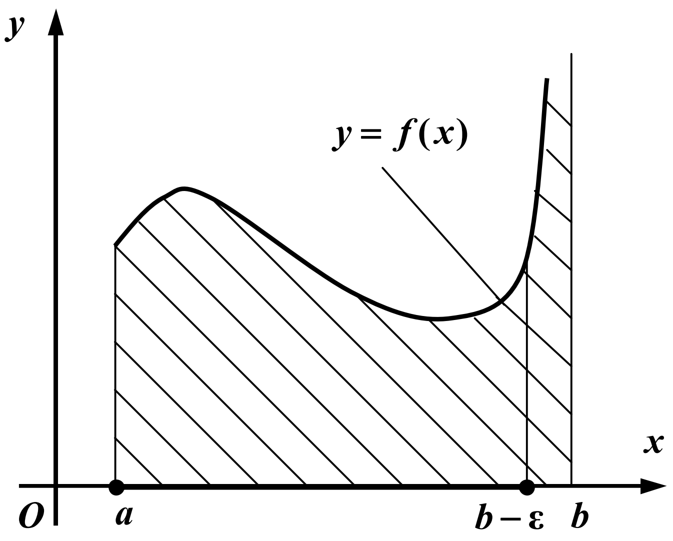

Рис. 2.2

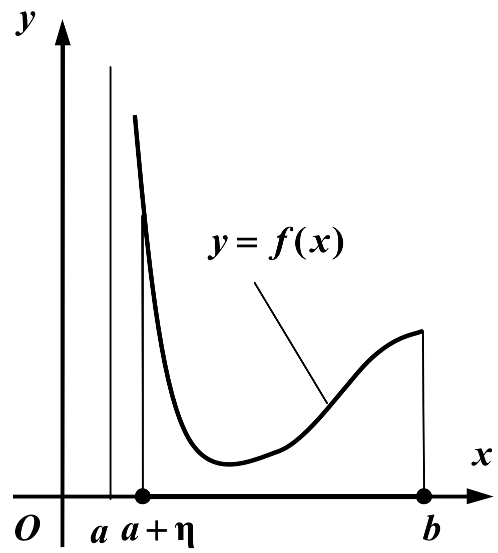

Рис. 2.3

Невласним інтегралом другого роду функції $f(x)$ ***на проміжку*** $(a, b]$ (або ***невласним інтегралом другого роду з особливою точкою*** $x = a$) називається границя $\lim\limits_{\eta \to 0+0} \int\limits_{a+\eta}^{b} f(x)dx$. Вона, як і раніше, позначається символом $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Таким чином, *за означенням,*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\eta \to 0+0} \int\limits_{a+\eta}^{b} f(x)dx. \tag{2.11}$$

Відносно збіжності (розбіжності) цього інтеграла й інтегровності функції $f(x)$ на проміжку $(a, b]$ зберігається та ж сама термінологія, що і в попередньому випадку.

Зауваження. Функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ може мати скінченне число (а у загальному випадку – навіть нескінченну множину) особливих точок. Оскільки відомо, що функції, які мають нескінченну множину особливих точок, напевно неінтегровні у невласному розумінні, ми обмежуємося випадком *скінченного* числа таких точок, в околах яких $f(x)$ необмежена, тоді як на кожному відрізку, що не містить особливих точок, функція обмежена і інтегровна.

Розглянемо деякі частинні випадки і покажемо, як вони зводяться до двох основних, що описані вище.

__Приклад 2.2.__ Нехай особливими точками функції $f(x)$ є одночасно точки $x=a$ й $x=b$. Це означає, що в правому напівоколі точки $x=a$ та в лівому напівоколі точки $x=b$ функція $f(x)$ необмежена, а на будь-якому відрізку $[a+\eta, b-\varepsilon]$ $(0<\eta, \varepsilon<b-a)$ вона інтегровна у власному розумінні (рис. 2.4).

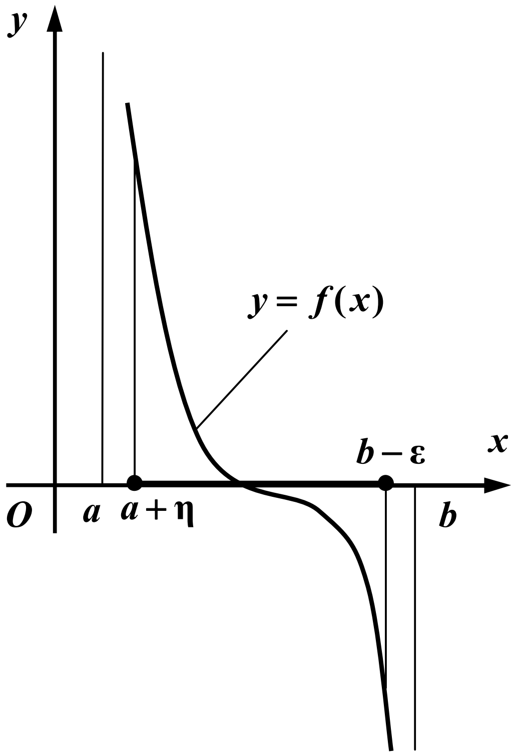

Рис. 2.4

Тоді, за означенням, покладають

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\eta\to 0+0 \\ \varepsilon\to 0+0}} \int_{a+\eta}^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad (2.12)$$

де обидва граничні переходи по η і по ε повинні здійснюватися *незалежно* один від одного. В цьому випадку, взявши *довільну* точку $x=c$, можна покласти

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (2.12')$$

Неважко бачити, що цей інтеграл фактично є сумою попередніх інтегралів, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0+0} \int_{a+\eta}^{c} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (2.12'')$$

Вочевидь, це означення не залежить від вибору точки $x=c$.

Інтеграл $(2.12')$, а, отже, і (2.12), існує, тобто збігається, а функція $f(x)$ вважається інтегровною на (a,b) у невласному розумінні тоді і лише тоді, коли існують *обидва* інтеграли справа. Це означає, що обидві відповідні границі $\lim\limits_{\eta\to 0+0}\int\limits_{a+\eta}^{c} f(x)\,dx$ та $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ у $(2.12'')$, знайдені *незалежно* одна від одної, існують і скінченні. Інтеграл розбігається, якщо хоча б один з інтегралів справа у $(2.12')$ розбігається, тобто відповідна границя у $(2.12'')$ нескінченна або взагалі не існує.

<u>Приклад 2.3.</u> Нехай особливою точкою функції $f(x)$ є *внутрішня* точка $x=c$ відрізка $[a,b]$ у тому розумінні, що функція необмежена одночасно в правому та лівому напівоколах цієї точки, а в іншій частині відрізка $[a,b]$ вона інтегровна у власному розумінні (рис.2.5).

Тоді, за означенням, покладають

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\eta\to 0+0\\ \varepsilon\to 0+0}}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)dx\right] = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta\to 0+0}\int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx\,.$$

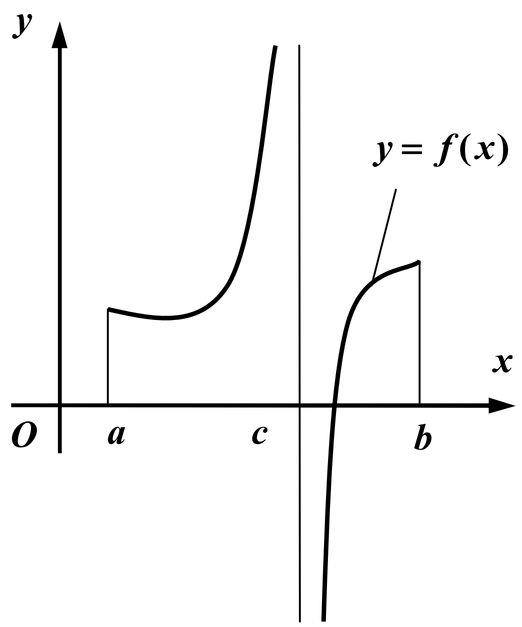

Рис. 2.5

Інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує, а функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$ у невласному розумінні тоді і лише тоді, коли існують обидва інтеграли справа, тобто обидві відповідні границі, знайдені незалежно одна від одної, існують і скінченні. Якщо ж принаймні один зі згаданих інтегралів розбігається (відповідна границя нескінченна або взагалі не існує), то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ також розбігається.

Зазначимо, що у випадку, коли функція $f(x)$ необмежена *лише з одного боку* від точки $x = c$, наприклад, у її правому напівоколі (рис. 2.6), інтеграл $\int_a^c f(x)dx$ на проміжку з протилежного боку є звичайним власним інтегралом, який завжди збігається, і в цьому разі ми фактично маємо другий основний випадок (2.11).

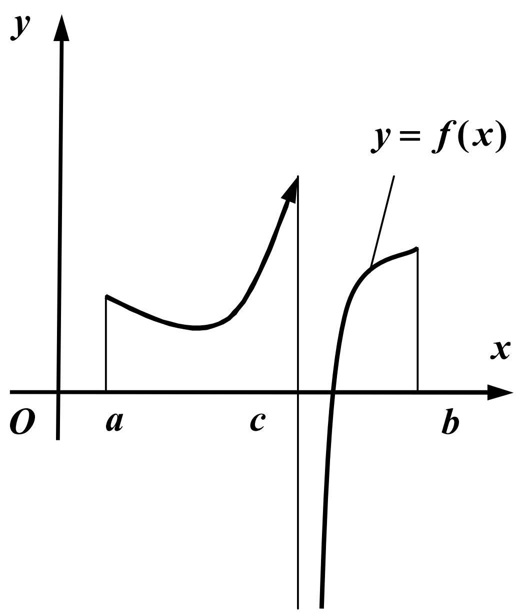

Рис. 2.6

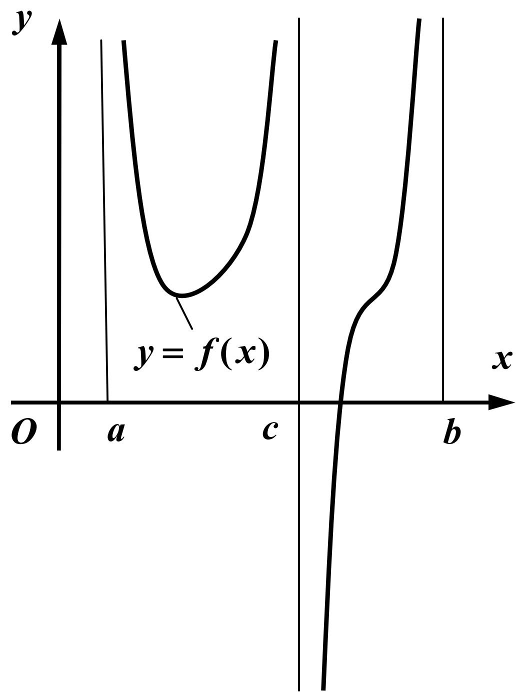

Рис. 2.7

Зауваження. Границя

$$\lim_{\eta\to 0+0}\left[\int_a^{c-\eta} f(x)dx + \int_{c+\eta}^b f(x)dx\right] = \lim_{\eta\to 0+0}\int_a^{c-\eta} f(x)\,dx + \lim_{\eta\to 0+0}\int_{c+\eta}^b f(x)\,dx$$

у разі її скінченності називається ***головним значенням*** (за Коші) невласного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ і позначається символом $\mathbf{V.p.}\int\limits_a^b f(x)dx$, отже,

$$\mathbf{V.p.}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0+0}\int\limits_a^{c-\eta} f(x)\,dx + \lim_{\eta\to 0+0}\int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx .$$

В цьому випадку говорять, що *інтеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *існує* або *збігається "у змісті головного значення"*. З існування (збіжності) невласного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ у *звичайному змісті*, тобто з існування й скінченності *обох* границь *окремо* в останній рівності випливає його існування (збіжність) й у змісті головного значення. *Обернене твердження*, взагалі кажучи, *невірне*.

__Приклад 2.4.__ Нехай тепер на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ має три особливі точки $x=a,\ x=b,\ x=c\ (a<c<b)$ (рис. 2.7). Тоді за означенням

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\eta\to 0+0\\ \varepsilon\to 0+0\\ \delta\to 0+0\\ \lambda\to 0+0}}\left[\int\limits_{a+\eta}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta}^{b-\lambda} f(x)dx\right]. \qquad (2.13)$$

Взявши всередині кожного з відрізків $[a,c]$ й $[c,b]$ довільні точки d та e відповідно, будемо мати

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\eta\to 0+0\\ \varepsilon\to 0+0}}\left[\int\limits_{a+\eta}^{d} f(x)dx + \int\limits_{d}^{c-\varepsilon} f(x)dx\right] + \lim_{\substack{\delta\to 0+0\\ \lambda\to 0+0}}\left[\int\limits_{c+\delta}^{e} f(x)dx + \int\limits_{e}^{b-\lambda} f(x)dx\right] =$$

$$= \lim_{\eta\to 0+0}\int\limits_{a+\eta}^{d} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{d}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0+0}\int\limits_{c+\delta}^{e} f(x)\,dx + \lim_{\lambda\to 0+0}\int\limits_{e}^{b-\lambda} f(x)\,dx .$$

Усе сказане раніше відносно існування інтеграла зліва розповсюджується і на даний випадок.

На завершення відзначимо, що властивості невласних інтегралів другого роду аналогічні властивостям звичайного визначеного інтеграла.

2.2.2. Дослідження збіжності за допомогою означення. Обчислення збіжних інтегралів

Нехай функція $f(x)$ визначена на скінченному проміжку $[a,b)$, інтегровна у власному розумінні на будь-якому відрізку $[a,b-\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$, але необмежена у всякому лівому напівоколі $(b-\varepsilon,b)$ точки $x=b$, тобто ця точка є особливою точкою $f(x)$. Якщо на відрізку $[a,b-\varepsilon]$ існує первісна $F(x)$ і ми *можемо її знайти* у скінченному вигляді, то за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = F(b-\varepsilon)-F(a).$$

Тоді з означення (2.10) випливає, що

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} F(b-\varepsilon)-F(a), \tag{2.14}$$

тобто існування невласного інтеграла (2.10) залежить від того, чи буде границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} F(b-\varepsilon)$ скінченною, чи ні. Якщо ця границя скінченна, то первісна існує на *усьому* відрізку $[a,b]$, інтеграл збігається за означенням і може бути обчислений за ***узагальненою формулою Ньютона-Лейбніца*** (2.14).

Якщо ж границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} F(b-\varepsilon)$ нескінченна або взагалі не існує, то інтеграл (2.10) розбігається за означенням.

За аналогічними припущеннями відносно первісної $F(x)$ на підставі формули Ньютона-Лейбніца та відповідних означень можна дістати наступне

$$\int_a^{b} f(x)dx \begin{Bmatrix}\text{особлива} \\ \text{точка } x=a\end{Bmatrix} = F(b)-\lim_{\eta\to 0+0} F(a+\eta), \tag{2.15}$$

$$\int_a^{b} f(x)dx \begin{Bmatrix}\text{особливі точки} \\ x=a,\ x=b\end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} F(b-\varepsilon)-\lim_{\eta\to 0+0} F(a+\eta), \tag{2.16}$$

$$\int_a^{b} f(x)dx \begin{Bmatrix}\text{особлива точка} \\ x=c\ (a<c<b)\end{Bmatrix} = F(b)-\lim_{\varepsilon\to 0+0} F(c-\varepsilon)+\lim_{\eta\to 0+0} F(c+\eta)-F(a), \tag{2.17}$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \begin{Bmatrix} \text{особливі точки } x=a, \\ x=b, x=c \ (a<c<b) \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} F(c-\varepsilon) - \lim_{\eta\to 0+0} F(a+\eta) +$$

$$+\lim_{\lambda\to 0+0} F(b-\lambda) - \lim_{\delta\to 0+0} F(c+\delta). \qquad (2.18)$$

Кожен з інтегралів зліва збігається тоді і лише тоді, коли *усі* границі справа у відповідній формулі скінченні. Тоді вона становить собою ***узагальнену формулу Ньютона-Лейбніца*** для даного інтеграла. У такому випадку говорять, що інтеграл *обчислений за означенням.*

Зауваження. На відміну від формул (2.6), (2.8) й (2.9), ми не будемо вводити тут якихось особливих позначень для скінченних границь.

Якщо ж хоча б одна з границь, що входить до складу відповідної формули, нескінченна або не існує, то говорять, що даний інтеграл *розбігається за означенням*.

З наведеного випливає, що зі збільшенням кількості особливих точок громіздкість обчислення невласного інтеграла або доведення його розбіжності за означенням швидко зростає.

Розглянемо приклади.

<u>Приклад 2.5.</u> Обчислити невласні інтеграли другого роду або довести їх розбіжність:

а) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\displaystyle\int\limits_2^3 \frac{dx}{(x-2)^3}$; в) $\displaystyle\int\limits_{-2}^3 \frac{dx}{x^2-x-6}$; г) $\displaystyle\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

Розв'язання.

а) За означенням

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \begin{Bmatrix} \textit{особлива} \\ \textit{точка } x=1 \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \{F(x)=\arcsin x\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left[\arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Границя існує і скінченна, отже інтеграл збігається і дорівнює $\dfrac{\pi}{2}$.

б) За означенням

$$\int\limits_2^3 \frac{dx}{(x-2)^3} \begin{Bmatrix} \textit{особлива} \\ \textit{точка } x=2 \end{Bmatrix} = \lim_{\eta\to 0+0} \int\limits_{2+\eta}^3 \frac{dx}{(x-2)^3} = \left\{ F(x) = -\frac{1}{2(x-2)^2} \right\} =$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\eta\to 0+0}\left[\frac{1}{(x-2)^2}\Bigg|_{2+\eta}^{3}\right]=-\frac{1}{2}\left(1-\lim_{\eta\to 0+0}\frac{1}{\eta^2}\right).$$

Границя нескінченна, отже, інтеграл розбігається.

в) За означенням

$$\int_{-2}^{3}\frac{dx}{x^2-x-6}\left\{\begin{matrix}\textit{особливі точки}\\ x=-2,\ x=3\end{matrix}\right\}=\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^2-x-6}+\int_{0}^{3}\frac{dx}{x^2-x-6}=$$

$$=\lim_{\eta\to 0+0}\int_{-2+\eta}^{0}\frac{dx}{(x+2)(x-3)}+\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{0}^{3-\varepsilon}\frac{dx}{(x+2)(x-3)}=\left\{F(x)=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|\right\}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{\eta\to 0+0}\left[\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|\Bigg|_{-2+\eta}^{0}\right]+\frac{1}{5}\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left[\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|\Bigg|_{0}^{3-\varepsilon}\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\lim_{\varepsilon\to 0+0}\ln\left|\frac{-\varepsilon}{5-\varepsilon}\right|-\lim_{\eta\to 0+0}\ln\left|\frac{\eta-5}{\eta}\right|\right).$$

Оскільки обидві границі нескінченні, то інтеграл розбігається.

г) За означенням $\displaystyle\int_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}\left\{\begin{matrix}\textit{особлива}\\ \textit{точка } x=4\end{matrix}\right\}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{2}^{4-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}+$

$$+\lim_{\eta\to 0+0}\int_{4+\eta}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}=\left\{F(x)=-3\sqrt[3]{4-x}\right\}=-3\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left[\sqrt[3]{4-x}\Bigg|_{2}^{4-\varepsilon}\right]-$$

$$-3\lim_{\eta\to 0+0}\left[\sqrt[3]{4-x}\Bigg|_{4+\eta}^{6}\right]=-3\left(\lim_{\varepsilon\to 0+0}\sqrt[3]{\varepsilon}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{-2}-\lim_{\eta\to 0+0}\sqrt[3]{-\eta}\right)=$$

$$=-3\left(0-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}-0\right)=6\sqrt[3]{2}.$$

Обидві границі скінченні, отже інтеграл збігається і дорівнює $6\sqrt[3]{2}$.

2.2.3. Використання узагальненої первісної

Розглянемо ще один спосіб дослідження невласних інтегралів другого роду, який грунтується на понятті *узагальненої первісної*.

Нехай функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ має одну чи декілька особливих точок і інтегровна (у власному розумінні) на будь-якій частині відрізка, такій, що не містить особливих точок. Нехай також існує функція $F(x)$, яка *неперервна* на *усьому* відрізку $[a,b]$, причому $F'(x)=f(x)$ всюди на $[a,b]$, за виключенням особливих точок (та ще, можливо, скінченного числа деяких точок), у яких $f(x)$ не визначена. Тоді функція $F(x)$ називається ***узагальненою первісною***, невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ *збігається* і обчислюється за ***узагальненою формулою Ньютона-Лейбніца***

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{2.19}$$

яка має такий самий вигляд, що й звичайна. Якщо ж узагальнена первісна не існує, то інтеграл *розбігається* (при цьому формула Ньютона-Лейбніца незастосовна).

Приклад 2.6. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$; б) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання.

а) В даному разі підінтегральна функція має дві особливі точки $x=-1$ й $x=3$, що є кінцями проміжку інтегрування. Знайдемо формально функцію $F(x)=\int f(x)\,dx$:

$$F(x)=\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{2}.$$

Оскільки $F(x)$ є елементарною, визначена, і тому неперервна, на *усьому* відрізку $[-1, 3]$ й $F'(x)=f(x)$ скрізь, окрім особливих точок $x=-1$ й $x=3$, то $F(x)$ є узагальненою первісною на відрізку $[-1,3]$. Отже, даний інтеграл збігається і обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца (2.19):

$$\int_{-1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \arcsin\frac{x-1}{2}\Big|_{-1}^{3} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

б) Підінтегральна функція має три особливі точки $x=-1$, $x=0$ та $x=1$. Знайдемо формально функцію $F(x)$: $F(x)=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Вона не визначена (а, отже, не є неперервною) в особливій точці $x=0$. Це означає, що узагальнена первісна на $[-1, 1]$ не існує. Тому формула Ньютона-

Лейбніца незастосовна й інтеграл розбігається. Зауважимо, що дослідження цього інтеграла за означенням було б набагато складнішим.

Використання узагальненої первісної значно спрощує дослідження невласних інтегралів, оскільки при цьому громіздке обчислення границь замінюється дослідженням на неперервність формально знайденої функції $F(x)=\int f(x)\,dx$: якщо $F(x)$ (як правило, елементарна функція) неперервна (тобто визначена) в кожній точці відрізка $[a,b]$, то вона є узагальненою первісною на $[a,b]$, інтеграл збігається і обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца; якщо ж $F(x)$ не є неперервною на $[a,b]$ (тобто не визначена хоча б в одній точці $[a,b]$), то це означає, що узагальнена первісна на $[a,b]$ не існує, внаслідок чого формула Ньютона-Лейбніца незастосовна і інтеграл розбігається за означенням.

2.3. Ознаки збіжності невласних інтегралів

При розв'язанні деяких задач насамперед треба знати, чи існує даний невласний інтеграл. Проте досить часто первісна у таких задачах або взагалі не виражається у скінченному вигляді, або виражається дуже складно. Це робить практично неможливим дослідження збіжності відповідного інтеграла за допомогою означення, тобто шляхом дослідження відомої первісної. У таких випадках збіжність (розбіжність) невласного інтеграла намагаються встановити за допомогою певних достатніх умов (так званих *ознак*) збіжності. Проте слід зазначити, що такий підхід може бути застосований також до невласних інтегралів з відомою первісною.

Назвемо $-\infty$ $(+\infty)$ ***лівою (правою) невласною особливою точкою*** функції $f(x)$, незалежно від того, буде чи не буде $f(x)$ при $x\to\pm\infty$ залишатися обмеженою. *Усі інші особливі точки* будемо називати ***власними***. Це дає змогу розглядати невласний інтеграл у вигляді $\int\limits_a^b f(x)dx$, маючи при цьому на увазі, що точки $x=a$ й $x=b$ можуть бути не тільки власними особливими точками, але й невласними. Наведемо деякі ознаки збіжності інтегралів від додатних на проміжку інтегрування функцій з особливою точкою (власною або невласною) $x = b$ (аналогічні ознаки справедливі і у випадку особливої точки $x = a$, а також коли підінтегральна функція від'ємна).

Теорема 2.1. ***(ознака порівняння).*** Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені на проміжку $[a,b)$ й інтегровні на будь-якому відрізку $[a,c] \subset [a,b)$. Якщо хоча б у *лівому* напівоколі точки $x = b$ виконується нерівність $0 \le f(x) \le g(x)$, то зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а з розбіжності інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Наслідком цієї теореми є

Теорема 2.2 ***("гранична" ознака порівняння).*** Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені на проміжку $[a,b)$ й інтегровні на будь-якому відрізку $[a,c] \subset [a,b)$, причому $f(x) > 0$, $g(x) > 0$. Якщо хоча б у *лівому* напівоколі точки $x = b$ існує границя (скінченна або нескінченна)

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = K,$$

то

а) при $0 \le K < +\infty$ зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

б) при $0 < K \le +\infty$ з розбіжності інтеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Наслідок теореми 2.2. При $0 < K < +\infty$ (тобто при скінченній й відмінній від нуля границі) обидва інтеграли або одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

Зауваження. При практичному застосуванні наведених ознак слід мати на увазі, що одна з функцій $f(x)$ або $g(x)$ *задана*, а інша *вибирається* для порівняння. У випадку застосування теореми 2.1 "ролі" функцій визначаються нерівностю $0 \le f(x) \le g(x)$ та збіжністю чи розбіжністю відповідних інтегралів. При застосуванні теореми 2.2 функція $f(x)$ є заданою, а $g(x)$ вибирається для порівняння. Отже треба мати набір функцій, для яких збіжність або розбіжність відповідного інтеграла відома.

Найчастіше при дослідженні інтегралів першого роду $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ використовують функції $\frac{1}{x^\lambda}$, оскільки відомо, що інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ $(a > 0)$ збігається при $\lambda > 1$ і розбігається при $0 < \lambda \le 1$.

При дослідженні інтегралів другого роду $\int\limits_a^b f(x)dx$ з особливою точкою $x = b$, використовують функції $\frac{1}{(b-x)^\lambda}$, оскільки відомо, що інтеграл $\int\limits_a^b \frac{1}{(b-x)^\lambda}$ збігається при $0 < \lambda < 1$ і розбігається при $\lambda \ge 1$.

При дослідженні інтегралів другого роду $\int\limits_a^b f(x)dx$ з особливою точкою $x = a$ для порівняння використовують функції $\frac{1}{(x-a)^\lambda}$, інтеграли від яких $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$ так само збігаються, якщо $0 < \lambda < 1$, і розбігаються, якщо $\lambda \ge 1$. Теорема 2.2 формулюється при цьому відносно особливої точки $x = a$ та її *правого* напівкола.

Складність практичного застосування теореми 2.1 полягає в необхідності складання коректної нерівності $f(x) \le g(x)$, де, в залежності від роду заданого невласного інтеграла, одна з функцій повинна мати вигляд $\frac{1}{x^\lambda}$, $\frac{1}{(b-x)^\lambda}$ або $\frac{1}{(x-a)^\lambda}$. Але ж це не завжди можливо. При застосуванні теореми 2.2 досить часто виникає необхідність розкриття невизначеності за допомогою правила

Лопіталя, тому треба уважно стежити за типом невизначеності на кожному етапі її розкриття $\left(\text{допустимі лише типи } \frac{0}{0} \text{ або } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Якщо функція $f(x)$ *знакозмінна*, то наведені ознаки безпосередньо незастосовні. Але справедлива

Теорема 2.3. Якщо інтеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ поготів збігається.

Слід зауважити, що обернене твердження, взагалі кажучи, може бути невірним. Також зауважимо, що у випадку, коли інтеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ розбігається, відносно збіжності інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ нічого певного сказати не можна: він може збігатись, а може й розбігатись. Внаслідок цього вводять такі означення.

Якщо інтеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ називають ***абсолютно збіжним***, а функцію $f(x)$ – ***абсолютно інтегровною*** на проміжку $[a,b)$.

Отже, ***абсолютно збіжний інтеграл збігається***.

Якщо інтеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ розбігається, а інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ збігається, то останній називають ***неабсолютно*** або ***умовно збіжним***.

Приклад 2.7. Дослідити збіжність інтегралів:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{x\,arctgx}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$; б) $\int_{\ln 2}^{+\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}dx$; в) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$; г) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$;

д) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^3}}$; е) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{2} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2-x-2}}\,dx$.

Розв'язання.

а) Підінтегральна функція $f(x)=\frac{x\,arctgx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$ на проміжку $[1,+\infty)$ має одну невласну особливу точку $b=+\infty$. Оскільки при $1 \le x < +\infty$ $\frac{\pi}{4} \le arctgx < \frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{xarctgx}{\sqrt[3]{1+x^4}} \ge \frac{\pi}{4}\,\frac{x}{\sqrt[3]{x^4+x^4}} = \frac{\pi}{4\sqrt[3]{2}\;\sqrt[3]{x}}.$$

Оберемо для порівняння функцію $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Оскільки інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ розбігається, то на підставі теореми 2.1 заданий інтеграл також розбігається.

б) Підінтегральна функція $f(x)=\sqrt{x}\,e^{-x}$ на проміжку $[\ln 2,+\infty)$ має одну невласну особливу точку $b=+\infty$. Оскільки $e^x > x^2$ при $x > \ln 2$, то справедлива нерівність $\sqrt{x}e^{-x}=\frac{\sqrt{x}}{e^x}<\frac{\sqrt{x}}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$. Вибираючи для порівняння у даному випадку функцію $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, інтеграл від якої $\int\limits_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ збігається, на підставі теореми 2.1 можемо зробити висновок, що заданий інтеграл також збігається.

в) Як і в попередніх прикладах, підінтегральна функція $f(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$ має на проміжку інтегрування одну невласну особливу точку $b=+\infty$. Однак в цьому випадку скласти нерівність $f(x)\le g(x)$, тобто вибрати для порівняння таку функцію, щоб можна було застосувати теорему 2.1, вже не просто. Тому застосуємо теорему 2.2, вибравши для порівняння функцію $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, інтеграл від якої $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ збігається. Одержимо $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x\cdot\sqrt{x^3}}{(1+x^2)}$.

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$ розкриємо за правилом Лопіталя:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{3}{2}\ln x\right)}{2x} \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2\sqrt{x}} = 0.$$

Границя скінченна і дорівнює нулю. Оскільки інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ збігається, то на підставі теореми 2.2 заданий інтеграл також збігається.

г) Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$ має на проміжку інтегрування одну власну особливу точку $a = 0$. Виберемо для порівняння функцію $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ і застосуємо теорему 2.2:

$$\lim_{x\to0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0+0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2+x^3}} = \lim_{x\to0+0} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+x^3}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to0+0} \frac{1}{1+x}} = 1.$$

Границя скінченна і, оскільки інтеграл $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ збігається, то за теоремою 2.2. заданий інтеграл також збігається.

д) Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^3}}$ на проміжку інтегрування $(-1,+\infty)$ має дві особливі точки: власну $a = -1$ й невласну $b = +\infty$. Оскільки за означенням $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^3}} = \int_{-1}^{c} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^3}} + \int_{c}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^3}}$, де $c -$ довільне число, $-1 < c < +\infty$, то необхідно дослідити збіжність кожного з інтегралів справа.

Розглянемо перший інтеграл. Виберемо для порівняння функцію $g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(x+1)^3}}$ і застосуємо теорему 2.2:

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-1+0} \frac{\sqrt[4]{(x+1)^3}}{\sqrt[4]{1+x^3}} = \lim_{x\to-1+0} \frac{\sqrt[4]{(x+1)^3}}{\sqrt[4]{(x+1)(x^2-x+1)}} =$$

$$= \lim_{x\to-1+0} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2-x+1}} = 0.$$

Оскільки інтеграл $\int_{-1}^{c} \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+1)^3}}$ збігається, то за теоремою 2.2 інтеграл

$\int\limits_{-1}^{c} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^3}}$ також збігається.

Розглянемо другий інтеграл. Виберемо для порівняння функцію $g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$. Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{1+x^3}} = 1$ (границя існує, скінченна й відмінна від нуля) і інтеграл $\int\limits_{c}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$ розбігається, то за теоремою 2.2 інтеграл $\int\limits_{c}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^3}}$ також розбігається.

Таким чином, заданий інтеграл становить собою суму збіжного та розбіжного інтегралів, внаслідок чого він розбігається.

е) Підінтегральна функція $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2-x-2}}$ на проміжку інтегрування знакозмінна і має одну власну особливу точку $b = 2$. Дослідимо інтеграл на абсолютну збіжність, тобто розглянемо інтеграл $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{2} \left| \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2-x-2}} \right| dx$. Маємо $\left| \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2-x-2}} \right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{2+x-x^2}}$. Порівняємо функцію справа з функцією $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}$, для чого застосуємо теорему 2.2:

$$\lim_{x\to2-0} \frac{\sqrt[3]{(2-x)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)(2-x)}} = \lim_{x\to2-0} \sqrt[3]{\frac{2-x}{x+1}} = 0.$$

Границя скінченна і дорівнює нулю. Оскільки інтеграл $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}$ збігається, то за теоремою 2.2 інтеграл $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x-x^2}}$ також збігається. Тоді за теоремою 2.1 збігається і інтеграл $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{2} \left| \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2-x-2}} \right| dx$. Отже, на підставі теореми 2.3 заданий інтеграл збігається, причому абсолютно.

2.4. Заміна змінної у невласних інтегралах

Теорема 2.4. Нехай

1) функція $f(x)$ визначена й неперервна на проміжку $[a,b)$ і має на ньому єдину особливу точку b (власну або невласну $+\infty$);

2) функція $x=\varphi(t)$ строго зростає й неперервно диференційовна на проміжку $[\alpha,\beta)$, де β може бути й $+\infty$;

3) виконуються рівності $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ (тобто $\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=b$).

Тоді справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt. \qquad (2.20)$$

Зауваження

1. Аналогічні теореми можуть бути сформульовані у випадках, коли особливою точкою (власною або невласною $-\infty$) є *лівий* кінець a проміжку інтегрування $(a,b]$ або власна внутрішня точка $c\in[a,b]$, а також коли функція $\varphi(t)$ *строго спадає.*

2. Рівність (2.20) припускає існування одного з інтегралів. Тоді, природно, існує і інший інтеграл.

3. Заміна змінної у невласному інтегралі *може приводити* до *власного* інтеграла, тобто інтеграл справа у (2.20) буде або невласним, або власним. При цьому, якщо інтеграл зліва – абсолютно збіжний, то таким самим буде й інтеграл справа.

4. На практиці нові межі інтегрування α і β визначаються рівностями $\alpha=\varphi^{-1}(a)$, $\beta=\lim\limits_{x\to b-0}\varphi^{-1}(x)$, де функція $t=\varphi^{-1}(x)$ є оберненою до функції $x=\varphi(t)$. Вона існує, монотонно зростає і неперервна в $[a,b)$.

5. Часто замість підстановки $x=\varphi(t)$ зручніше використовувати так звану *обернену* підстановку $t=\psi(t)$. Однак при цьому слід мати на увазі, що, по-перше, повинна існувати обернена функція $x=\psi^{-1}(t)$ й, по-друге, вона повинна задовольняти умови теореми.

6. Невласний інтеграл першого роду $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ (з єдиною невласною особливою точкою $+\infty$) завжди може бути зведений (за допомогою відповідної підстановки) до інтеграла зі *скінченними межами* інтегрування (власному або невласному). Наприклад, якщо $a > 0$, то можна покласти $x = \frac{1}{t}$. Тоді $\alpha = \frac{1}{a}$, $\beta = 0$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$ й

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = -\int\limits_{\frac{1}{a}}^{0} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2} = \int\limits_{0}^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}.$$

7. Невласний інтеграл другого роду $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ з єдиною власною особливою точкою $x = b$ *завжди* може бути зведений до інтеграла першого роду (з єдиною невласною особливою точкою $+\infty$). Наприклад, якщо покласти $x = b - \frac{1}{t}$, то отримаємо $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}$.

Розглянемо приклади.

<u>**Приклад 2.8.**</u> Обчислити $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ має на проміжку інтегрування $[0, +\infty)$ єдину невласну особливу точку $b = +\infty$ й неперервна на цьому проміжку.

Зробимо підстановку $x = tgt$. Неважко бачити, що функція $\varphi(t) = tgt$ на проміжку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ задовольняє умови теореми. Оскільки $tg0 = 0$ й $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} tgt = +\infty$, то новими межами інтегрування будуть $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ Тоді маємо

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+tg^2t)^2}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Після заміни змінної отримали власний інтеграл, який неважко обчислити. Отже, заданий інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

Зауваження. Насправді існує *нескінченна множина* проміжків, у яких функція $\varphi(t)=tgt$ задовольняє умови теореми, а саме $\left[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in Z)$. З цієї множини ми вибрали проміжок $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\left(k=0\right)$.

<u>Приклад 2.9.</u> З'ясувати, чи збігається інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x\sqrt{e^x-1}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{e^x\sqrt{e^x-1}}$ на проміжку інтегрування має лише одну невласну особливу точку $b=+\infty$.

Зробимо заміну змінної $t=\sqrt{e^x-1}$. Обернена функція $x=\ln(t^2+1)$ існує і задовольняє умови теореми.

Визначимо нові межі інтегрування: $\alpha=\sqrt{e-1}$, $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$. Тоді

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x\sqrt{e^x-1}}=2\int_{\sqrt{e-1}}^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Отже, внаслідок заміни змінної прийшли до невласного інтеграла першого роду, який збігається (див. попередній приклад). Тому заданий інтеграл також збігається.

<u>Приклад 2.10.</u> Обчислити $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ на проміжку інтегрування має єдину невласну особливу точку $b=+\infty$.

Зробимо заміну змінної $x=\frac{1}{t}$ і знайдемо нові межі інтегрування: $\alpha=1$,

$\beta = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$. Зазначимо, що у даному випадку функція $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$ монотонно спадає $(\alpha > \beta)$. Отже, маємо

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = -\int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} = \sqrt{t^2+1}\,\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1.$$

Як і в першому прикладі, внаслідок заміни змінної отримали власний інтеграл, який збігається за означенням і дорівнює $\sqrt{2}-1$. Отже, заданий інтеграл також збігається і дорівнює $\sqrt{2}-1$.

Зауваження. На практиці, якщо це заздалегідь не відомо, доцільно спочатку з'ясувати (при умові що це не дуже складно), чи є збіжним заданий інтеграл, і заміну змінної робити тільки у разі позитивної відповіді. Наприклад, інтеграл $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$, як неважко бачити, розбігається $\left(\text{порівняти з } \int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x}\right)$. Тому у даному випадку проводити заміну змінної не має сенсу.

<u>Приклад 2.11.</u> Обчислити $\int_1^2 \dfrac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$ на проміжку інтегрування має одну власну особливу точку $b = 2$. Порівнюючи цей інтеграл зі збіжним інтегралом $\int_1^2 \dfrac{dx}{\sqrt{2-x}}$, бачимо, що він збігається. Тому зробимо заміну змінної $x = \dfrac{2}{t}$ і знайдемо нові межі інтегрування: $\alpha = 2$, $\beta = \lim\limits_{x\to 2-\varepsilon}\dfrac{2}{x} = 1$. Отже, маємо

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = -\int_2^1 \frac{dt}{t\sqrt{4-\frac{4}{t^2}}} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}.$$

Отримали невласний інтеграл другого роду з єдиною власною особливою точкою $\beta = 1$. Оскільки функція $F(t) = \int \dfrac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|$ неперервна на усьому відрізку $[1,2]$ й $F'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ скрізь окрім особливої точки $\beta=1$, то вона є узагальненою первісною на відрізку $[1,2]$, отже, за узагальненою формулою Ньютона-Лейбніца (2.19) маємо

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{2}\left[\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|\right]_1^2=\ln\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

<u>Приклад 2.12.</u> Обчислити $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{x\,dx}{\sqrt{e^{x^2}-1}}$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{e^{x^2}-1}}$ на проміжку інтегрування має одну власну особливу точку $a=0$.

Виконаємо підстановку $t=\sqrt{e^{x^2}-1}$. Неважко бачити, що обернена функція $x=\sqrt{\ln(1+t^2)}$ існує і задовольняє умови теореми на проміжку $(\alpha,\beta]$, де $\alpha=\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{e^{x^2}-1}=0$, $\beta=\sqrt{e^{2\ln 2}-1}=\sqrt{3}$. Тоді будемо мати

$$\int_0^{\ln 2}\frac{x\,dx}{\sqrt{e^{x^2}-1}}=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t^2+1}=\frac{\pi}{3}.$$

Зауважимо, що, на відміну від попереднього, в цьому прикладі заміна змінної привела до *власного* інтеграла.

<u>Приклад 2.13.</u> Довести збіжність інтеграла $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$ на проміжку інтегрування має дві власні особливі точки $a=-2$ й $b=2$.

Зробимо підстановку $x=2\cos t$. Тоді новими межами інтегрування будуть $\alpha=\lim\limits_{x\to -2+0}\arccos(x/2)=\pi$ й $\beta=\lim\limits_{x\to 2-0}\arccos(x/2)=0$ і тому

$$\int_{-2}^{2}\frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\pi}e^{2\cos t}dt.$$

Як бачимо, внаслідок заміни змінної отримали *власний* інтеграл. Отже, заданий інтеграл *збігається*.

<u>Приклад 2.14.</u> Довести збіжність інтеграла $\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}}$ і обчислити його.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}$ на проміжку інтегрування має дві власні особливі точки $a = -3$ й $b = 3$.

Зобразимо заданий інтеграл у вигляді

$$\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int\limits_{-3}^{0} \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}} + \int\limits_{0}^{3} \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Кожен з інтегралів справа має лише одну особливу точку – відповідно $a = -3$ й $b = 3$. Порівняння цих інтегралів зі збіжними інтегралами $\int\limits_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$ й $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$ за допомогою граничної ознаки (теорема 2.2) доводить збіжність кожного з них. Тому заданий інтеграл також збігається.

Застосуємо підстановку $x = 3\sin t$ і знайдемо нові межі інтегрування: $\alpha = \lim\limits_{x \to -3+0} \arcsin\frac{x}{3} = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \lim\limits_{x \to 3-0} \arcsin\frac{x}{3} = \frac{\pi}{2}$. Внаслідок цього отримаємо *власний* інтеграл $27\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\, dt = 0$, тобто заданий інтеграл також дорівнює $\mathbf{0}$.

Зауваження. В даному випадку окреме доведення збіжності виявляється зайвим, оскільки *за умовою* задачі інтеграл *збігається*. Тому достатньо було б зробити лише заміну змінної, яка одночасно доводить збіжність інтеграла і дозволяє його обчислити.

<u>Приклад 2.15.</u> Обчислити $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ на проміжку інтегрування має одну власну $a = 0$ й одну невласну $b = +\infty$ особливі точки.

Зробимо підстановку $t=\sqrt{e^x-1}$. Неважко бачити, що обернена функція $x=\ln(1+t^2)$ існує і задовольняє умови теореми.

Знайдемо нові межі інтегрування:

$$\alpha=\lim_{x\to 0+0}\sqrt{e^x-1}=0,\ \ \beta=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty.$$

Тоді

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}.$$

Отже, заміна змінної призвела до невласного інтеграла першого роду. За означенням

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\lim_{B\to+\infty}\left(arctgt\Big|_0^B\right)=arctg(+\infty)-arctg0=\frac{\pi}{2},$$

отже, цей інтеграл збігається. Тому заданий інтеграл також збігається і дорівнює π.

2.5. Інтегрування частинами

Теорема 2.5. Нехай

1) функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ неперервно диференційовні на проміжку $[a,b)$, причому особлива точка b може бути власною або невласною $(+\infty)$.

2) існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to b-0}u(x)\,v(x)$.

Тоді

1) інтеграли $\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$ й $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$ одночасно збігаються або розбігаються;

2) якщо обидва інтеграли збігаються, то справедлива рівність

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx, \tag{2.21}$$

де під символом подвійної підстановки розуміється різниця

$$u(x)v(x)\Big|_a^b=\lim_{x\to b-0}u(x)v(x)-u(a)v(a).$$

Зауваження.

1. Аналогічні теореми можуть бути сформульовані у випадках, коли особливою точкою (власною або невласною $-\infty$) є лівий кінець $\boldsymbol{a}$ проміжку інтегрування $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ або власна внутрішня точка $\boldsymbol{c}\in(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

2. Інтегрування частинами не зберігає, взагалі кажучи, абсолютної збіжності.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 2.16.

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}dx \quad \left\{\begin{matrix}\textit{особлива}\text{ точка}\\ \mathrm{b}=+\infty\end{matrix}\right\} = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B x^2\left(xe^{-x^2}\right)dx =$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x^2,\ du=2x\,dx,\\ dv=xe^{-x^2}dx,\ v=-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\end{matrix}\right| = \lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{x^2}{2}e^{-x^2}\Big|_0^B+\int_0^B xe^{-x^2}dx\right]=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{x^2}{2}e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^B=-\frac{1}{2}\left[\lim_{B\to+\infty}\frac{x^2+1}{e^{x^2}}\right]_0^B=-\frac{1}{2}\left(\lim_{B\to+\infty}\frac{B^2+1}{e^{B^2}}-1\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.$$

Інтеграл збігається і дорівнює $\dfrac{1}{2}$. Зауважимо, що остання границя обчислена за правилом Лопіталя:

$$\lim_{B\to+\infty}\frac{B^2+1}{e^{B^2}}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{B\to+\infty}\frac{2B}{2Be^{B^2}}=\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{e^{B^2}}=0.$$

Приклад 2.17.

$$\int_0^1 \ln^2 x\,dx \quad \left\{\begin{matrix}\textit{особлива}\text{ точка}\\ \mathrm{a}=0\end{matrix}\right\} = \lim_{\eta\to0+0}\int_\eta^1 \ln^2 x\,dx =$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\ln^2 x,\ du=2\dfrac{\ln x}{x}dx,\\ dv=dx,\quad v=x\end{matrix}\right| = \lim_{\eta\to0+0}\left[x\ln^2 x\Big|_\eta^1-2\int_\eta^1 \ln x\,dx\right]=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x}, \\ dv=dx, & v=x \end{matrix}\right| = \lim_{\eta\to 0+0}\left[x\ln^2 x\Big|_\eta^1 - 2\left(x\ln x\Big|_\eta^1 - \int_\eta^1 dx\right)\right]=$$

$$=\lim_{\eta\to 0+0}\left[(x^2\ln x - 2x\ln x + 2x)\Big|_\eta^1\right]=2$$

внаслідок того, що

$$\lim_{\eta\to 0+0}\eta^2\ln\eta \quad \{0\cdot\infty\} = \lim_{\eta\to 0+0}\frac{\ln\eta}{\frac{1}{\eta^2}} \quad \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \{\textit{за правилом Лопіталя}\} =$$

$$=\lim_{\eta\to 0+0}\frac{\frac{1}{\eta}}{\frac{-2}{\eta^3}} = -\frac{1}{2}\lim_{\eta\to 0+0}\eta^2 = 0$$

й (аналогічно) $\lim\limits_{\eta\to 0+0}\eta\ln\eta = 0$. Таким чином, заданий інтеграл збігається і дорівнює 2.

<u>Приклад 2.18.</u> З'ясувати, чи збігається інтеграл $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\ln arctgx\, dx$.

Особлива точка $a=0$. Інтегруємо частинами:

$$u=\ln arctg\, x,\ du=\frac{dx}{(1+x^2)\, arctgx},\quad dv=dx,\quad v=x.$$

Тоді

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}}\ln arctgx\, dx = \lim_{\eta\to 0+0}\left[x\ln arctg\, x\Big|_\eta^{\sqrt{3}} - \int\limits_\eta^{\sqrt{3}}\frac{x\, dx}{(1+x^2)\, arctg\, x}\right].$$

Як неважко перевірити, $\lim\limits_{\eta\to 0+0}\eta\ln arctg\,\eta = 0$, $\lim\limits_{\eta\to 0+0}\dfrac{\eta}{(1+\eta^2)\, arctg\,\eta} = 1$. Отже, справа маємо суму скінченного добутку $\sqrt{3}\ln\dfrac{\pi}{3}$ і власного інтеграла. Тому заданий інтеграл існує (збігається).

2.6. Дослідження збіжності деяких відомих інтегралів

Розглянемо інтеграли виду $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^\lambda} dx$ й $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^\lambda} dx$ $(a > 0)$ і дослідимо їхню збіжність на прикладі інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx$ $(a > 0)$.

Підінтегральна функція $f(x) = \frac{\cos x}{x^\lambda}$ на проміжку інтегрування має одну невласну особливу точку $b = +\infty$.

Застосуємо інтегрування частинами, а саме, покладемо $u = \frac{1}{x^\lambda}$, $dv = \cos x dx$. Тоді $du = -\frac{\lambda}{x^{\lambda+1}} dx$, $v = \sin x$ і маємо

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx = \left. \frac{\sin x}{x^\lambda} \right|_a^{+\infty} + \lambda \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda+1}} dx .$$

Оскільки (при $\lambda > 0$) $\left. \frac{\sin x}{x^\lambda} \right|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} - \frac{\sin a}{a^\lambda} = 0 - \frac{\sin a}{a^\lambda}$ – число, то збіжність заданого інтеграла залежить від збіжності інтеграла справа.

Зважаючи на очевидну нерівність $\frac{|\sin x|}{x^{\lambda+1}} \le \frac{1}{x^{\lambda+1}}$, а також на те, що інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda+1}}$ збігається при будь-якому $\lambda > 0$, на підставі ознаки порівняння (теорема 2.1) можемо зробити висновок, що інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda+1}} dx$ збігається абсолютно. Таким чином, інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx$ збігається при $\lambda > 0$.

Дослідимо його на абсолютну збіжність. Розглянемо два випадки.

а) $\lambda > 1$.

Оскільки $\frac{|\cos x|}{x^{\lambda}} \le \frac{1}{x^{\lambda}}$, а інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$ збігається при $\lambda > 1$, то на підставі ознаки порівняння інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^{\lambda}} dx$ збігається. Це означає, що інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\lambda}} dx$ збігається, причому *абсолютно*.

б) $0 < \lambda \le 1$.

Ми не можемо в цьому випадку користуватися попередньою оцінкою, оскільки $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$ розбігається при $0 < \lambda < 1$ і ознака порівняння незастосовна. Але ми можемо застосувати іншу оцінку, яка теж добре відома, а саме:

$$\frac{|\cos x|}{x^{\lambda}} \ge \frac{\cos^2 x}{x^{\lambda}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{x^{\lambda}}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1 + \cos 2x}{x^{\lambda}} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} + \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{\lambda}} dx,$$

інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$ розбігається, а інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{\lambda}} dx$ (як неважко показати) збігається, то інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^{\lambda}} dx$ розбігається. Отже за ознакою порівняння $\int_a^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^{\lambda}} dx$ також розбігається. Це означає, що $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\lambda}} dx$ *не збігається абсолютно*. Вище було доведено, що він збігається $\forall \lambda > 0$. Тому можна зробити висновок, що при $0 < \lambda \le 1$ він *збігається умовно*.

Неважко показати, що усе сказане залишається справедливим і для інтеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda}} dx$, а також для інтегралів $\int_a^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^{\lambda}} dx$ й $\int_a^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^{\lambda}} dx \, (a > 0)$.

Підсумовуючи отримані результати, можемо стверджувати, що інтеграли $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^{\lambda}} dx$ і $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^{\lambda}} dx$ $(a > 0)$ при $\lambda > 1$ збігаються, причому *абсолютно*, а при $0 < \lambda \le 1$ вони збігаються лише *умовно*.

Розглянуті інтеграли можуть бути використані при дослідженні збіжності деяких інших інтегралів. Наприклад, неважко довести, що інтеграли $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^{\lambda}} dx$ й $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^{\lambda}} dx$ збігаються умовно при $0 < \lambda \le 1$. Це витікає з того, що при довільному $b > 0$, зокрема, маємо

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^{\lambda}} dx = \int\limits_{0}^{b} \frac{\sin \alpha x}{x^{\lambda}} dx + \int\limits_{b}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^{\lambda}} dx,$$

де перший інтеграл справа є власним, якщо $0 < \lambda \le 1$, а другий збігається умовно.

Якщо ж $\lambda > 1$, то інтеграл $\int\limits_{b}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^{\lambda}} dx$ збігається абсолютно, а інтеграл $\int\limits_{0}^{b} \frac{\sin \alpha x}{x^{\lambda}} dx$ є невласним з особливою точкою $a = 0$. Зазначимо, що при $0 < b \le \frac{\pi}{2}$ підінтегральна функція є знакододатною. Тому, застосувавши граничну ознаку порівняння (теорема 2.2.), отримаємо, що інтеграл $\int\limits_{0}^{b} \frac{\sin \alpha x}{x^{\lambda}} dx$ збігається при $1 < \lambda < 2$ і розбігається при $\lambda \ge 2$. Внаслідок цього $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^{\lambda}} dx$ збігається абсолютно при $1 < \lambda < 2$, а при $\lambda \ge 2$ розбігається. Відносно інтеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^{\lambda}} dx$ усе сказане вище залишається справедливим.

Таким чином, інтеграли $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^{\lambda}} dx$ й $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^{\lambda}} dx$ збігаються при

$\mathbf{0 < \lambda < 2}$, причому умовно, якщо $\mathbf{0 < \lambda \le 1}$, і абсолютно, якщо $\mathbf{1 < \lambda < 2}$. При $\mathbf{\lambda \ge 2}$ обидва інтеграли розбігаються.

За їхньою допомогою неважко дослідити, наприклад, збіжність так званих ***інтегралів Френеля*** $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ й $\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$, які зустрічаються в теорії дифракції світла.

Зробивши заміну змінної $x^2 = t$, дістанемо $x = \sqrt{t}$, $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, $\alpha = 0$, $\beta = +\infty$.

Отже,

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

На підставі попереднього інтеграли справа збігаються умовно. Тому обидва *інтеграли Френеля* також *збігаються умовно*.

Наведений приклад показує, що в окремих випадках невласний інтеграл першого роду може збігатись і тоді, коли підінтегральна функція при $x \to +\infty$ не прямує до нуля (у даному випадку границі $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x^2)$ й $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x^2)$ взагалі не існують).

3. РОЗВ’ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИЗНАЧЕНОГО ТА НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ

3.1. Обчислення площі плоскої фігури

Тут і в подальшому будемо розглядати три способи завдання ліній: рівняннями в декартових координатах, параметричними і полярними.

1. *Лінії, що обмежують фігуру, задані рівняннями в декартових координатах.*

Фігура, зображена на рис. 3.1, називається ***простою*** або ***стандартною*** відносно осі $\boldsymbol{Ox}$.

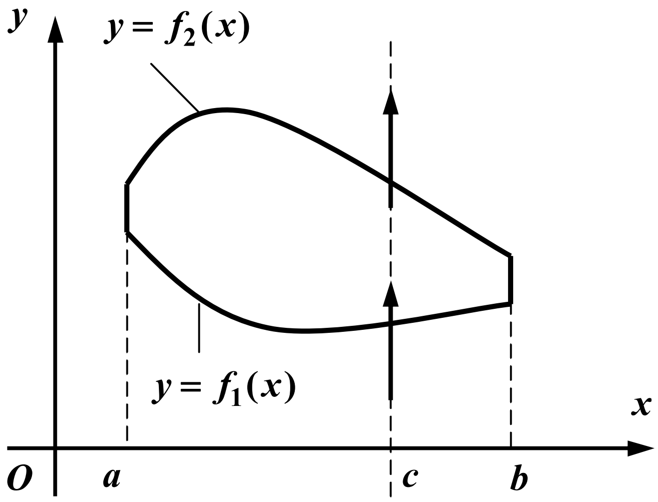

Рис. 3.1

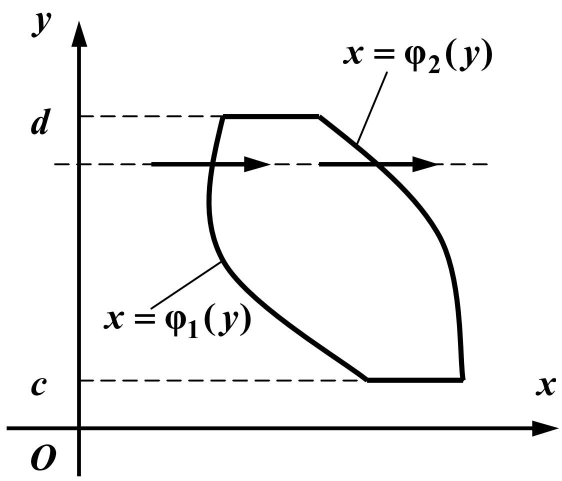

Рис. 3.2

Будь-яка пряма $x = c \quad (a < c < b)$, паралельна осі Oy, перетинає контур фігури не більше ніж в двох точках. Уявна стріла, пущена з боку осі Ox в напрямку осі Oy, “входить” і “виходить” з фігури. Лінію $y = f_1(x)$, котру ця стріла перетинає першою (при вході в фігуру), будемо називати ***лінією входу***, а лінію $y = f_2(x)$, котру стріла перетинає, залишаючи фігуру, назвемо ***лінією виходу***. Лінії входу і виходу не повинні перетинатися (вони можуть лише торкатися одна одної у скінченному числі точок), тобто повинна виконуватись умова: $f_1(x) \le f_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$, де функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні на $[a, b]$. Площа цієї фігури обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx . \tag{3.1}$$

Аналогічно, фігура, зображена на рис. 3.2, називається *простою* або *стандартною* відносно осі Oy. Терміни і вимоги до ліній входу і виходу такі самі: $\varphi_1(y) \le \varphi_2(y) \quad \forall y \in [c, d]$, де функції $\varphi_1(y)$ і $\varphi_2(y)$ неперервні на $[c, d]$. Площа цієї фігури обчислюється за формулою

$$S = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]\, dy\,. \tag{3.2}$$

Зауваження.

1. Якщо фігура не є простою, то її треба розбити на відповідне число простих фігур.
2. Тут і надалі слід враховувати, що обчислюються значення *геометричних* параметрів (площа, довжина, об'єм), які *не можуть бути від'ємними*. Тому підінтегральний вираз *повинен бути додатним*. В даному разі, на додаток до сформульованих вимог до рівнянь ліній входу і виходу, повинно виконуватись $a < b \quad (c < d)$. Тоді $dx > 0 \quad (dy > 0)$.

2. *Лінії, що обмежують фігуру, задані параметричними рівняннями.*

Розглянемо фігуру, обмежену замкненою лінією $x = x(t)$, $y = y(t)$. Припустимо, що лінія гладка, тобто в усій області зміни параметра t функції $x(t)$ і $y(t)$ залишаються неперервно диференційовними. Оберемо довільну стартову точку M і обійдемо контур фігури у *додатному напрямку* (коли фігура залишається *зліва*) (рис. 3.3).

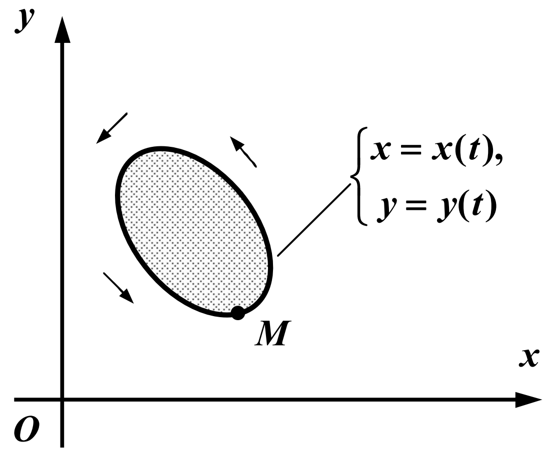

Рис. 3.3

Тоді площа фігури може обути обчислена за однією з наступних формул:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\dot{y}(t)\, dt\,, \tag{3.3}$$

$$S=-\int_{t_1}^{t_2}\dot{x}(t)\,y(t)\,dt, \qquad (3.4)$$

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}[x(t)\dot{y}(t)-\dot{x}(t)y(t)]\,dt, \qquad (3.5)$$

де t_1 і t_2 – значення параметра, що відповідають початку і кінцю обходу контура.

Зауваження. Формули (3.3) – (3.5) застосовні і у випадку, коли лінія $x=x(t)$, $y=y(t)$ не є замкненою.

3. *Лінії, що обмежують фігуру, задані полярними рівняннями.*

Розглянемо фігуру, обмежену лінією $\rho=\rho(\varphi)$ і промінями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$, причому функція $\rho(\varphi)\geq 0$ неперервна на відрізку $[\alpha,\beta]$ (рис. 3.4). Така фігура називається ***криволінійним сектором***.

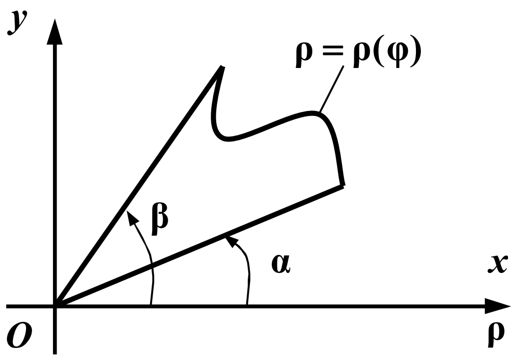

Рис. 3.4

Площа криволінійного сектора обчислюється за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi. \qquad (3.6)$$

Зауваження. Якщо лінія $\rho=\rho(\varphi)$ замкнена, то значення α і β відповідають початку і кінцю обходу контура фігури проти ходу годинникової стрілки.

<u>**Приклад 3.1.**</u> Знайти площу фігури, обмеженої лініями.

а) $y=\dfrac{x^2}{2}$, $x+y=4$; б) $\dfrac{y^2}{2}=x+3$, $y^2=3-x$;

в) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ $(a>0)$; г) $\rho=8\sin\varphi\cos^2\varphi$.

Розв'язання.

а) Побудуємо фігуру (рис. 3.5). Неважко бачити, що вона є простою відносно осі $\boldsymbol{Ox}$.

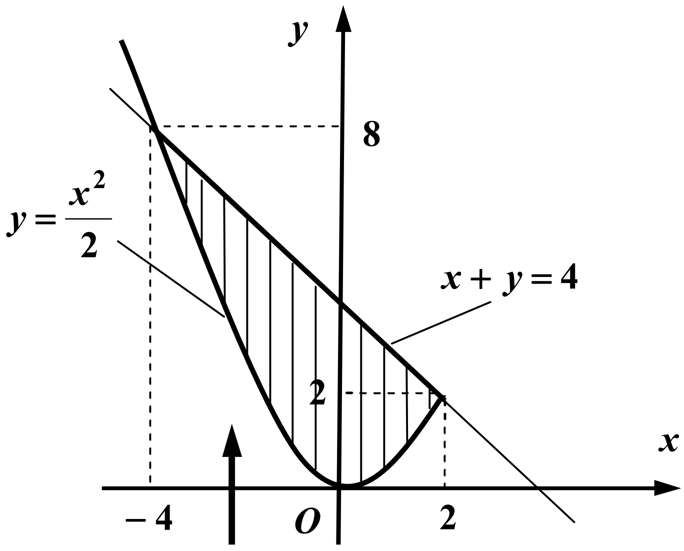

Рис. 3.5

Знайдемо координати точок перетину прямої з параболою:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2}, \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow x + \frac{x^2}{2} = 4, \quad x^2 + 2x - 8 = 0,\ x_1 = -4,\ x_2 = 2,\ y_1 = 8,\ y_2 = 2.$$

Отже, маємо дві точки перетину: $A(-4, 8)$ та $B(2, 2)$.

За формулою (3.1), де $a = -4$, $b = 2$, $f_2(x) = 4 - x$, $f_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$, маємо

$$S = \int_{-4}^{2} \left(4 - x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-4}^{2} = 8 - 2 - \frac{4}{3} + 16 + 8 - \frac{32}{3} = 18\ (од^2).$$

б) Побудуємо фігуру (рис. 3.6). Неважко бачити, що вона є простою відносно осі $\boldsymbol{Oy}$.

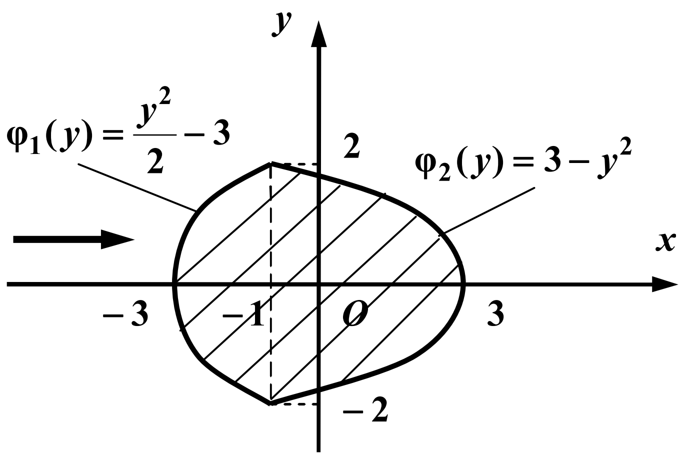

Рис. 3.6

Знайдемо координати точок перетину парабол:

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2} - 3, \\ x = 3 - y^2 \end{cases} \Rightarrow 2x + 6 = -x + 3 \quad \Rightarrow x = -1, \quad y^2 = 4 \quad \Rightarrow y_1 = -2, \; y_2 = 2.$$

Отже, маємо дві точки перетину: $(-1, \pm 2)$.

За формулою (3.2) з урахуванням симетрії фігури відносно осі Ox маємо

$$S = 2\int_0^2 \left[(3 - y^2) - \left(\frac{y^2}{2} - 3 \right) \right] dy = 6\int_0^2 \left(2 - \frac{y^2}{2} \right) dy = 6\left(2y - \frac{y^3}{6} \right)\Bigg|_0^2 = 16\ (од^2).$$

Зауваження. Той самий результат ми б отримали, якщо б спроектували фігуру на вісь Ox і застосували формулу (3.1), однак це було б не дуже вигідно з точки зору об’єму обчислень, оскільки тоді фігуру необхідно розбити на дві і, крім того, перерозв’язати обидва рівняння відносно y, що приводить до формули $S = 2\left[\int_{-3}^{-1} \sqrt{2x+6}\, dx + \int_{-1}^{3} \sqrt{3-x}\, dx \right]$.

в) Лінія, що обмежує фігуру, називається ***астроїдою*** (від грец. “**αστρον**” – зірка і “**ειδος**” - вигляд, тобто “зіркоподібна”). При $a = 5$ вона зображена на рис. 3.7. і є частинним випадком так званої *гіпоциклоїди*, яка являє собою траєкторію фіксованої точки кола радіуса a, що без прослизання обкатує *зсередини* інше коло радіуса na ($n > 1$, для астроїди $n = 4$).

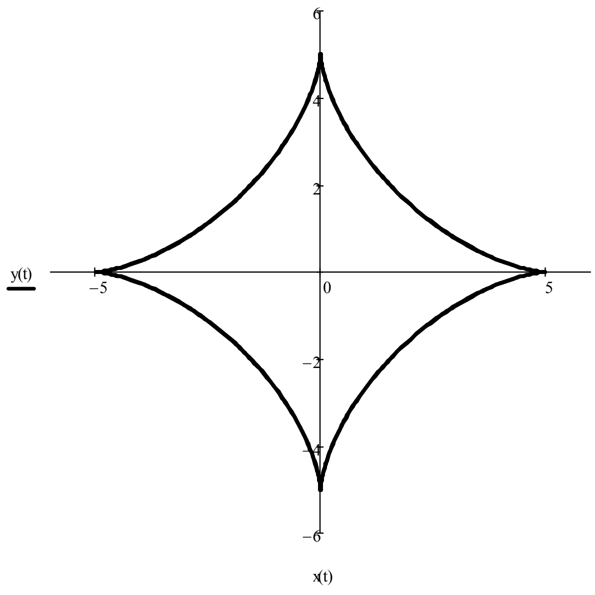

Рис. 3.7

Скористаємося симетрією фігури і розглянемо її частину, що лежить у першій чверті. При русі вздовж контура в додатному напрямі (фігура залишається зліва) від точки $(a, 0)$ до точки $(0, a)$ параметр t змінюється від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Отже, за формулою (3.5) маємо

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t - a\sin^3 t \cdot (-3a\cos^2 t\sin t)\right]dt =$$

$$= 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t \cdot \sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)\, dt = 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot \sin^2 t\, dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\, dt = \frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\, dt = \frac{3}{4}a^2\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}\pi a^2\ (од^2).$$

Зауваження. Той самий результат отримали б, обходячи *увесь* контур, використовуючи інші формули або іншу стартову точку.

г) Фігура зображена на рис. 3.8.

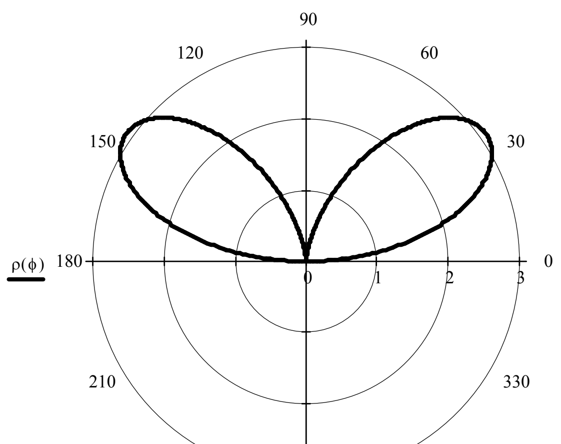

Рис. 3.8

Оскільки вона симетрична відносно осі Oy (тобто променя $\varphi = \frac{\pi}{2}$), то за формулою (3.6) маємо

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}64\sin^2\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi=64\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi\cos\varphi)^2\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=64\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\cdot\frac{1}{2}(1+\cos2\varphi)\,d\varphi=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}(1-\cos4\varphi)+\sin^2 2\varphi\cos2\varphi\right]d\varphi=$$

$$=\left(4\varphi-\sin4\varphi+\frac{4}{3}\sin^3 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=4\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi\,(од^2).$$

<u>Приклад 3.2.</u> Знайти площу фігури, обмеженої лініями.

а) $y=\dfrac{18}{9+x^2},\ \ y=0$; б) $y^2=\dfrac{x^3}{4-x},\ \ x=4$.

Розв'язання.

а) Фігура зображена на рис. 3.9.

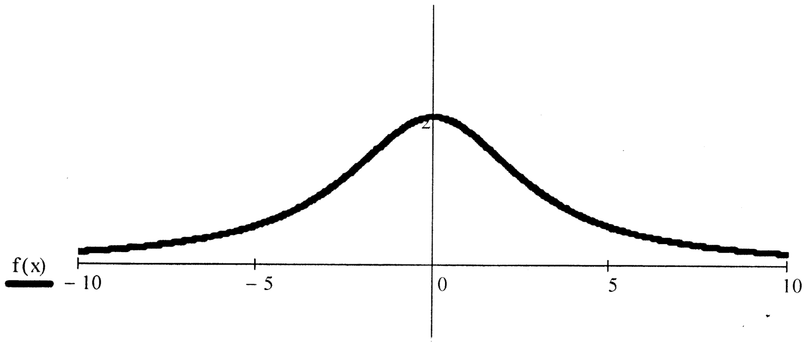

Рис. 3.9

За формулою (3.1) маємо невласний інтеграл першого роду (з нескінченними межами інтегрування), який дослідимо за означенням:

$$S=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{18}{9+x^2}\,dx=18\lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}}\int\limits_A^B\frac{dx}{9+x^2}=6\lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}}arctg\,\frac{x}{3}\Bigg|_A^B=6\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=6\pi.$$

Інтеграл збігається, тому площа фігури скінченна і дорівнює $6\pi\ (од^2)$.

б) Лінія $y^2=\dfrac{x^3}{4-x}$ називається ***цисоїдою Діокла*** і складається з двох напівнескінченних гілок $y=\pm x\sqrt{\dfrac{x}{4-x}}$ (рис. 3.10).

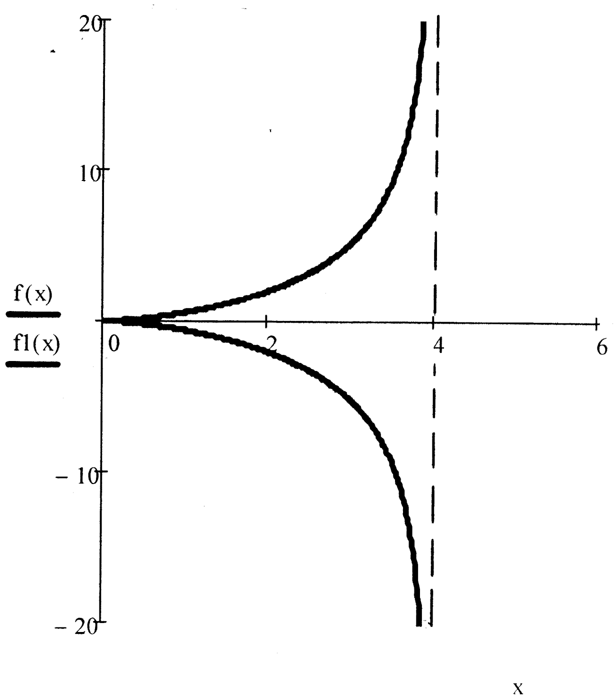

Рис. 3.10

Врахуємо симетрію фігури відносно осі Ox і оберемо її верхню частину. За формулою (3.1) отримуємо невласний інтеграл другого роду з особливою точкою $x = 4$:

$$S = 2\int_0^4 x\sqrt{\frac{x}{4-x}}\,dx.$$

Зауваження. Тут і в подальшому (особливо при обчисленні довжини дуги і площі поверхні обертання), враховуючи, що підінтегральний вираз повинен бути додатним, усі вирази, що виносимо з-під кореня, будемо брати ***за модулем***!

Зробимо заміну змінної за формулою $x = 4\sin^2 t$. Умови теореми 2.4 виконуються: функція $x = 4\sin^2 t$ строго зростає й неперервно диференційовна на проміжку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ і справедливі рівності $4\sin^2 0 = 0$, $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}-0} 4\sin^2 t = 4$.

Отже, з урахуванням того, що $\sin t \ge 0$, $\cos t \ge 0$ при $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, маємо

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^2 t \cdot |\,2\sin t\,| \cdot 8\sin t\cos t}{|\,2\cos t\,|}\,dt = 64\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)^2\,dt =$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt = 16\left[\frac{3}{2}t-\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = 12\pi\ (од^2).$$

Зауваження. Як бачимо, в цьому прикладі заміна змінної дозволила перейти від невласного інтеграла до власного.

3.2. Обчислення об'єму тіла обертання

Розглянемо задачу про обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо деякої осі ω, розташованої у площині фігури. Щоб уникнути неоднозначності, припустимо, що вказана фігура або *цілком лежить по один бік від осі обертання* (рис. 3.11-а) або *симетрична* відносно цієї осі (рис. 3.11-б). В останньому випадку повинна розглядатися лише одна з симетричних частин фігури, байдуже яка.

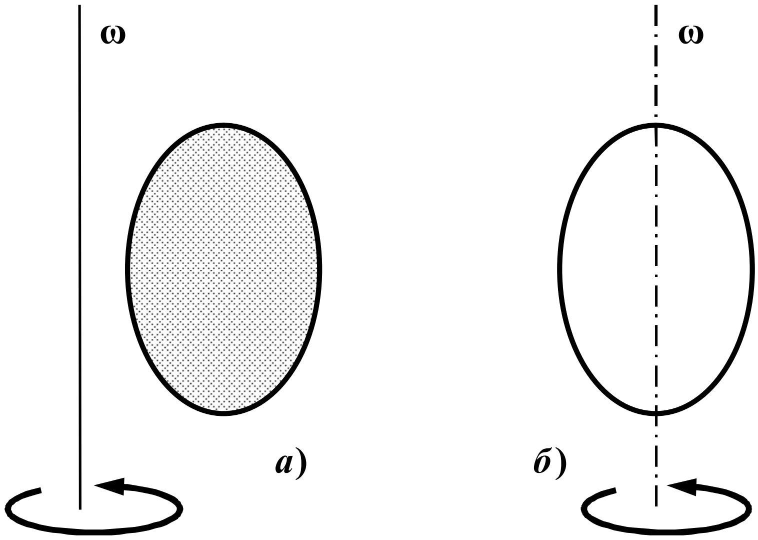

Рис. 3.11

1. *Лінії, що обмежують фігуру, задані рівняннями в декартових координатах.*

Об'єми тіл, що утворюються обертанням навколо осей координат простих фігур, зображених на рис. 3.1 і 3.2, обчислюються за наступними формулами:

- для фігури, зображеної на рис 3.1,

навколо осі Ox $$V_x = \pi\int_a^b \left[\, f_2^2(x) - f_1^2(x)\,\right] dx, \qquad (3.7)$$

навколо осі Oy $$V_y = 2\pi\int_a^b |\,x\,|\cdot\left[\, f_2(x) - f_1(x)\right] dx; \qquad (3.8)$$

- для фігури, зображеної на рис 3.2,

навколо осі Ox $$V_x = 2\pi\int_c^d |\,y\,|\cdot\left[\,\varphi_2(y)-\varphi_1(y)\right]dy, \qquad (3.9)$$

навколо осі Oy $$V_y = \pi\int_c^d \left[\,\varphi_2^2(y)-\varphi_1^2(y)\right]dy. \qquad (3.10)$$

Зауваження.

1. Модуль в формулах (3.8) і (3.9) поставлен для забезпечення додатності підінтегрального виразу.
2. Якщо фігура несиметрична відносно осі обертання, то вона повинна бути розташованою лише по один бік від осі, отже, для фігур, що тут розглядаються, на додаток до вже вказаних, повинні виконуватися умови:
   - у формулі (3.7) $f_1(x)f_2(x)\ge 0$,
   - у формулі (3.8) $ab \ge 0$,
   - у формулі (3.9) $cd \ge 0$,
   - у формулі (3.10) $\varphi_1(y)\varphi_2(y)\ge 0$.
3. Переважність однієї з формул (3.7) або (3.9), (3.8) або (3.10) залежить від вигляду фігури і встановлюється окремо в кожному конкретному випадку.

2. *Лінії, що обмежують фігуру, задані параметричними рівняннями.*

У одній з формул (3.7) – (3.10), яка обрана для випадку, що розглядається, необхідно зробити відповідну заміну змінної.

3. *Лінії, що обмежують фігуру, задані полярними рівняннями.*

Об'єми тіл, утворених обертанням криволінійного сектора (рис. 3.4) навколо осей декартової і полярної систем координат, обчислюються за формулами

$$V_x = V_\rho = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\cdot|\,\sin\varphi\,|\,d\varphi, \qquad (3.11)$$

$$V_y = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\cdot|\,\cos\varphi\,|\,d\varphi. \qquad (3.12)$$

<u>Приклад 3.3.</u> Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = x+\sin^2 x$ та $y = x$ ($0\le x\le \pi$).

Розв'язання. Фігура зображена на рис. 3.12.

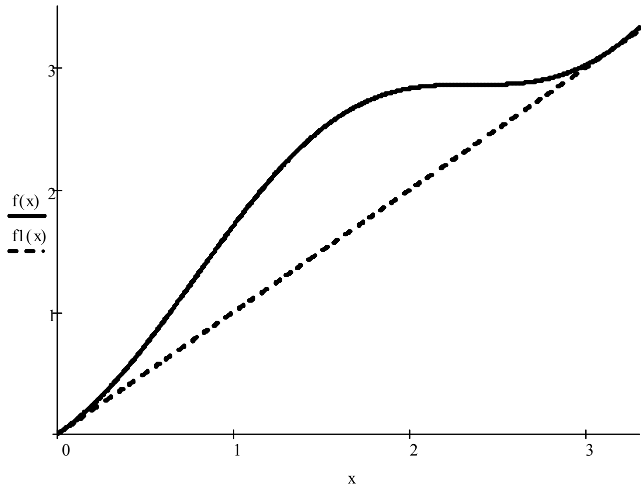

Рис. 3.12

За формулою (3.7), де $a=0$, $b=\pi$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x+\sin^2 x$,

маємо $V_x=\pi\int\limits_0^{\pi}(x^2+2x\sin^2 x+\sin^4 x-x^2)dx=\pi\int\limits_0^{\pi}(2x\sin^2 x+\sin^4 x)\,dx$.

Обидва інтеграли $\int\limits_0^{\pi}2x\sin^2 x\,dx$ та $\int\limits_0^{\pi}\sin^4 x\,dx$ обчислимо окремо:

$$\int\limits_0^{\pi}2x\sin^2 x\,dx=\int\limits_0^{\pi}x(1-\cos 2x)dx=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}x\cos 2x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x, & dv=\cos 2xdx, \\ du=dx, & v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix}\right|=\frac{\pi^2}{2}-\frac{x}{2}\sin 2x\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin 2xdx=\frac{\pi^2}{2}-\frac{1}{4}\cos 2x\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2},$$

$$\int\limits_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)\bigg|_0^{\pi}=\frac{3}{8}\pi.$$

Отже, $V_x=\pi\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{3}{8}\pi\right)=\frac{\pi^2}{8}(4\pi+3)\approx 19.2\ (од^3)$.

<u>Приклад 3.4.</u> Знайти об’єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Oy фігури, обмеженої лінією $y=x\sqrt{4-x^2}$ та віссю Ox.

Розв'язання. Оскільки $4-x^2\ge 0$, то $|x|<2$ або $-2<x<2$. Фігура зображена на рис. 3.13.

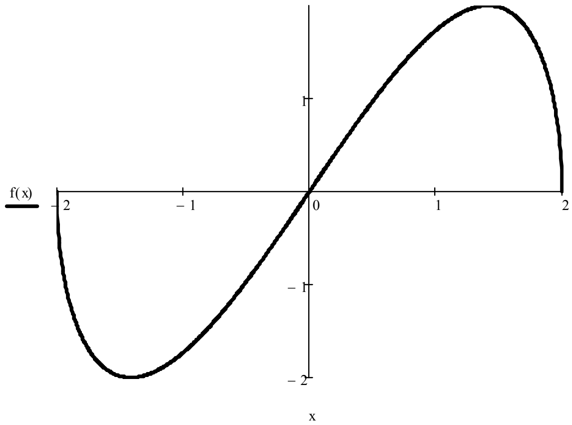

Рис. 3.13

За формулою (3.8) та з урахуванням симетрії тіла обертання відносно осі Oy маємо

$$V_y=2\cdot 2\pi\int_0^2 x\cdot x\sqrt{4-x^2}\,dx=4\pi\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\left|\begin{matrix} x=2\sin t, & x=0 \quad t=0\\ dx=2\cos t dt, & x=2 \quad t=\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\cdot 2|\cos t|\cdot 2\cos t\,dt=\left\{\cos t\ge 0,\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}=64\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cdot\cos t)^2\,dt=$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt=8\cdot\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=8\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi\ (од^3).$$

<u>**Приклад 3.5.**</u> Знайти об’єми тіл, утворених обертанням навколо координатних осей фігури, обмеженої еліпсом $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(a>b)$.

Розв'язання. Фігура зображена на рис. 3.14.

Тіло, утворене обертанням фігури, обмеженої еліпсом, навколо його *великої* осі, називається ***видовженим (довгастим) еліпсоїдом обертання***. При обертанні фігури навколо осі Ox з двох її симетричних частин виберемо верхню половину ($-a\le x\le a$, $0\le y\le b$). При зростанні x від $-a$ до a параметр t змінюється від π до 0.

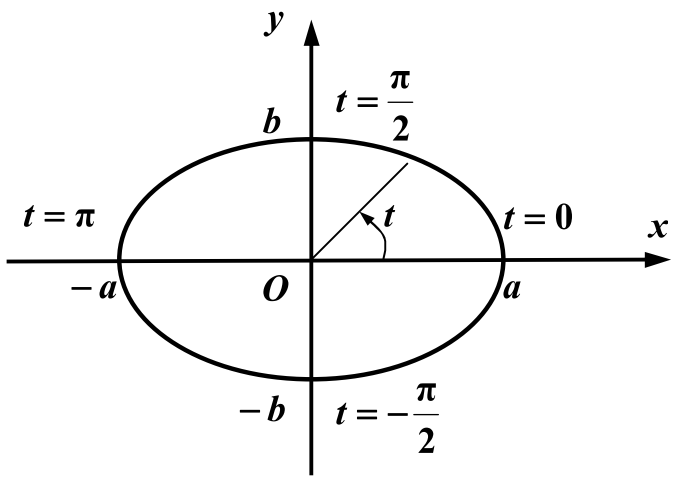

Рис. 3.14

Тоді за формулою (3.7), де $f_1(x)\equiv 0$, маємо

$$V_x=\pi\int_{\pi}^{0}y^2(t)\dot{x}(t)dt=\pi\int_{\pi}^{0}(b\sin t)^2(-a\sin t)dt=-\pi ab^2\int_{\pi}^{0}\sin^3 tdt=$$

$$=-\pi ab^2\int_{\pi}^{0}(1-\cos^2 t)\sin tdt=-\pi ab^2\int_{0}^{\pi}(1-\cos^2 t)d(\cos t)=$$

$$=-\pi ab^2\left[\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4}{3}\pi ab^2\ (од^3).$$

Тіло, утворене обертанням фігури, обмеженої еліпсом, навколо його *малої* осі, називається ***вкороченим (сплюсненим) еліпсоїдом обертання***. При обертанні фігури навколо осі Oy з двох її симетричних частин виберемо праву половину ($0\le x\le a$, $-b\le y\le b$). При зростанні y від $-b$ до b параметр t змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Тоді за формулою (3.10), де $\varphi_1(y)\equiv 0$, маємо

$$V_y=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2(t)\dot{y}(t)dt=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a\cos t)^2(b\cos t)dt=\pi a^2b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 tdt=$$

$$=\pi a^2b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\cos tdt=\pi a^2b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)d(\sin t)=$$

$$=\pi a^2b\left[\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{4}{3}\pi a^2b\ (од^3).$$

Отже, як бачимо, об’єм вкороченого еліпсоїда в a/b раз більше, ніж видовженого. Земна куля насправді являє собою вкорочений еліпсоїд обертання з $a/b \approx 301/299$.

<u>Приклад 3.6.</u> Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі фігури, обмеженої ***кардіоїдою*** $\rho = a\,(1+\cos\varphi)$ $(a>0)$.

Розв'язання. Кардіоїда, є частинним випадком, зокрема, так званої *епіциклоїди*, яка являє собою траєкторію фіксованої точки кола радіуса a, що без прослизання обкатує *ззовні* інше коло радіуса ka (для кардіоїди $k=1$). Кардіоїда отримала свою назву через схожість зі стилізованим зображенням серця (від грецьких слів “**καρδια**” – серце і “**ειδος**” – вигляд, тобто “серцеподібна”). Фігура при $a=5$ зображена на рис. 3.15.

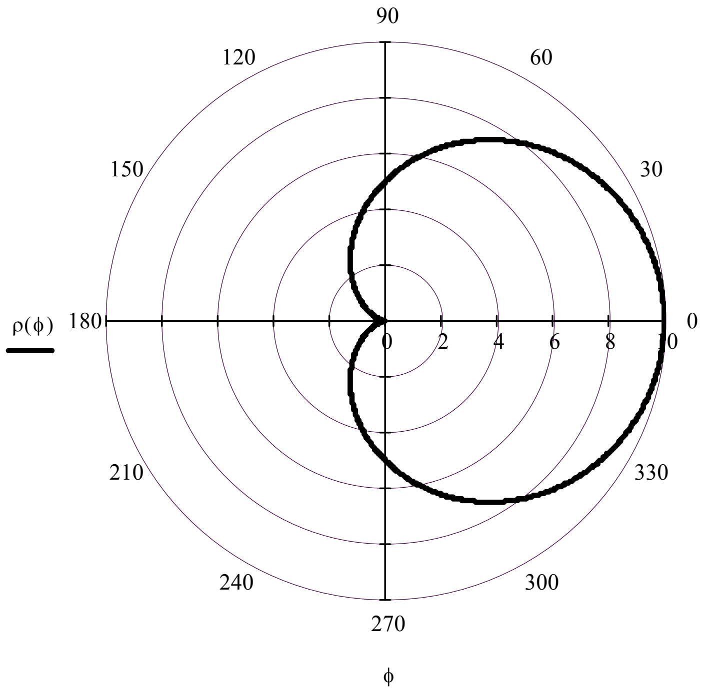

Рис. 3.15

Розглядаючи тільки верхню половину фігури, де $0 \le \varphi \le \pi$, $\sin\varphi \ge 0$, за формулою (3.11), отримуємо

$$V_\rho = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^3 d(1+\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \left.\frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\right|_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi a^3\ (од^3).$$

<u>Приклад 3.7.</u> Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = \dfrac{18}{9+x^2}$, $y = 0$.

Розв'язання. Фігура показана на рис. 3.9. Враховуючи її симетрію відносно осі Oy, за формулою (3.7) маємо невласний інтеграл першого роду

$$V_x = 2\cdot\pi \int_0^{+\infty} \frac{18^2}{(9+x^2)^2}\, dx.$$

Зробимо заміну змінної за формулою $x = 3tgt$. Умови теореми 2.4 виконуються: функція $x = 3tgt$ строго зростає й неперервно диференційовна на проміжку $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ і справедливі рівності $3tg0 = 0$, $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}-0} 3tg0 = +\infty$. Отже,

$$V_x = 2\cdot\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{18^2}{\dfrac{9^2}{\cos^4 t}} \frac{3dt}{\cos^2 t} = 24\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 12\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, dt =$$

$$= 12\pi\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 6\pi^2\ (од^3).$$

3.3. Обчислення довжини дуги плоскої лінії

Довжина L дуги AB гладкої плоскої лінії l (рис. 3.14) обчислюється за загальною формулою

$$L = \int_A^B dl, \tag{3.13}$$

де dl – *диференціал довжини дуги* лінії l (обчислюється в залежності від способу її завдання), A і B – границі інтегрування, що відповідають кінцям дуги.

1. *Лінія задана параметричними рівняннями.*

Нехай лінія l задана рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$ і є гладкою, тобто функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервно диференційовні на відрізку $[t_1, t_2]$, а значення

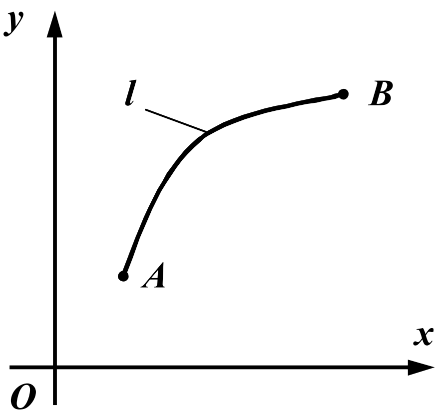

Рис. 3.16

$t = t_1$ і $t = t_2$ параметра t відповідають кінцям дуги, *причому обов'язково* $t_1 < t_2$. Тоді $dl = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt$ і

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt. \qquad (3.14)$$

2. *Лінія задана рівнянням в декартових координтах.*

а) Якщо лінія l задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[a, b]$, а значення $x = a$ і $x = b$ змінної x відповідають кінцям дуги, *причому обов'язково* $a < b$, то, обравши x в якості параметра і зробивши відповідну заміну змінної у формулі (3.14), будемо мати $dl = \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \qquad (3.15)$$

б) Якщо лінія l задана рівнянням $x = \varphi(y)$, де $\varphi(y)$ неперервно диференційовна на відрізку $[c, d]$, а значення $y = c$ і $y = d$ змінної y відповідають кінцям дуги, *причому обов'язково* $c < d$, то, обравши y в якості параметра і зробивши відповідну заміну змінної у формулі (3.14), будемо мати $dl = \sqrt{1 + \varphi'^2(y)}\,dy$,

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \varphi'^2(y)}\,dy. \qquad (3.16)$$

3. *Лінія задана полярним рівнянням.*

Якщо лінія l задана полярним рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha,\beta]$, а значення $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ змінної φ відповідають кінцям дуги, *причому обов'язково* $\alpha<\beta$, то, обравши φ в якості параметра і зробивши заміну змінної $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ у формулі (3.14), будемо мати $dl=\sqrt{(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi)^2+(\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi)^2}\,d\varphi=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$,

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi. \qquad (3.17)$$

Приклад 3.8. Знайти довжину дуги лінії.

а) $y=3\ln\left(\dfrac{9}{9-x^2}\right)\quad(0\le x\le 2)$; б) $\begin{cases}x(t)=3(2\cos t-\cos 2t),\\ y(t)=3(2\sin t-\sin 2t)\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi)$;

в) $\rho=2\varphi\quad(0\le\varphi\le 2\pi)$.

Розв'язання.

а) Дуга заданої кривої зображена на рис. 3.17.

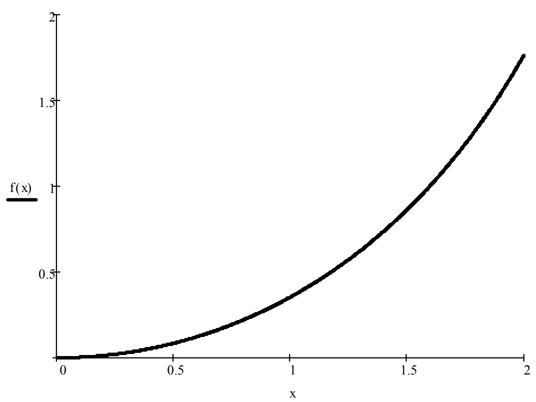

Рис. 3.17

Оскільки

$$y'=3\cdot\frac{9-x^2}{9}\cdot\left[-\frac{9}{(9-x^2)^2}\right]\cdot(-2x)=\frac{6x}{9-x^2},$$

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{36x^2}{(9-x^2)^2}}=\frac{\sqrt{81-18x^2+x^4+36x^2}}{9-x^2}=\frac{9+x^2}{9-x^2},$$

то за формулою (3.15), де $a = 0$, $b = 2$, маємо

$$L = \int_0^2 \frac{9+x^2}{9-x^2}\,dx = -\int_0^2 \frac{x^2-9+18}{x^2-9}\,dx =$$

$$= -\int_0^2 \left(1+\frac{18}{x^2-9}\right)dx = -\left(x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\right)\Bigg|_0^2 = 3\ln 5 - 2 \approx 2.83\ (од);$$

б) Задана крива належить до сім'ї так званих ***равликів Паскаля***. Вона зображена на рис. 3.18.

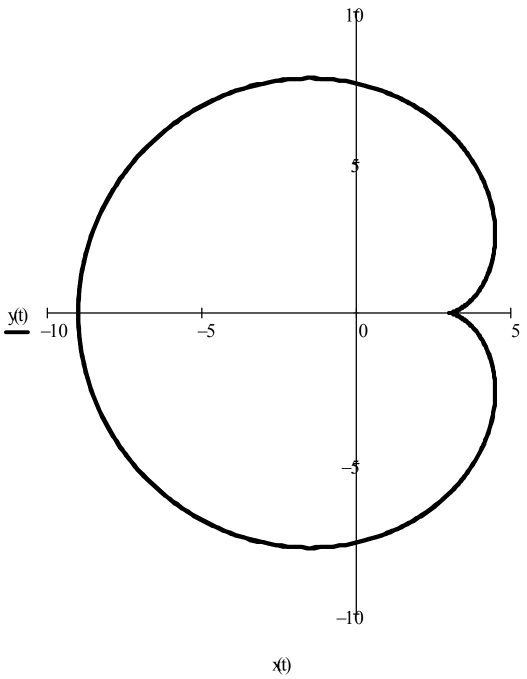

Рис. 3.18

Попередньо знайдемо

$$\dot{x}(t) = 3(-2\sin t + 2\sin 2t), \quad \dot{y}(t) = 3(2\cos t - 2\cos 2t),$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = 9(4\sin^2 t + 4\sin^2 2t - 8\sin t \sin 2t + 4\cos^2 t + 4\cos^2 2t - 8\cos t \cos 2t) =$$

$$= 9\big[4 + 4 - 8(\sin t \sin 2t + \cos t \cos 2t)\big] = 72(1-\cos t) = 144\sin^2\frac{t}{2}.$$

Тоді

$$\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \sqrt{144\sin^2\frac{t}{2}} = 12\left|\ \sin\frac{t}{2}\ \right| = 12\sin\frac{t}{2},$$

оскільки $\sin\frac{t}{2} \geq 0$ при $0 \leq t \leq 2\pi$. Отже, за формулою (3.14), де $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$, маємо

$$L = 12\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -24 \cdot \cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 48\ (од);$$

в) Задана крива називається ***спіраллю Архімеда***, а її дуга, обмежена променями $\varphi = 0$ та $\varphi = 2\pi$, називається ***першим звієм***. Він зображений на рис. 3.19.

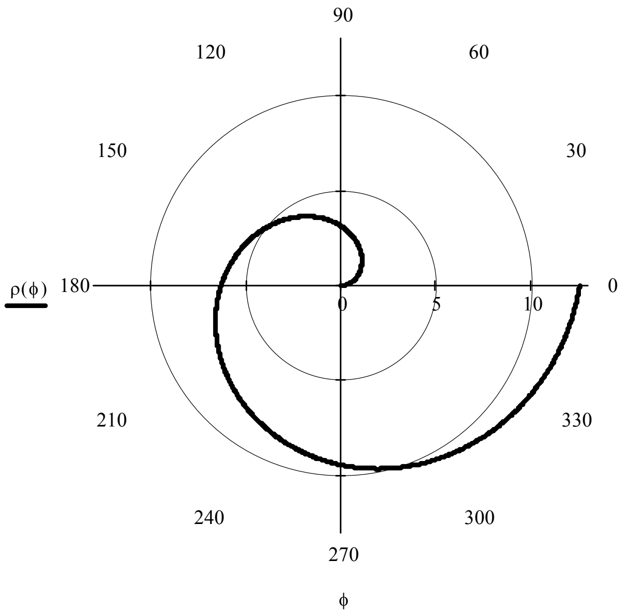

Рис. 3.19

Оскільки $\rho = 2\varphi$, а $\rho' = 2$, то $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = 2\sqrt{1+\varphi^2}$. Тоді за формулою (3.17), де $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, маємо $L = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi$.

Інтеграл $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi$ обчислимо по частинах (див. приклад 1.15). Отже,

$$L = 2\left(\frac{\varphi}{2}\sqrt{1+\varphi^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\ \varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\ \right|\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right) \approx$$

$$\approx 42.51\ (од).$$

3.4. Обчислення площі поверхні обертання

Розглянемо задачу про обчислення площі $\boldsymbol{Q}$ поверхні, утвореної обертанням дуги $\boldsymbol{AB}$ гладкої плоскої лінії $\boldsymbol{l}$ навколо деякої осі $\boldsymbol{\omega}$, розташованої в площині цієї дуги. Для уникнення неоднозначності припустимо, що дуга $\boldsymbol{AB}$ або *цілком лежить по один бік від осі обертання* або *симетрична* відносно цієї осі. В останньому випадку повинна розглядатися лише одна з симетричних частин дуги, байдуже яка.

Загальна формула має вигляд

$$\boldsymbol{Q = 2\pi \int_A^B R\,dl}, \tag{3.18}$$

де $\boldsymbol{R \geq 0}$ – відстань довільної точки $\boldsymbol{P}$ дуги $\boldsymbol{AB}$ від осі обертання $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{dl}$ – *диференціал довжини дуги* лінії $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ – границі інтегрування, що відповідають кінцям дуги (рис. 3.20).

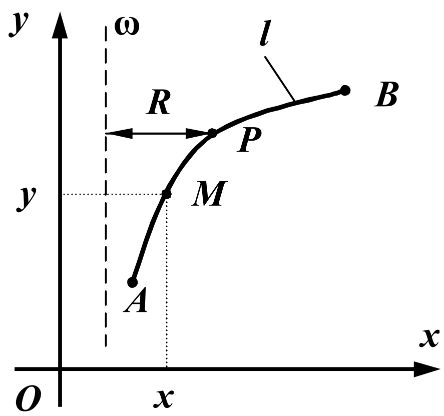

Рис. 3.20

Якщо в якості осей обертання розглядати осі $\boldsymbol{Ox}$ і $\boldsymbol{Oy}$ декартової прямокутної системи координат, то з формули (3.18) витікає, що

$$\boldsymbol{Q_x = 2\pi \int_A^B |\,y\,|\,dl}, \quad \boldsymbol{Q_y = 2\pi \int_A^B |\,x\,|\,dl}, \tag{3.19}$$

де $\boldsymbol{dl}$ обчислюється в залежності від способу завдання лінії $\boldsymbol{l}$.

1. *Лінія задана параметричними рівняннями.*

Нехай лінія l задана рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$ і є гладкою, тобто функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервно диференційовні на відрізку $[t_1, t_2]$, а значення $t = t_1$ і $t = t_2$ параметра t відповідають кінцям дуги, *причому обов'язково* $t_1 < t_2$. Тоді

$$Q_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |\, y(t)\,| \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt, \qquad (3.20)$$

$$Q_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |\, x(t)\,| \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt. \qquad (3.21)$$

2. *Лінія задана рівнянням в декартових координтах.*

а) Якщо лінія l задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[a, b]$, а значення $x = a$ і $x = b$ змінної x відповідають кінцям дуги, *причому обов'язково* $a < b$, то, обравши x в якості параметра і зробивши відповідну заміну змінної у формулах (3.20) і (3.21), будемо мати

$$Q_x = 2\pi \int_{a}^{b} |\, f(x)\,| \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx, \qquad (3.22)$$

$$Q_y = 2\pi \int_{a}^{b} |\, x\,| \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \qquad (3.23)$$

б) Якщо лінія l задана рівнянням $x = \varphi(y)$, де $\varphi(y)$ неперервно диференційовна на відрізку $[c, d]$, а значення $y = c$ і $y = d$ змінної y відповідають кінцям дуги, *причому обов'язково* $c < d$, то, обравши y в якості параметра і зробивши відповідну заміну змінної у формулах (3.20) і (3.21), будемо мати

$$Q_x = 2\pi \int_{c}^{d} |\, y\,| \sqrt{1 + \varphi'^2(y)}\, dy, \qquad (3.24)$$

$$Q_y = 2\pi \int_{c}^{d} |\, \varphi(y)\,| \sqrt{1 + \varphi'^2(y)}\, dy. \qquad (3.25)$$

Зауваження. Переважність однієї з формул (3.22) або (3.24), (3.23) або (3.25) визначається рівнянням лінії і встановлюється окремо в кожному конкретному випадку. Критерієм є проба!

3. *Лінія задана полярним рівнянням.*

Якщо лінія l задана полярним рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha, \beta]$, а значення $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ змінної φ відповідають кінцям дуги, *причому обов'язково* $\alpha < \beta$, то, обравши φ в якості параметра і зробивши заміну змінної $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ у формулах (3.20) і (3.21), будемо мати

$$Q_x = Q_\rho = 2\pi \int_\alpha^\beta |\,\rho\sin\varphi\,| \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi, \qquad (3.26)$$

$$Q_y = 2\pi \int_\alpha^\beta |\,\rho\cos\varphi\,| \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi. \qquad (3.27)$$

<u>Приклад 3.9.</u> Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі Ox дуги ***ланцюгової лінії*** $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ $(0 \le x \le 3)$.

Розв'язання. Дуга заданої лінії зображена на рис. 3.19.

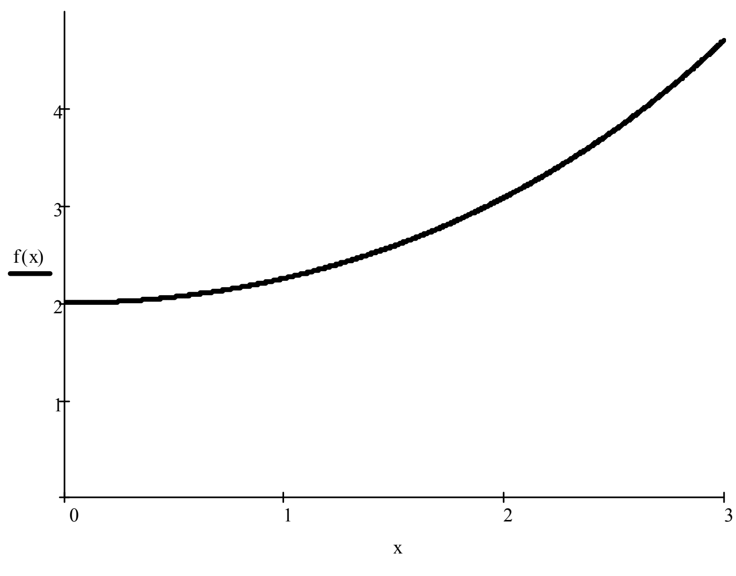

Рис. 3.21

Попередньо знайдемо

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right),$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^x - 2 + e^{-x}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^x + 2 + e^{-x}\right)} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right).$$

Тоді за формулою $Q_x = 2\pi\int\limits_a^b |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, де $a = 0$, $b = 3$, будемо мати

$$Q_x = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^3\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx = \pi\int\limits_0^3\left(e^x + 2 + e^{-x}\right)dx = \pi\cdot\left(e^x + 2x - e^{-x}\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \pi\cdot\left(e^3 + 6 - \frac{1}{e^3}\right) \approx 81.79\ (od^2).$$

<u>Приклад 3.10.</u> Знайти площі поверхонь, утворених при обертанні навколо координатних осей першої арки ***циклоїди*** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

Розв'язання. Циклоїдою (від грец. "**κυκλοειδης**" – круглий) називається траєкторія фіксованої точки кола радіуса a, що без прослизання котиться по прямій. Перша арка циклоїди (рис. 3.22) є траєкторія вказаної точки за один повний оберт при русі від початку координат в напрямку осі Ox.

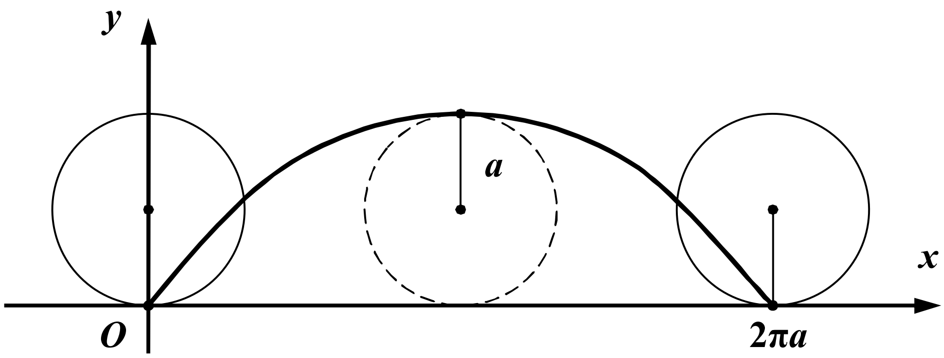

Рис. 3.22

Попередньо обчислимо $\dot{x}(t) = a(1 - \cos t)$, $\dot{y}(t) = a\sin t$,

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2\sin\frac{t}{2}.$$

За формулою (3.20)

$$Q_x = 2\pi \int_0^{2\pi} a \left| 1-\cos t \right| \cdot 2a \left| \sin\frac{t}{2} \right| dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\, dt =$$

$$= -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right) d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -16\pi a^2 \left[\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2 \ (од^2).$$

За формулою (3.21)

$$Q_y = 2\pi \int_0^{2\pi} a \left| t-\sin t \right| \cdot 2a \left| \sin\frac{t}{2} \right| dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(t\sin\frac{t}{2} - \sin t \sin\frac{t}{2}\right) dt =$$

$$= 4\pi a^2 \left[-2t\cos\frac{t}{2} + 3\sin\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3t}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 16\pi^2 a^2 \ (од^2).$$

<u>Приклад 3.11.</u> Знайти площі поверхонь, утворених при обертанні навколо координатних осей ***лемніскати Бернуллі*** $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi} \quad (a > 0)$.

Розв'язання. Лемніската при $a = 2$ показана на рис. 3.23. Вона симетрична відносно обох координатних осей.

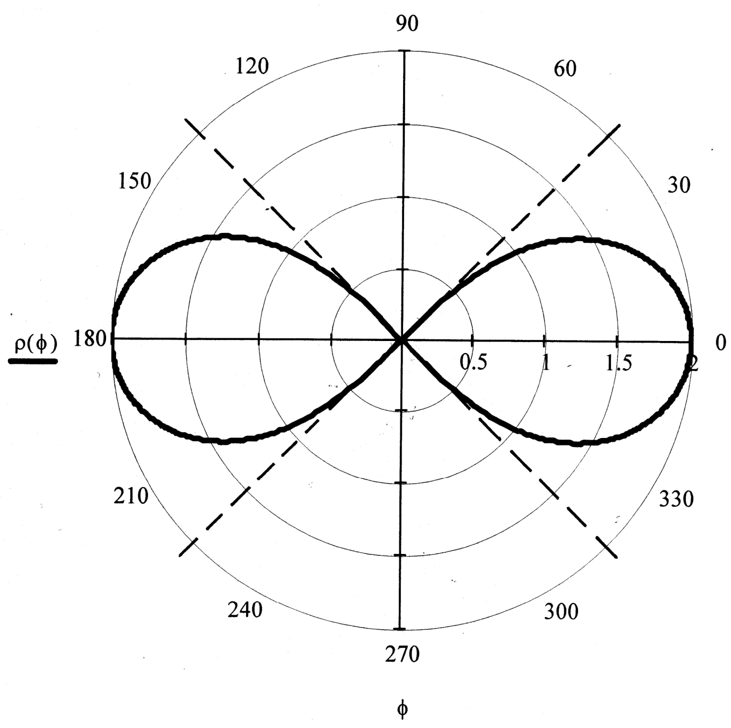

Рис. 3.23

Будемо розглядати частину лемніскати, розташовану у першій чверті, тобто в секторі $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$. Попередньо обчислимо

$$\rho' = a\frac{2}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}(-\sin 2\varphi) = -a\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \quad \rho^2 + \rho'^2 = a^2\left(\cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right) = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}.$$

За формулою (3.26), з урахуванням симетрії лінії відносно осі Oy, маємо

$$Q_x = Q_\rho = 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot|\sin\varphi|\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi =$$

$$= -4\pi a^2\cdot\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 2\pi a^2(2-\sqrt{2}) \approx 1{,}17\,\pi a^2\,(од^2).$$

За формулою (3.27), з урахуванням симетрії лінії відносно осі Ox, маємо

$$Q_y = 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot|\cos\varphi|\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2\cdot\sin\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 2\sqrt{2}\pi a^2 \approx 2{,}83\,\pi a^2\,(од^2).$$

<u>Приклад 3.12.</u> Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі Oy лінії $y = \dfrac{x}{4\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}$.

Розв'язання. Оскільки $4 - x^2 \ge 0$, то $|x| < 2$ або $-2 < x < 2$. Лінія показана на рис. 3.13.

Попередньо обчислимо

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right) = \frac{2-x^2}{2\sqrt{2}\sqrt{4-x^2}},$$

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{(2-x^2)^2}{8(4-x^2)} = \frac{32 - 8x^2 + 4 - 4x^2 + x^4}{8(4-x^2)} = \frac{(x^2-6)^2}{8(4-x^2)}.$$

Розглядаючи тільки праву частину дуги $(0 \le x \le 2)$, за формулою (3.23) з урахуванням симетрії поверхні обертання відносно осі Oy будемо мати

$$Q_y = 2\cdot 2\pi \int_0^2 |\, x \,| \frac{\left| x^2-6 \right|}{2\sqrt{2}\sqrt{4-x^2}}\, dx = -\pi\sqrt{2}\int_0^2 \frac{x^3-6x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx\,.$$

Отже, отримали невласний інтеграл другого роду з особливою точкою $x = 2$. Подамо його у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int_0^2 \frac{x^3-6x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\, dx - 6\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx\,.$$

В першому з них зробимо заміну змінної за формулою $x = 2\sin t$. Умови теореми 2.4 виконуються: функція $x = 2\sin t$ строго зростає й неперервно диференційовна на проміжку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ і справедливі рівності $2\sin 0 = 0$, $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{2}-0} 2\sin t = 2$. Отже, маємо

$$\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\sin^3 t}{2\cos t}\cdot 2\cos t dt = -8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t) d(\cos t) =$$

$$= -8\left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}.$$

Зауваження. Тут заміна змінної, як бачимо, дозволила перейти від невласного інтеграла до власного.

Другий інтеграл знайдемо за означенням:

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = -\lim_{\varepsilon\to 0+0} \sqrt{4-x^2}\,\Bigg|_0^{2-\varepsilon} = -(0-2) = 2\,.$$

Таким чином, шукане значення площі є

$$Q_y = -\pi\sqrt{2}\left(\frac{16}{3} - 6\cdot 2\right) = \frac{20\sqrt{2}\,\pi}{3}\ (од^2)\,.$$

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2-х кн.: Кн. 1. – М.: Высш.шк., 2000. – 725 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 304 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
4. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (функции одной переменной). – М.: Наука, 1973. – 400 с.
5. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. – К.: Техніка, 2000. – 592 с.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт.: Т.2. – М.: Наука, 1970. – 800 с.
8. Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.

Навчальне видання

Копорулін Володимир Львович
Моссаковська Людмила Володимирівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

РОЗДІЛ
"ВИЗНАЧЕНИЙ ТА НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ"

Навчальний посібник

Тем. план 2015, поз. 124

Підписано до друку 21.05.2015. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 6,53. Умов. друк. арк. 6,44. Тираж 100 пр. Замовлення № 98.

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ - 5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ