

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**

**А.В. ПАВЛЕНКО, В.Л. КОПОРУЛІН,
Л.П. КАГАДІЙ, Л.В. МОССАКОВСЬКА**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА
РОЗДІЛ “РЯДИ ТА ІНТЕГРАЛ ФУР’Є”**

Затверджено Вченою радою НМетАУ
як навчальний посібник для студентів напрямів
6.050702 – електромеханіка,
6.050202 – автоматизація та комп’ютерно-
інтегровані технології
Протокол № 6 від 25.05.2015

УДК 517(07)

Павленко А.В., Копорулін В.Л., Кагадій Л.П., Моссаковська Л.В. Вища математика. Розділ “Ряди та інтеграл Фур’є”: Навч. посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2015. – 92 с.

Наведені основні поняття і положення теорії рядів та інтеграла Фур’є.

В першому розділі розглянуті достатні умови розвивності функцій в тригонометричний ряд Фур’є, пояснений фізичний зміст цієї операції. Докладно розглянуті розвинення періодичних і неперіодичних функцій, комплексна форма ряду Фур’є, ефект Гіббса, приділена увага питанням практичного гармонічного аналізу.

В другому розділі наведені означення інтеграла та перетворення Фур’є, пояснений їх фізичний зміст.

В третьому розділі наведені приклади розв’язання методом Фур’є деяких крайових та початкових задач для рівняння теплопровідності, проілюстровані результатами комп’ютерного моделювання.

Викладення теоретичного матеріалу супроводжується розв’язанням відповідних прикладів та ілюстраціями.

Призначений для студентів напрямів підготовки 6.050702 – електромеханіка та 6.050202 – автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології.

Іл. 51. Табл. 1. Бібліогр.: 13 найм.

Друкується за авторською редакцією

Відповідальний за випуск В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти: О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф. (НГУ)
В.Г. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ ім. О. Гончара)

© Національна металургійна академія
України, 2015

© Павленко А.В., Копорулін В.Л.,
Кагадій Л.П., Моссаковська Л.В.,
2015

З М І С Т

ВСТУП	4
1. РЯДИ ФУР'Є	6
1.1. Ортогональні системи функцій. Тригонометрична система	6
1.2. Ряд Фур'є	8
1.3. Достатні умови розвивності функцій в ряд Фур'є	10
1.4. Диференціювання і інтегрування рядів Фур'є	13
1.5. Періодичні функції. Періодичність суми ряду Фур'є	13
1.6. Фізичний зміст розвинення функції в тригонометричний ряд. Гармонічний аналіз	19
1.7. Розвинення в ряд Фур'є періодичних функцій	21
1.7.1. Незалежність коефіцієнтів ряду від розташування відрізку, на якому задана функція	21
1.7.2. Випадок довільного періоду	24
1.7.3. Ряди Фур'є парних і непарних функцій	28
1.8. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій	31
1.9. Ефект Гіббса	37
1.10. Комплексна форма ряду Фур'є	41
1.11. Практичний гармонічний аналіз	43
2. ІНТЕГРАЛ ФУР'Є	47
2.1. Інтеграл Фур'є	48
2.2. Достатні умови подання функції інтегралом Фур'є	50
2.3. Подання інтегралом Фур'є парних і непарних функцій	52
2.4. Комплексна форма інтеграла Фур'є	56
2.5. Перетворення Фур'є	59
2.6. Косинус- і синус-перетворення Фур'є	61
3. ПОШИРЕННЯ ТЕПЛА В СТРИЖНІ	64
3.1. Постановка задач	64
3.2. Розв'язок першої крайової задачі	67
3.3. Поширення тепла в стрижні скінченної довжини. Метод поділу змінних (метод Фур'є)	68
3.4. Поширення тепла в необмеженому стрижні	73
3.4.1. Нескінченний стрижень	73
3.4.2. Півнескінченний стрижень	79
ЗАКІНЧЕННЯ	88
ЛІТЕРАТУРА	91

ВСТУП

Ще у 1949 р. у передмові до книги Андре Анго “Математика для електро- і радіоінженерів” [1] Луї де Бройль писав: “В наш час, коли вивчення нових теорій все частіше потребує володіння дуже різноманітним математичним апаратом, фізик і інженер повинні знати численні і часто нещодавно розв’язані розділи математики.” Створення нових теорій і технологій, вивчення та прогнозування складних процесів і явищ пов’язані, як правило, з побудовою та дослідженням відповідних, часом дуже складних, математичних моделей. Тому сучасний інженер або програміст повинен мати досить високий рівень математичної підготовки, що передбачає не тільки знання основ математики, а й добре володіння тими її засобами і методами, які можуть застосовуватись при розв’язанні конкретних задач за його спеціальністю.

Вважається, що перший тригонометричний ряд був написаний Леонардом Ейлером (Euler, Leonhard 1707-1783). У листі до Гольдбаха у 1744 р., а пізніше у своєму “Диференціальному численні” 1755 р., Ейлер навів рівність

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots, x \in (0, 2\pi).$$

Приблизно в той же час Данііл Бернуллі (Bernoulli, Daniel, 1700-1782), при розв’язанні задачі про коливання струни, вперше висловив впевненість у можливості аналітичного подання “будь-якої лінії” на відрізок $[0, 2\pi]$ рядом з синусів та косинусів кратних дуг.

Однак це питання в значній мірі залишалося нез’ясованим до 1807 р., коли 21 грудня Жан Батист Жозеф Фур’є (Fourier, Joseph, 1768-1830) подав Паризькій академії наук (заснована Людовиком XIV у 1666 р.) доповідь “Про розповсюдження тепла в твердому тілі”. В цій доповіді Фур’є вперше представив формули коефіцієнтів тригонометричного ряду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

функції $f(x)$ з періодом 2π – так звані “коефіцієнти Фур’є”

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Доповідь отримала негативну оцінку з боку Лагранжа, Лапласа, Лежандра, Біо і Пуассона, які не могли погодитись з тим, що будь-який початковий розподіл температури можна подати у вигляді суми нескінченної кількості гармонік.

Однак ігнорувати результати досліджень Фур'є було неможливо, тому після другої роботи, що була опублікована у 1811 р. і завершувала теорію розповсюдження тепла в твердих тілах, йому була присуджена Велика премія Академії за роботи в області математичних наук. Однак свій головний труд “Аналітична теорія тепла” (Théorie analytique de la chaleur), який лорд Кельвін назвав “Великою математичною поемою”, Фур'є опублікував лише у 1822 р., вже після свого обрання секретарем математичної секції Академії. В цій книзі представлений загальний метод розв'язання рівняння теплопровідності при тих чи інших граничних умовах. Цей *метод поділу змінних* (метод Фур'є), який ґрунтується на поданні функцій тригонометричними рядами Фур'є, завдяки своїй загальності став основою багатьох сучасних методів математичної фізики.

Однак слід підкреслити, що питання про подання більш менш довільної функції з періодом 2π зовсім не було вирішене Фур'є. Основне заперечення викликало твердження про те, що розривна функція може бути точно представлена у вигляді суми ряду неперервних (тригонометричних) функцій. Тому ще протягом принаймні століття математики займалися пошуком умов, за яких таке подання в тому чи іншому вигляді має зміст. Подальший розвиток теорія рядів і перетворень Фур'є (*гармонічний аналіз*) отримала в роботах Діріхле, Гаусса, Рімана, Чебишева, Лобачевського, Вінера, Пелі та ін. і вийшла далеко за межі математичних дисциплін, таких як математична фізика, криптографія, геометрія, теорія чисел, комбінаторика, теорія ймовірностей, статистика. Вона стала потужною математичною базою у багатьох прикладних областях – радіоелектроніці і радіотехніці, теорії систем автоматичного регулювання, обробці сигналів, астрономії, акустиці, теорії припливів, океанології та багатьох інших.

Мета даного посібника полягає в тому, щоб в досить простій і доступній формі ознайомити читача з основними поняттями і положеннями теорії гармонічного аналізу. Багато уваги приділено практичній складовій, тому викладення теоретичних положень чергується з розв'язанням прикладів, що їх ілюструють. Перший розділ присвячений рядам Фур'є, другий – інтегралу та перетворенню Фур'є, в третьому розділі наведені приклади розв'язання методом Фур'є деяких крайових та початкових задач для рівняння теплопровідності, проілюстровані результатами комп'ютерного моделювання.

Даний посібник призначений насамперед для студентів, але автори сподіваються, що він буде також цікавим і корисним усім, хто вивчає цей досить складний розділ аналізу і бажає удосконалити свою математичну підготовку.

1. РЯДИ ФУР'Є

1.1. Ортогональні системи функцій.

Тригонометрична система

Функція $\varphi(x)$, задана і неперервна на відрізку $[a, b]$, називається *нормальною* на цьому відрізку, якщо

$$\int_a^b \varphi^2(x) dx = 1, \quad (1.1)$$

а число $\sqrt{\int_a^b \varphi^2(x) dx}$ називається *нормою* функції $\varphi(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, задані і неперервні на відрізку $[a, b]$, називаються *ортогональними* на цьому відрізку, якщо

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = 0. \quad (1.2)$$

Система функцій

$$\{\varphi_n(x)\} = \varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \quad (1.3)$$

заданих і неперервних на відрізку $[a, b]$, називається *нормальною* на цьому відрізку, якщо нормальна кожна функція системи, тобто

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.4)$$

Зауваження. Якщо $\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \lambda_n \neq 1$, то для *нормування* системи

необхідно кожен з функцій поділити на $\sqrt{\lambda_n}$, оскільки

$$\int_a^b \left(\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right)^2 dx = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \frac{\lambda_n}{\lambda_n} = 1.$$

Тоді система функцій $\left\{ \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}$ завідомо буде нормальною.

Система функцій (1.3) називається *ортгоналъною* на відрізьку $[a, b]$, якщо ортгоналъні будь-які дві *різні* функції цієї системи, тобто

$$\int_a^b \varphi_m(x) \cdot \varphi_n(x) dx = 0 \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots, m \neq n). \quad (1.5)$$

Зауваження. При цьому завжди будемо припускати, що $\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \lambda_n > 0$,

тобто серед функцій (1.3) немає жодної, яка б тотожно дорівнювала нулю.

Найважливішим прикладом ортгоналъної системи функцій є *тригонометрична система*

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (1.6)$$

на відрізьку $[-\pi, \pi]$. Доведемо це.

1. При $m, n = 0, 1, 2, \dots$ й $m \neq n$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m-n} \sin(m-n)x + \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Зауваження. Тут і надалі вважаємо для одноманітності $1 = \cos 0x$.

2. При $m, n = 1, 2, \dots$ й $m \neq n$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m-n} \sin(m-n)x - \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

3. При будь-яких $m = 0, 1, 2, \dots$ й $n = 1, 2, \dots$ маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x] \, dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{m-n} \cos(m-n)x - \frac{1}{m+n} \cos(m+n)x \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{1}{4m} \cos 2mx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Зауваження. Система тригонометричних функцій (1.6) на відрізку $[-\pi, \pi]$ ортогональна, але не є нормальною, оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \cdot dx = \lambda_0 = 2\pi \neq 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \lambda_n = \pi \neq 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Для нормування системи достатньо поділити кожен з функцій на відповідне значення $\sqrt{\lambda_n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (1.7)$$

1.2. Ряд Фур'є

Нехай на відрізку $[a, b]$ дані ортогональна система функцій (1.3) й деяка **абсолютно інтегровна** на цьому відрізку функція $f(x)$, тобто така, що існує

інтеграл $\int_a^b |f(x)| \, dx$. Припустимо, що можливе подання $f(x)$ у вигляді ряду

$$f(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Помножимо обидві частини рівності на $\varphi_m(x)$ і проінтегруємо її почленно:

$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) \, dx.$$

В силу ортогональності системи функцій $\{\varphi_n(x)\}$ усі інтеграли справа, за виключенням одного $\int_a^b \varphi_n^2(x) \, dx = \lambda_n > 0$ ($m = n$), дорівнюють нулю, отже,

маємо $\int_a^b f(x) \varphi_n(x) \, dx = c_n \lambda_n$, звідки

$$c_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.8)$$

Узагальненим рядом Фур'є функції $f(x)$ за ортогональною системою функцій $\{\varphi_n(x)\}$ називається ряд

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \quad (1.9)$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами (1.8) і називаються *узагальненими коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$ за ортогональною системою функцій $\{\varphi_n(x)\}$* .

Найбільш уживаною серед інших є система тригонометричних функцій (1.6). Ряд Фур'є за цією системою на відрізку $[-\pi, \pi]$ прийнято записувати у вигляді

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (1.10)$$

В силу (1.8) коефіцієнти цього ряду обчислюються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (1.11)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.12)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.13)$$

які називають *формулами Ейлера-Фур'є*.

Ряд (1.10) називається *тригонометричним рядом Фур'є*, щоб відрізнити його від узагальнених рядів Фур'є (1.9) (які сам Фур'є власно і ввів в науковий обіг), частинним випадком яких він є. Однак тригонометричний ряд Фур'є застосовується настільки часто, що зазвичай його називають просто *рядом Фур'є*, а його коефіцієнти, обчислені за формулами (1.11) – (1.13), отримали назву *коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$* . Саме такі ряди ми й будемо розглядати в подальшому, опускаючи слово “тригонометричний”.

Частинна сума ряду (1.10)

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1.14)$$

називається *многочленом Фур'є функції* $f(x)$.

Зауваження. Коефіцієнт $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ записують поза сумою у вигляді $\frac{a_0}{2}$

для одноманітності: при цьому формула (1.11) стає частинним випадком формули (1.12) при $n = 0$.

Якщо справедлива рівність

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad (1.15)$$

то її називають *розвиненням функції* $f(x)$ *в узагальнений ряд Фур'є за ортогональною системою функцій* $\{\varphi_n(x)\}$. Відповідно рівність

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1.16)$$

будемо називати *розвиненням функції* $f(x)$ *в ряд Фур'є*.

Зауваження. Оскільки ми виходили з припущення, що розвинення функції $f(x)$ у її ряд Фур'є *можливе*, то питання, а чи є це насправді так, залишається відкритим. І до тих пір, поки не з'ясовані умови, за яких складений ряд збігається, причому саме до функції $f(x)$, ми маємо право лише писати

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad (1.17)$$

маючи на увазі під цим записом, що ряд Фур'є, “породжений” функцією $f(x)$, зв'язаний з нею *лише формально*.

1.3. Достатні умови розвинності функцій в ряд Фур'є

Для того, щоб знак відповідності в останньому співвідношенні міг бути замінений на знак рівності, тобто для того, щоб формально написаний ряд Фур'є збігався на відрізок $[-\pi, \pi]$, причому саме до функції $f(x)$, остання повинна задовольняти деяким умовам, що даються наступними теоремами.

Теорема 1.1 (перша теорема збіжності). Нехай функція $f(x)$ і її похідна $f'(x)$ кусково-неперервні на відрізку $[-\pi, \pi]$. Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається для будь-якого значення $x \in [-\pi, \pi]$, тобто існує сума $S(x)$ ряду Фур'є

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \right), \quad (1.18)$$

причому в кожній внутрішній точці $x \in (-\pi, \pi)$

$$S(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow x+0} f(t) + \lim_{t \rightarrow x-0} f(t) \right], \quad (1.19)$$

а у межових точках $x = \pm \pi$ відрізка

$$S(\pm \pi) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) \right]. \quad (1.20)$$

Зауваження.

1. У точках $x \in (-\pi, \pi)$ неперервності функції $f(x)$ виконується

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow x-0} f(t) = \lim_{t \rightarrow x+0} f(t),$$

тому з (1.19) випливає, що в зазначених точках $S(x) = f(x)$.

2. Геометричний зміст умов теореми полягає у тому, що на відрізку $[-\pi, \pi]$ графік функції $f(x)$ складається зі скінченного числа скінченних *гладких* дуг (тобто таких, що не мають ані кутових точок, ані точок загострення) і являє собою неперервну або розривну лінію (рис. 1.1). При цьому розриви графіка (якщо вони мають місце) відповідають точкам c_i розриву *першого роду* функції $f(x)$, і таких точок може бути лише скінченне число. У кожній з зазначених точок існують обидві скінченні односторонні границі $\lim_{x \rightarrow c_i-0} f(x)$ й

$\lim_{x \rightarrow c_i+0} f(x)$, отже, згідно з (1.19) сума ряду Фур'є в цій точці дорівнює

середньому арифметичному відповідних односторонніх границь:

$$S(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow c_i-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow c_i+0} f(x) \right].$$

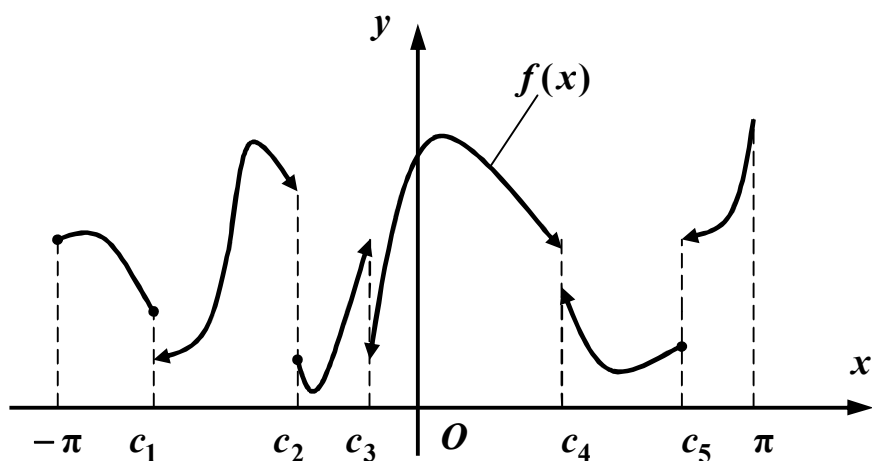


Рис. 1.1

Теорема збіжності може бути сформульована й інакше.

Теорема 1.2 (друга теорема збіжності або ознака Діріхле). Нехай функція $f(x)$ на відрізку $[-\pi, \pi]$ задовольняє *умовам Діріхле*: 1) неперервна або кусково-неперервна (тобто має лише точки розриву першого роду, яких скінченне число); 2) має лише скінченне число екстремумів. Тоді мають місце твердження (1.18) – (1.20).

Зауваження. Другу умову Діріхле іноді формулюють в дещо іншому вигляді, а саме: функція $f(x)$ повинна бути *кусово-монотонною* на відрізку $[-\pi, \pi]$, тобто цей відрізок можна розбити на скінченне число відрізків, всередині кожного з яких функція або тільки зростає, або тільки спадає, або є сталою.

Розвинення функцій в степеневі ряди має певні недоліки, головним з яких є те, що функція має бути не тільки неперервною, але й нескінченне число разів диференційовною. Однак в дуже великій кількості практичних задач зустрічаються недиференційовні функції (кусово-гладкі або кусково-неперервні), які не можуть бути подані у вигляді степеневого ряду. Для розвинення ж функції в ряд Фур'є достатньо тільки, щоб існувала (за виключенням, може бути, скінченного числа точок) неперервна перша похідна цієї функції або щоб функція мала скінченне число екстремумів, тобто була *кусово-монотонною*. Таким чином, у сукупності умови обох теорем охоплюють майже усі функції, які звичайно зустрічаються на практиці. Отже, кожна така функція може бути подана своїм рядом Фур'є, що й обумовлює

широке застосування цих рядів при розв'язанні багатьох задач з різних галузей науки і техніки.

1.4. Диференціювання і інтегрування рядів Фур'є

Якщо функція $f(x)$ має на відрізку $[-\pi, \pi]$ неперервні похідні до m -го порядку включно, то її ряд Фур'є можна почленно диференціювати m разів, тобто $\forall x \in [-\pi, \pi]$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos^{(k)} nx + b_n \sin^{(k)} nx \quad (k = \overline{0, m}).$$

Для будь-якої кусково-неперервної на відрізку $[-\pi, \pi]$ функції $f(x)$ породжений нею ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$. тобто

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_a^b + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\sin nx}{n} - b_n \frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_a^b.$$

1.5. Періодичні функції. Періодичність суми ряду Фур'є

Визначена в області D функція $f(x)$ називається *періодичною*, якщо існує число $T > 0$, таке, що в усій області D справедлива рівність

$$f(x \pm T) = f(x).$$

Якщо $(x + nT) \in D$, то $f(x \pm nT) = f(x)$, тобто число nT , де n – довільне натуральне число, також є періодом. Найменший з усіх періодів \tilde{T} називається *основним* або *головним* періодом функції $f(x)$.

Частинні суми $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$ ряду Фур'є є лінійними

комбінаціями функцій $\cos nx$ і $\sin nx$ тригонометричної системи (1.6), які всюди визначені і мають період $T = \frac{2\pi}{n}$. Тому усі частинні суми $S_n(x)$ теж

всюди визначені і мають період $T = \frac{2\pi}{n}n = 2\pi$. Очевидно, ця властивість зберігається й при граничному переході, отже, й сума будь-якого збіжного ряду

Фур'є $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)$ також буде періодичною

функцією з періодом $T = 2\pi$, тобто $S(x \pm 2\pi) = S(x) \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Таким чином, якщо деяка функція $f(x)$ задана на відрізку $[-\pi, \pi]$ і задовольняє на ньому умовам однієї з наведених теорем збіжності, то сума $S(x)$ ряду Фур'є цієї функції буде визначена не тільки на вказаному відрізку, але й на усій числовій прямій. При цьому в точках неперервності функції $f(x)$ виконується умова $S(x) = f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$, а в точках розриву c_i – умова

$$S(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow c_i - 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow c_i + 0} f(x) \right].$$

Функція $F(x)$, яка визначена на всій числовій осі і має період $T = 2\pi$, називається *періодичним продовженням* функції $f(x)$, заданої на відрізку $[-\pi, \pi]$, якщо в точках неперервності функції $f(x)$ виконується умова: $F(x) = f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$. Таким чином, сума $S(x)$ ряду Фур'є є періодичним продовженням на усю числову вісь функції $f(x)$, заданої на відрізку $[-\pi, \pi]$.

Поза межами відрізка $[-\pi, \pi]$ функція $f(x)$ може бути визначена або не визначена, а якщо визначена, то може бути неперіодичною або періодичною, причому значення її основного періоду може перевищувати довжину відрізка $[-\pi, \pi]$, тобто 2π . Оскільки значення функції $f(x)$ поза відрізка $[-\pi, \pi]$ не використовуються при побудові ряду Фур'є і, отже, не впливають на його суму $S(x)$, то ми будемо говорити про функцію $f(x)$ *тільки на тому відрізку, де вона задана*, а *поза межами* цього відрізка ми будемо говорити вже не про функцію $f(x)$, а про її періодичне продовження, не цікавлячись при цьому її фактичним виглядом.

Зрозуміло, наприклад, що якщо поза відрізка $[-\pi, \pi]$ функція $f(x)$ *взагалі не визначена* (рис. 1.2) або *визначена, але не періодична* (рис. 1.3), то $\forall x \notin [-\pi, \pi]$ умова $F(x) = f(x)$ *не виконується*.

Також зрозуміло, що якщо поза відрізка $[-\pi, \pi]$ функція $f(x)$ *визначена і в точках своєї неперервності періодична з періодом $T = 2\pi$* , то умова

$F(x) = f(x)$ виконується $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, тобто функція $f(x)$ всюди співпадає зі своїм періодичним продовженням і, як наслідок, “описується” своїм рядом Фур’є (рис. 1.4).

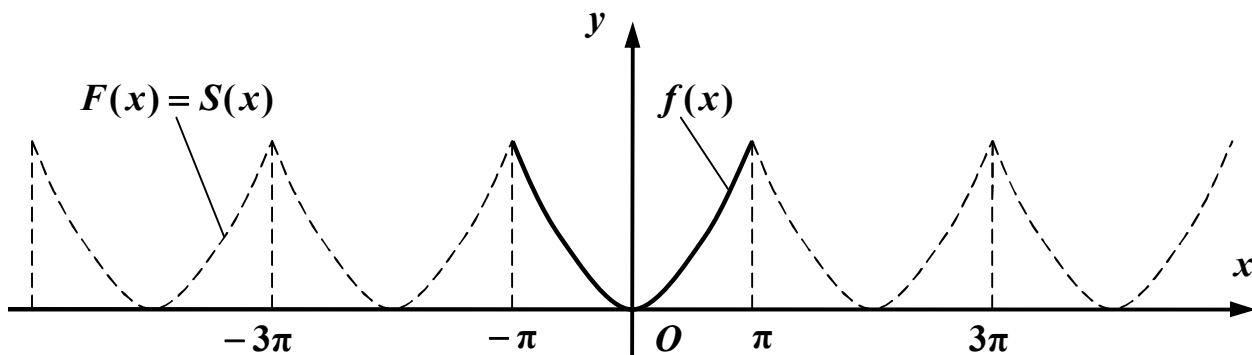


Рис. 1.2

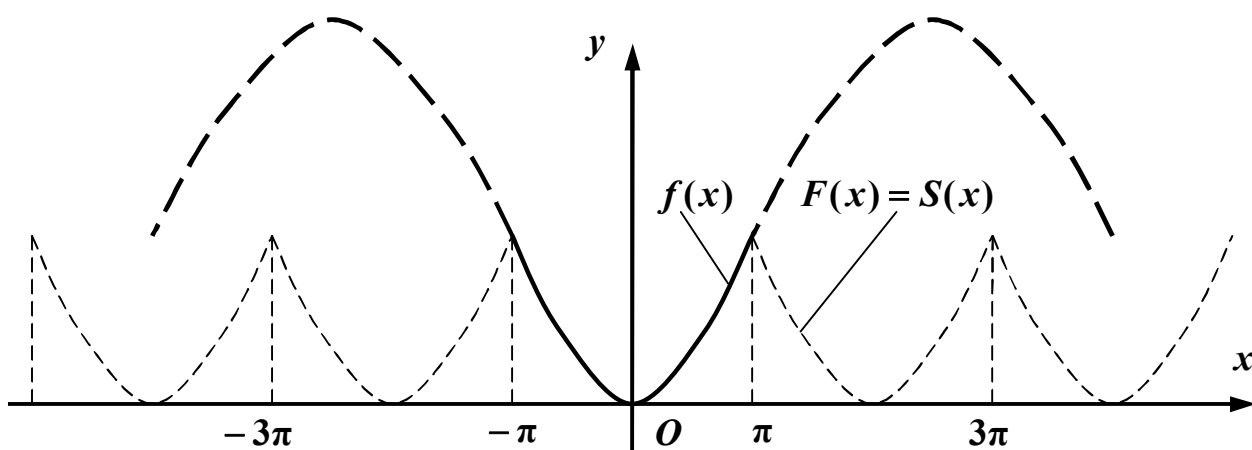


Рис. 1.3

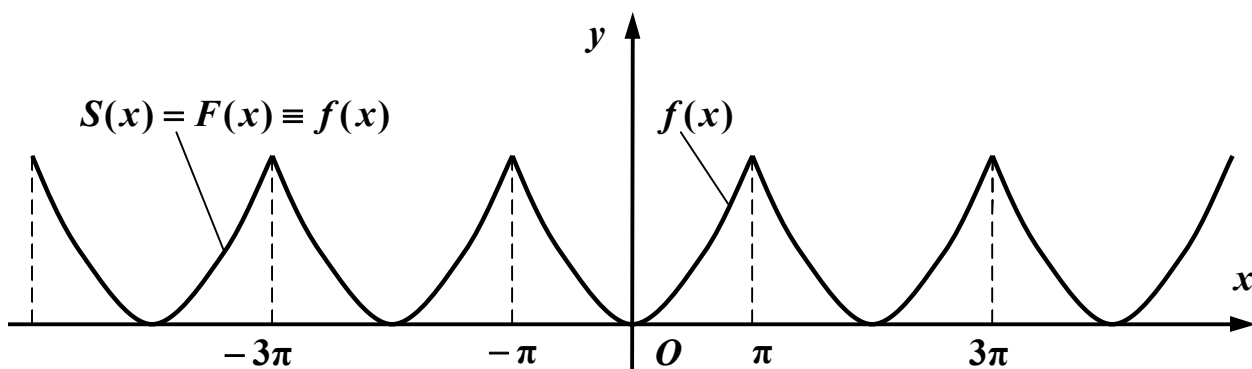


Рис. 1.4

Зауваження. Тут і в подальшому, якщо це не буде обумовлено спеціально, будемо вважати, що періодична функція задана на відрізку, довжина якого дорівнює періоду. Також в усіх без винятку випадках, не повторюючи це кожен

раз, будемо мати на увазі, що в ряд Фур'є фактично розвивається *періодичне продовження* функції, заданої на даному відрізку, незалежно від того, періодична вона насправді або ні.

Приклад 1.1. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Розв'язання. За умовою задачі функція задана на інтервалі $(-\pi, \pi)$. Її графік наведений на рис. 1.5.

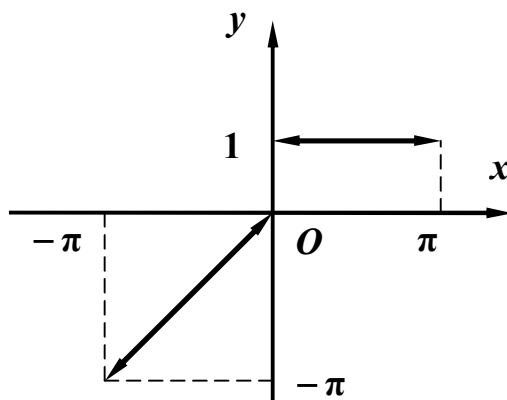


Рис. 1.5

Оскільки $f(x)$, як неважко бачити, задовольняє умовам кожної з теорем збіжності, то вона може бути розвинута в ряд Фур'є (1.10). Обчислимо його коефіцієнти.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 x dx + \int_0^{\pi} dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^0 + x \Big|_0^{\pi} \right] = 1 - \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 x \cos nx dx + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \left| \begin{array}{l} x = u, \quad dv = \cos nx dx, \\ dx = du, \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 = \frac{1}{\pi n^2} [1 - (-1)^n], \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 x \sin nx dx + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] = \left| \begin{array}{l} x = u, \quad dv = \sin nx dx, \\ dx = du, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx - \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{n} (-1)^n + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n} (-1)^n + \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{\pi n} \left[1 - (-1)^n - \pi (-1)^n \right].$$

Зауваження. Тут враховано парність функції $\cos x$ і те, що $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$. Наступні формули також досить часто застосовуються для спрощення результатів обчислень:

$$\cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k - 1, \\ (-1)^k, & n = 2k, \end{cases} \quad \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Зокрема, при $a = 0$, $l = \pi$ маємо

$$\cos n(x - \pi) = (-1)^n \cos nx, \quad \sin n(x - \pi) = (-1)^n \sin nx.$$

Таким чином, ряд Фур'є (1.10) заданої функції має вигляд

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{1 - (-1)^n - \pi(-1)^n}{n} \sin nx.$$

Цей ряд збігається в кожній точці відрізка $[-\pi, \pi]$, причому в точках неперервності функції

$$f(x) = S(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{1 - (-1)^n - \pi(-1)^n}{n} \sin nx,$$

$$S(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow x+0} f(t) + \lim_{t \rightarrow x-0} f(t) \right] = \frac{1}{2} \text{ в точці розриву } x = 0,$$

$$S(\pm \pi) = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow -l+0} f(t) + \lim_{t \rightarrow l-0} f(t) \right] = \frac{1 - \pi}{2} \text{ в межових точках } x = \pm \pi.$$

Якщо врахувати, що

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2} \left[1 - (-1)^n \right] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{2}{\pi(2k-1)^2}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n} \left[1 - (-1)^n - \pi(-1)^n \right] = \begin{cases} -\frac{1}{2k}, & n = 2k, \\ \frac{2 + \pi}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

то отримаємо ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x - \frac{\pi}{2k} \sin 2kx + \frac{2 + \pi}{2k-1} \sin(2k-1)x.$$

Графіки частинних сум ряду $S_5(x)$ і $S_{50}(x)$ наведені на рис. 1.6.

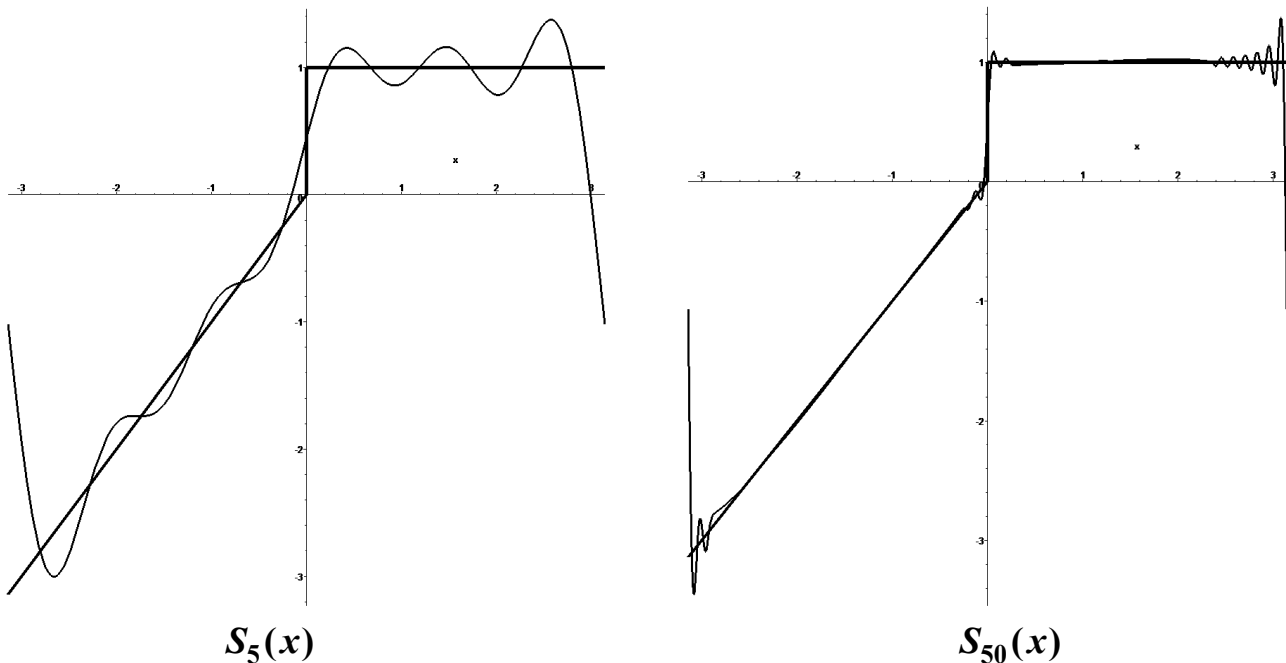


Рис. 1.6

Як бачимо, послідовність частинних сум збігається до заданої функції в точках неперервності, чого не можна сказати про околиці точок розриву. Це питання детальніше ми обговоримо у п. 1.9.

1.6. Фізичний зміст розвинення функції в тригонометричний ряд. Гармонічний аналіз

Періодичні функції мають велике практичне значення, оскільки на їх основі будуються математичні моделі багатьох реальних *періодичних* процесів, тобто таких, що мають властивість повторюватись через певні проміжки часу. Періодичні процеси часто зустрічаються в природі й техніці. Їх прикладами можуть служити зворотно-поступальні, коливальні і обертальні рухи різних частин машин і механізмів, акустичні та електромагнітні коливання, періодичні рухи небесних тіл і елементарних частинок та багато інших.

Відомо, що просте гармонічне коливання описується функцією

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1.21)$$

де s – *відхилення* точки від положення рівноваги, t – *час*, A – *амплітуда* коливання, ω – *кругова частота* (або просто *частота*), φ_0 – *початкова*

фаза коливання. Величина $\frac{\omega}{2\pi}$ називається *частотою коливання* і показує,

скільки коливань відбувається в одиницю часу. Час $T = \frac{2\pi}{\omega}$, за який точка, що коливається, здійснює одне повне коливання, тобто повертається до вихідного положення, називається *періодом коливання*.

Функція (1.21) (як і її графік) називається *простою гармонікою*. Оскільки кожна проста гармоніка описує окреме гармонічне коливання, то підсумовування цих гармонік означає накладання простих гармонічних коливань. Це створює *складене* гармонічне коливання, зовсім не схоже на його прості складові. Такий процес з точки зору математики є ніщо інше, як утворення деякої функції в результаті послідовної суперпозиції заданих функцій.

Також відомо, що сума декількох періодичних функцій не завжди буде функцією періодичною. Зокрема, сума простих гармонік

$$A_0 + \sum_{n=1}^k A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (1.22)$$

буде періодичною функцією тільки в тому випадку, коли частоти ω_n подаються у вигляді $\omega_n = r_n \omega$, де r_n – *цілі* числа. Тоді функція

$$A_0 + \sum_{n=1}^k A_n \sin(r_n \omega t + \varphi_n) \quad (1.23)$$

буде мати період $T = \frac{2\pi}{\omega}$ і описувати складене гармонічне коливання.

Гармонічна складова $A_n \sin(r_n \omega t + \varphi_n)$ називається *n-ю гармонікою руху*.

При розв'язанні багатьох конкретних проблем механіки і фізики виникла *обернена задача*: подати заданий періодичний рух як складене гармонічне коливання, тобто так підібрати прості гармонічні коливання, щоб їх накладання викликало заданий періодичний рух. На мові математики ця задача формулюється так: *розкласти задану періодичну функцію в суму простих гармонік*.

З'ясувалося, що для достатньо широкого класу періодичних функцій ця задача може бути розв'язана, але лише за умови розгляду суми нескінченної множини простих гармонік, тобто їх *ряду*:

$$\begin{aligned} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(r_n \omega t + \varphi_n) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos r_n \omega t \cdot \sin \varphi_n + \sin r_n \omega t \cdot \cos \varphi_n) = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \varphi_n \cdot \cos r_n \omega t + A_n \cos \varphi_n \cdot \sin r_n \omega t. \end{aligned}$$

Покладаючи для простоти $r_n = n$ і змінюючи змінну за формулою $x = \omega t$, отримаємо тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (1.24)$$

де $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_n = A_n \sin \varphi_n$, $b_n = A_n \cos \varphi_n$. При цьому $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Очевидно, що пара сусідніх членів тригонометричного ряду $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ відповідає *n-й гармоніці руху*.

Розкладання функцій на гармонічні складові, тобто подання її рядом Фур'є, прийнято називати *гармонічним* або *спектральним аналізом*. Обернений процес відновлення функції називають *спектральним синтезом*. Гармоніку з $n = 1$ називають *основною* або *першою*, інші гармоніки називають *вищими*.

Нині спектральний аналіз і синтез широко застосовуються не тільки в математиці, а й у теоретичних та прикладних дослідженнях в різних галузях науки й техніки. Особливо значна їх роль в механіці й фізиці (при дослідженні

коливань різної природи), астрономії, акустиці, теорії припливів, електротехніці (при дослідженні періодичних несинусоїдальних струмів), радіотехніці і радіоелектроніці, теорії систем, теорії автоматичного регулювання, при обробці і моделюванні сигналів та ін. Слід відзначити, що цей метод виявляється дуже корисним при дослідженні також й неперіодичних функцій, заданих лише на певному проміжку і не породжених ніякими періодичними коливальними явищами.

1.7. Розвинення в ряд Фур'є періодичних функцій

1.7.1. Незалежність коефіцієнтів ряду від розташування відрізка, на якому задана функція

Однією з властивостей періодичних функцій є те, що інтеграл по *будь-якому* відрізку довжиною T від функції $f(x)$, визначеної на усій числовій прямій і періодичної з періодом T , *не залежить* від розташування цього відрізка, тобто, наприклад,

$$\int_{-2T}^{-T} f(x) dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx,$$

і взагалі

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx \quad (a \neq b). \quad (1.25)$$

На рис. 1.7, наприклад, площа виділеної фігури зліва, сукупна площа двох фігур у центрі і сукупна площа двох фігур справа однакові.

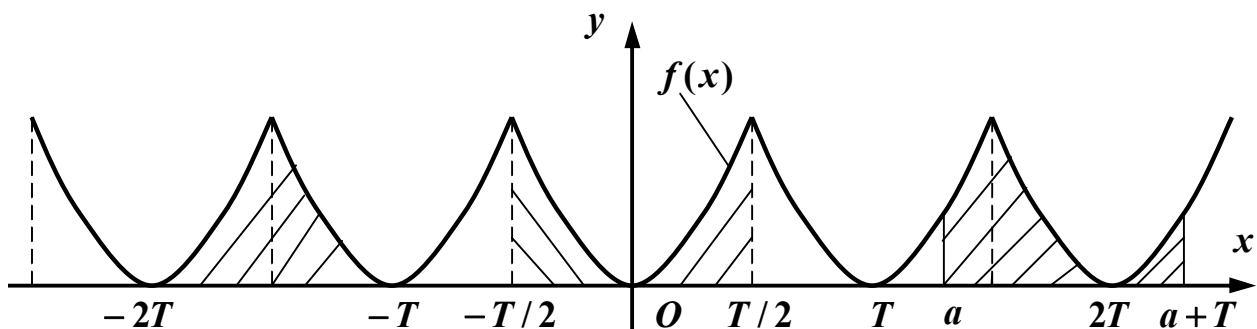


Рис. 1.7

Нехай функція $f(x)$ визначена на усій числовій прямій, періодична з періодом $T = 2\pi$ і відповідає умовам однієї з теорем збіжності. Назвемо **основним** відрізок $[-\pi, \pi]$, симетричний відносно початку координат. Його довжина дорівнює 2π , тобто періоду $f(x)$ і суми $S(x)$ її збіжного ряду Фур'є. Відповідно будь-який відрізок $[a, a + 2\pi]$ довжиною 2π ($a \neq -\pi$) будемо називати **зміщеним** (або **зсуненим**).

Зі співвідношення (1.25) випливає, що значення коефіцієнтів ряду Фур'є функції $f(x)$ на зміщеному відрізку $[a, a + 2\pi]$ залишаються тими ж, що і на основному відрізку $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

де

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Проте, слід зауважити, що у переважній більшості випадків, за виключенням деяких лінійних функцій, аналітичний вираз $f(x)$ (а, отже, й відповідні інтеграли від нього) має найпростіший вигляд саме на тому відрізку, де функція початково задана.

Приклад 1.2. Розвинути в ряд Фур'є на відрізку $[0, 2\pi]$ періодичну функцію $f(x) = \frac{\pi}{3} - (x - \pi)^2$.

Розв'язання. За умовою задачі функція задана на зміщеному відрізку. Оскільки $f(x)$ на ньому неперервна, то вона може бути розвинена в ряд Фур'є (1.10). Обчислимо його коефіцієнти, поклавши у вищенаведених формулах $a = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\pi}{3} - (x - \pi)^2 \right] dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi x}{3} - \frac{(x - \pi)^3}{3} \right] \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3} (1 - \pi),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\pi}{3} - (x - \pi)^2 \right] \cos nx dx = \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} - (x - \pi)^2 = u, \quad \cos nx dx = dv \\ -2(x - \pi) dx = du, \quad \frac{1}{n} \sin nx = v \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{3n} \sin nx - \frac{(x - \pi)^2}{n} \sin nx \right) \Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} (x - \pi) \sin nx dx \right] =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x - \pi = u, \quad \sin nx dx = dv, \\ dx = du, \quad -\frac{1}{n} \cos nx = v \end{array} \right| = \frac{2}{\pi n} \left[-\frac{x - \pi}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right] \Big|_0^{2\pi} = -\frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\pi}{3} - (x - \pi)^2 \right] \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} - (x - \pi)^2 = u, \quad \sin nx dx = dv \\ -2(x - \pi) dx = du, \quad -\frac{1}{n} \cos nx = v \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{\pi}{3n} \cos nx + \frac{(x - \pi)^2}{n} \cos nx \right) \Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} (x - \pi) \cos nx dx \right] =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x - \pi = u, \quad \cos nx dx = dv, \\ dx = du, \quad \frac{1}{n} \sin nx = v \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{3n} + \frac{\pi^2}{n} + \frac{\pi}{3n} - \frac{\pi^2}{n} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(x - \pi)}{n^2} \sin nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n^2} \cos nx \Big|_0^{2\pi} \right] = 0.$$

Таким чином, на всьому відрізку (внаслідок неперервності функції)

$$f(x) = S(x) = \frac{\pi}{3}(1 - \pi) - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

В межових точках $x = 0$ й $x = 2\pi$ $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2\pi-0} f(x) = \frac{\pi}{3} - \pi^2$, тому

в цих точках сума ряду набуває того ж значення, тобто $S(0) = S(2\pi) = \frac{\pi}{3} - \pi^2$.

Зауваження. В цьому прикладі ми отримали *неповний* ряд Фур'є, який містить лише косинуси. У п.1.7.3 ми до цього ще повернемося.

1.7.2. Випадок довільного періоду

Досі ми розглядали функції, які мали період $T = 2\pi$ і були задані на будь-якому відрізку тієї ж довжини. Нехай тепер функція $f(x)$ має довільний період $T = 2l$ і задана на довільно розташованому відрізку $[a, a + 2l]$ довжиною $2l$. За допомогою заміни змінної $x = \frac{yl}{\pi}$ ми приходимо до функції $f\left(\frac{yl}{\pi}\right) = \varphi(y)$, яка має період $T = 2\pi$ і задана на відрізку $\left[\frac{\pi a}{l}, \frac{\pi a}{l} + 2\pi\right]$ довжиною 2π . Ряд Фур'є цієї функції має вигляд

$$\varphi(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny + b_n \sin ny,$$

а його коефіцієнти обчислюються за формулами

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi a}{l}}^{\frac{\pi a}{l} + 2\pi} \varphi(y) \cos ny dy \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi a}{l}}^{\frac{\pi a}{l} + 2\pi} \varphi(y) \sin ny dy \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Виконуючи обернену заміну $y = \frac{\pi x}{l}$, для функції $f(x)$ отримаємо ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1.26)$$

з коефіцієнтами

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.27)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.28)$$

Усе сказане вище відносно збіжності ряду Фур'є залишається справедливим і в даному випадку. Сума $S(x)$ ряду (1.26) періодична з періодом $2l$, визначена на усій числовій осі і подає функцію $f(x)$ в усіх точках її неперервності.

Формули (1.26) – (1.28) є *основними*, з яких випливають як частинні випадки, зокрема, формули (1.10) – (1.13), якщо покласти $a = -\pi$, $l = \pi$. Якщо ж покласти $a = -l$, то коефіцієнти ряду (1.26) будуть мати вигляд

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.29)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.30)$$

За аналогією з попереднім, відрізок $[-l, l]$ можна називати *основним*, а відрізок $[a, a + 2l]$ ($a \neq -l$) – *зміщеним*.

Зауваження. У всіх випадках коефіцієнт a_0 , слід, взагалі кажучи, обчислювати *окремо*, а не отримувати з виразу a_n , покладаючи в ньому $n = 0$.

Приклад 1.3. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} x/3, & -3 < x \leq 0, \\ 3-x, & 0 < x \leq 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Графік функції наведений на рис. 1.8.

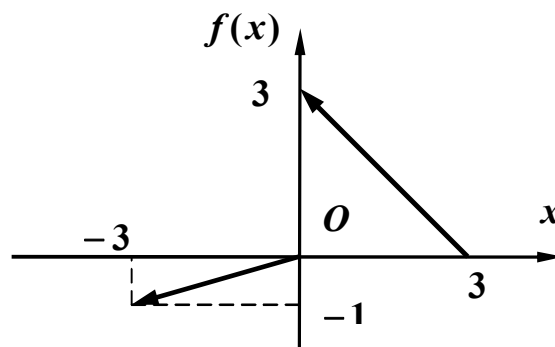


Рис. 1.8

Судячи з умови, період функції $T = 2l = 3 - (-3) = 6$, тобто напівперіод $l = 3$. Функція $f(x)$ не є ані парною, ані непарною, і на відрізку $[-3, 3]$, де вона задана, є неперервною, за винятком однієї точки розриву першого роду $x = 0$. Отже, $f(x)$ задовольняє умови теореми збіжності. Тому відповідний ряд Фур'є має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$\text{де } a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Цей ряд збігається в кожній точці відрізка $[-l, l]$, причому сума ряду $S(x) = f(x)$ у точках неперервності функції $f(x)$,

$$S(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow x+0} f(t) + \lim_{t \rightarrow x-0} f(t) \right] \text{ у точках розриву,}$$

$$S(\pm l) = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow -l+0} f(t) + \lim_{t \rightarrow l-0} f(t) \right] \text{ на кінцях відрізка } [-l, l].$$

Обчислимо коефіцієнти ряду:

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 \frac{x}{3} dx + \int_0^3 (3-x) dx \right] = 1,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 \frac{x}{3} \cos \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 (3-x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{3x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} + \frac{9}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{3} \right) \Big|_{-3}^0 + \left[\frac{3}{n\pi} (3-x) \sin \frac{n\pi x}{3} - \frac{9}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{3} \right] \Big|_0^3 \right\} = \\ &= \frac{4}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{8}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1, \quad (k = 1, 2, \dots), \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 \frac{x}{3} \sin \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 (3-x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{3x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} + \frac{9}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{3} \right) \Big|_{-3}^0 + \left(-\frac{3}{n\pi} (3-x) \cos \frac{n\pi x}{3} - \frac{9}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{3} \right) \Big|_0^3 \right] = \\ &= \frac{1}{n\pi} [3 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{1}{k\pi}, & n = 2k, \\ \frac{4}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1, \quad (k = 1, 2, \dots). \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, враховуючи *тільки ненульові* члени ряду, одержуємо, що задана функція в точках її неперервності подається у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{3} + \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{3} + \frac{1}{k\pi} \sin \frac{2k\pi x}{3}.$$

В точці розриву $x = 0$ сума ряду набуває значення

$$S(0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) \right] = \frac{1}{2} [0 + 3] = \frac{3}{2},$$

а в межових точках $x = \pm 3$ вона набуває значення

$$S(\pm 3) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) \right] = \frac{1}{2} [-1 + 0] = -\frac{1}{2}.$$

Зауваження. Відшукання інтегралів вигляду

$$\int (cx + d)^m \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad \int (cx + d)^m \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$\int (cx + d)^m \cos \frac{n\pi(x-a)}{l} dx, \quad \int (cx + d)^m \sin \frac{n\pi(x-a)}{l} dx$$

($m = 1, 2, 3$) значно спрощується за допомогою табл. 1.1, у якій позначено

$$p = \frac{l}{n\pi}, \quad y = cx + d,$$

$$X = \cos \frac{n\pi x}{l} \quad \text{або} \quad X = \cos \frac{n\pi(x-a)}{l}, \quad Y = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \text{або} \quad Y = \sin \frac{n\pi(x-a)}{l}.$$

Таблиця 1.1

Інтеграл	Первісна
$\int X dx$	pY
$\int yX dx$	$p(yY + cpX)$
$\int y^2 X dx$	$p[(y^2 - 2c^2 p^2)Y + 2cpyX]$
$\int y^3 X dx$	$p[(y^3 - 6c^2 p^2 y)Y + 3cp(y^2 - 2c^2 p^2)X]$
$\int Y dx$	$-pX$
$\int yY dx$	$-p(yX - cpY)$
$\int y^2 Y dx$	$-p[(y^2 - 2c^2 p^2)X - 2cpyY]$
$\int y^3 Y dx$	$-p[(y^3 - 6c^2 p^2 y)X - 3cp(y^2 - 2c^2 p^2)Y]$

1.7.3. Ряди Фур'є парних і непарних функцій

Функція $f(x)$ називається *парною*, якщо $f(-x) = f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy .

Функція $f(x)$ називається *непарною*, якщо $f(-x) = -f(x)$. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Функція $f(x)$ називається *парною на відрізку $[a, b]$* , якщо $f(a+b-x) = f(x)$. Графік такої функції симетричний відносно прямої $x = \frac{a+b}{2}$ (рис. 1.9). Тоді виконується

$$\int_a^b f(x) dx = 2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = 2 \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx. \quad (1.31)$$

Функція $f(x)$ називається *непарною на відрізку $[a, b]$* , якщо $f(a+b-x) = -f(x)$. Графік такої функції симетричний відносно точки $(\frac{a+b}{2}; 0)$ (рис. 1.10). Тоді виконується

$$\int_a^b f(x) dx = 0. \quad (1.32)$$

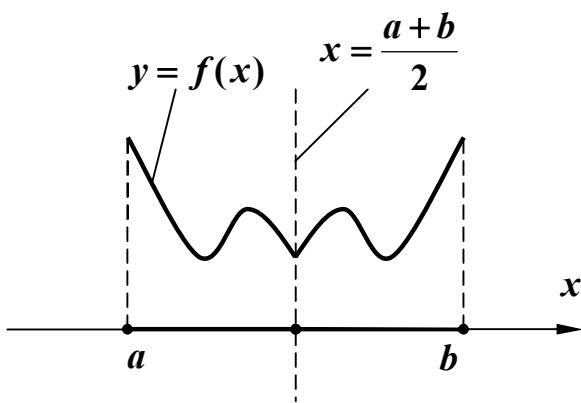


Рис. 1.9

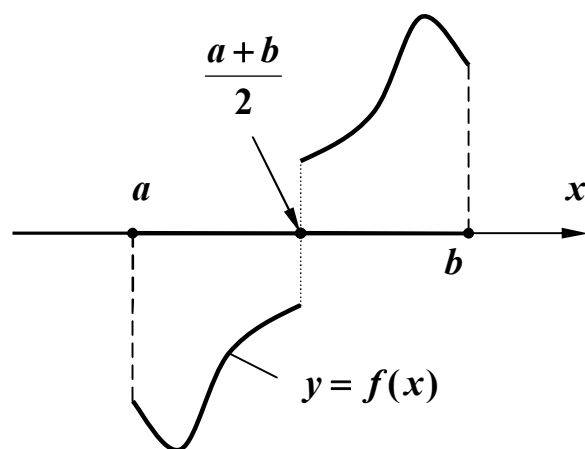


Рис. 1.10

Зауваження. Якщо зробити заміну змінної $x = z + \frac{a+b}{2}$, то отримаємо функцію $\varphi(z) = f\left(z + \frac{a+b}{2}\right)$. Вона може бути парною або непарною у звичайному сенсі, тобто якщо $\varphi(-z) = \varphi(z)$, то $f(x)$ парна на заданому відрізку, а якщо $\varphi(-z) = -\varphi(z)$, то $f(x)$ на цьому відрізку непарна.

Якщо покласти $b = a + 2l$ і врахувати (1.31) – (1.32), а також те, що *добуток двох функцій однакової парності є функцією парною, а добуток функцій різної парності є функцією непарною*, то отримаємо наступні результати.

1. Якщо функція $f(x)$ періодична з періодом $2l$, задана на відрізку $[a, a + 2l]$, задовольняє на ньому умовам однієї з теорем збіжності і є *парною*, то коефіцієнти Фур'є цієї функції обчислюються за формулами

$$a_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.33)$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

а відповідний ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (1.34)$$

В цьому випадку говорять, що *парна функція розвивається в ряд Фур'є за косинусами*.

Зауваження. Коефіцієнти a_n можна також обчислювати за формулами

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{a+l}^{a+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

2. Якщо функція $f(x)$ періодична з періодом $2l$, задана на відрізку $[a, a + 2l]$, задовольняє на ньому умовам однієї з теорем збіжності і є *непарною*, то коефіцієнти Фур'є цієї функції обчислюються за формулами

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.35)$$

а відповідний ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (1.36)$$

В цьому випадку говорять, що *непарна функція розвивається в ряд Фур'є за синусами*.

Зауваження. Коефіцієнти b_n можна також обчислювати за формулами

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{a+l}^{a+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

У прикладі 1.2 був отриманий ряд Фур'є за косинусами внаслідок того, що задана функція $f(x) = \frac{\pi}{3} - (x - \pi)^2$ на відрізку $[0, 2\pi]$ є парною, оскільки, зробивши заміну змінної $x = z + \pi$, ми отримаємо функцію $\varphi(z) = f(z + \pi) = \frac{\pi}{3} + (z + \pi - \pi)^2 = \frac{\pi}{3} + z^2$, яка парна у звичайному сенсі. Якби ми це знали раніше, то обсяг обчислень при розв'язанні прикладу був би набагато меншим, оскільки заздалегідь відомо, що в цьому випадку $b_n = 0$. Тому для скорочення обчислень бажано одразу встановлювати тип заданої функції на проміжку розвинення. На практиці це досить часто можна зробити за виглядом графіка функції.

Приклад 1.4. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = \frac{1}{4}(x - 4)^3$, задану на інтервалі $(2, 6)$.

Розв'язання. За умовою задачі функція задана на зміщеному інтервалі-періоді. Виходячи з умови, $a = 2$, $T = 6 - 2 = 4 \Rightarrow l = 2$. Зробимо заміну змінної за формулою $x = z + \frac{a+b}{2}$, тобто $x = z + 4$. Одержимо функцію $\varphi(z) = f(z + 4) = \frac{1}{4}z^3$, яка непарна. Тому задана функція $f(x)$ в інтервалі $(2, 6)$ розвивається в ряд Фур'є (1.36) за синусами

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

Коефіцієнти ряду обчислимо за формулами (1.35) із застосуванням табл. 1.1:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{2} \int_2^4 \frac{1}{4} (x-4)^3 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{2}{4n\pi} \left[\left((x-4)^3 - 6 \cdot \frac{4}{n^2\pi^2} (x-4) \right) \cos \frac{n\pi x}{2} - \right. \\
 &- 3 \cdot \frac{2}{n\pi} \left((x-4)^2 - 2 \cdot \frac{4}{n^2\pi^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2} \left. \right]_2^4 = \frac{1}{2n\pi} \left((-8) + \frac{48}{n^2\pi^2} \right) \cos n\pi = \\
 &= \frac{4}{n\pi} \left(\frac{6}{n^2\pi^2} - 1 \right) (-1)^n.
 \end{aligned}$$

Таким чином,
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{6}{n^2\pi^2} - 1 \right) (-1)^n \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

Оскільки $f(x)$ неперервна в заданому інтервалі, то сума $S(x)$ ряду Фур'є співпадає з $f(x)$ в кожній точці інтервалу. В межових точках сума ряду набуває

значення
$$S(2) = S(6) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 7-0} f(x) \right] = \frac{1}{2} [-2 + 2] = 0.$$

1.8. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій

В ряди Фур'є на усій числовій осі можна розвивати тільки періодичні функції, які всюди визначені. Такі функції задаються на певному проміжку і періодично продовжуються на всю числову вісь. Неперіодичні функції, які всюди визначені, не можуть бути розвинені в ряд Фур'є на усій числовій осі. Це можливо зробити лише на деякому проміжку X . З цією метою будується деяка “допоміжна” *періодична* функція $f^*(x)$, яка на проміжку X (і тільки на ньому!) співпадає з заданою неперіодичною функцією $f(x)$. Така функція вже може бути розвинута в ряд Фур'є, причому сума $S(x)$ цього ряду співпадає з $f^*(x)$ на усій числовій осі (у точках її неперервності), а, отже, на проміжку X вона співпадає з $f(x)$. На рис. 1.11 та на наступних в якості проміжку X показаний відрізок $[a, b]$.

Допоміжна функція може бути побудована декількома способами.

Спосіб 1. Можна вважати, що період $f^*(x) \in b - a = T = 2l$, отже, вона є періодичним продовженням заданої функції $f(x)$ і ми приходимо до п.1.6. Зокрема, якщо на заданому відрізку $f(x) \in$ функцією загального вигляду, то вона розвивається в *повний* ряд Фур'є (1.26) (рис. 1.12).

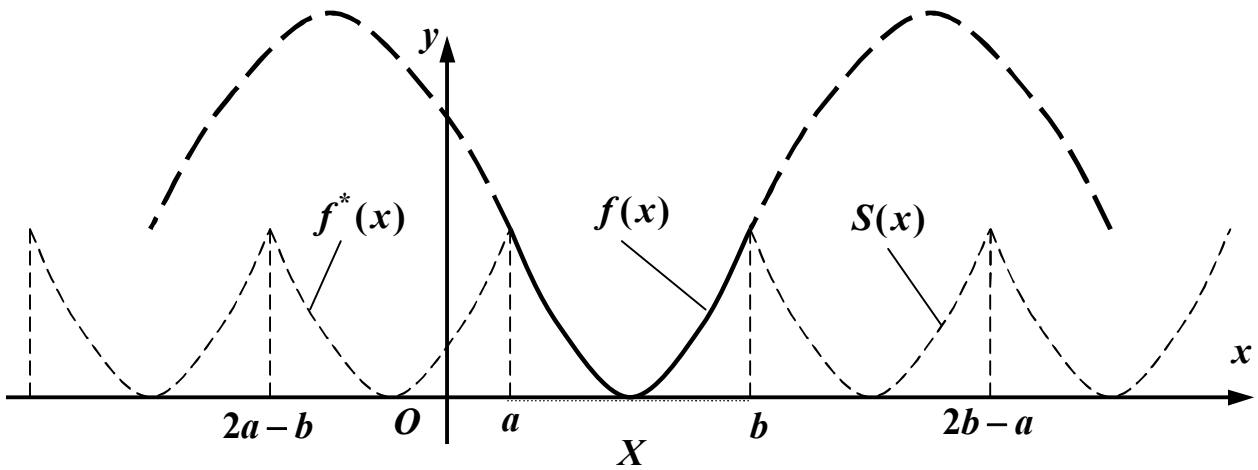


Рис. 1.11

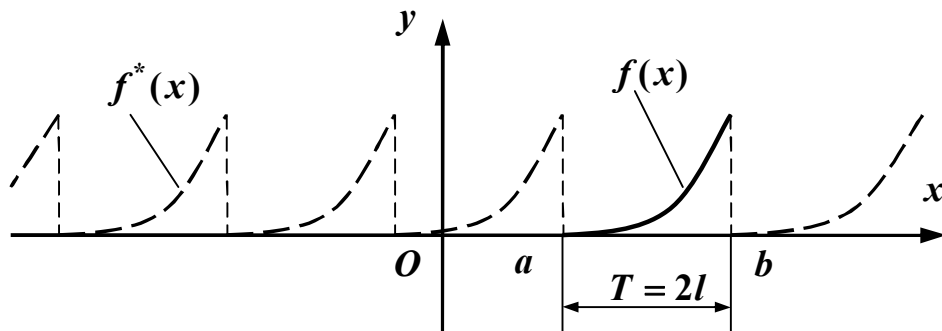


Рис. 1.12

Спосіб 2. Можна вважати, що $b - a = T/2 = l$, тобто функція $f^*(x)$ задана на напівперіоді. Оскільки для розвинення в ряд Фур'є цього недостатньо, то $f^*(x)$ повинна бути до визначена тим чи іншим чином на суміжному відрітку-напівперіоді, наприклад, на відрітку $[2a - b, a]$. Частіше говорять, що $f(x)$ продовжується на відрізок $[2a - b, a]$.

А. Якщо це продовження довільне, то $f^*(x)$ розвивається в повний ряд Фур'є (1.26). Таких рядів буде нескінченна множина, однак сума $S(x)$ кожного з них на усій числовій осі, зокрема, на відрітку $[2a - b, b]$ буде співпадати з $f^*(x)$ в точках неперервності, тобто на відрітку $[a, b]$ (що нас, власне, тільки і цікавить) буде співпадати з $f(x)$ в точках її неперервності (рис. 1.13).

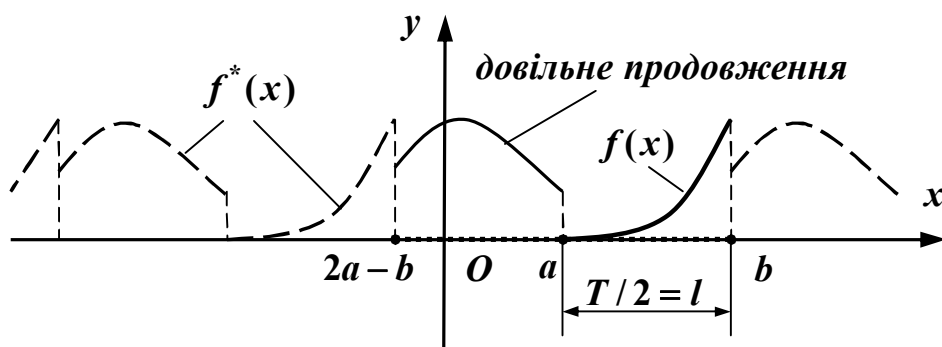


Рис. 1.13

Зауваження. Найбільш прийнятним варіантом довільного продовження є покладання $f^*(x) = 0 \quad \forall x \in [2a - b, a]$. Хоча при цьому і отримуємо повний ряд Фур'є, але коефіцієнти цього ряду не будуть невинувато складними, як це може виявитися в інших випадках.

Б. Функція $f(x)$ продовжується на суміжний відрізок не довільно, а *парним* чином, тобто так, щоб $f^*(x)$ була *парною* на відрізку $[2a - b, b]$. При цьому її графік симетричний відносно прямої $x = a$ (рис. 1.14).

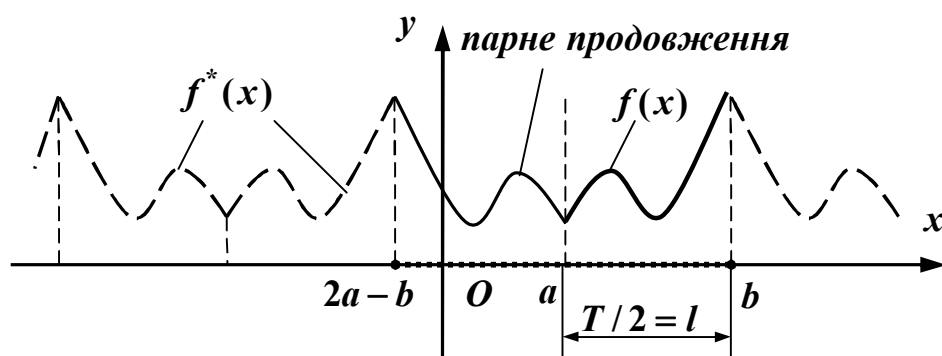


Рис. 1.14

Тоді $f^*(x)$ розвивається в неповний ряд Фур'є за *косинусами*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi(x-a)}{l}, \quad (1.37)$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами

$$a_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \cos \frac{n\pi(x-a)}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.38)$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

а сума $S(x)$ співпадає з $f^*(x)$ в точках неперервності на усій числовій осі, тобто на відрізку $[a, b]$ вона співпадає з $f(x)$.

в) Функція $f(x)$ продовжується на суміжний відрізок *непарним* чином, тобто так, щоб $f^*(x)$ була *непарною* на відрізку $[2a - b, b]$. При цьому її графік симетричний відносно точки $(a; 0)$ (рис. 1.15).

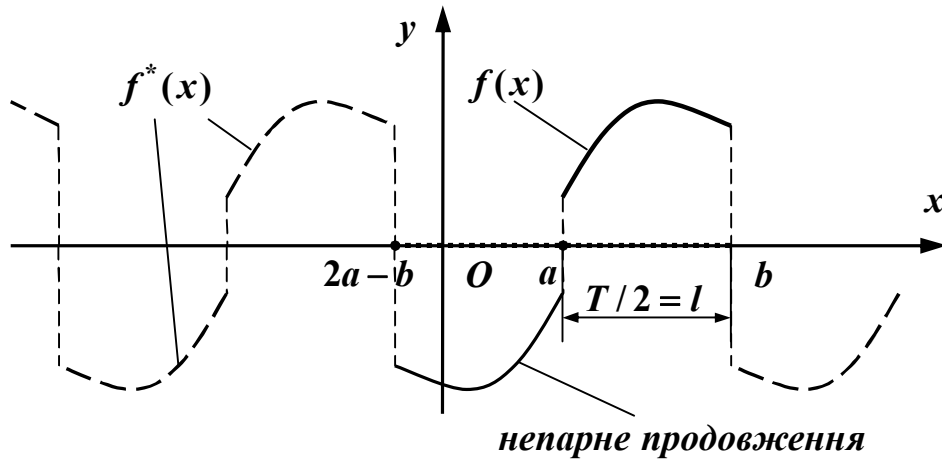


Рис. 1.15

Тоді $f^*(x)$ розвивається в неповний ряд Фур'є за *синусами*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi(x-a)}{l}, \quad (1.39)$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \sin \frac{n\pi(x-a)}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.40)$$

а сума $S(x)$ співпадає з $f^*(x)$ в точках неперервності на усій числовій осі, отже, на відрізку $[a, b]$ вона співпадає з $f(x)$.

Приклад 1.5. Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = \cos \frac{x}{3}$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Розв'язання. За умовою задачі функція $f(x)$ неперіодична, $a = 0$, $b = \pi$. Оскільки $f(x)$ треба розвинути в ряд Фур'є за косинусами, то $l = \pi$ і $f(x)$ необхідно продовжити на суміжний відрізок $[-\pi, 0]$ парним чином. Отримана у такий спосіб допоміжна функція $f^*(x)$ буде мати період 2π (рис. 1.16).

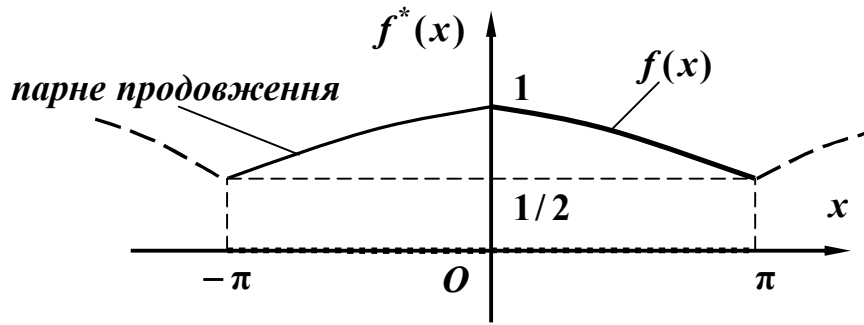


Рис. 1.16

Ряд (1.37) в даному випадку має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Обчислимо його коефіцієнти за формулами (1.38):

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{3} dx = \frac{6}{\pi} \sin \frac{x}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{3} \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\cos \left(\frac{1}{3} - n \right)x + \cos \left(\frac{1}{3} + n \right)x \right] dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \left(\frac{1}{3} - n \right)\pi}{\frac{1}{3} - n} + \frac{\sin \left(\frac{1}{3} + n \right)\pi}{\frac{1}{3} + n} \right] = (-1)^n \frac{3\sqrt{3}}{(1 - 9n^2)\pi}. \end{aligned}$$

Отже, шукане розвинення має вигляд $f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - 9n^2} \cos nx$.

Оскільки на відрізку $[0, \pi]$ задана функція неперервна, то сума $S(x)$ знайденого ряду Фур'є в кожній точці цього відрізка буде співпадати з $f(x)$, а на відрізку $[-\pi, 0]$ – з її парним продовженням. В межових точках відрізка $[0, \pi]$ сума ряду набуває значень $S(0) = 1$, $S(\pi) = \frac{1}{2}$.

Приклад 1.6. Розвинути в ряд Фур'є за синусами функцію, графік якої зображений на рис. 1.17.

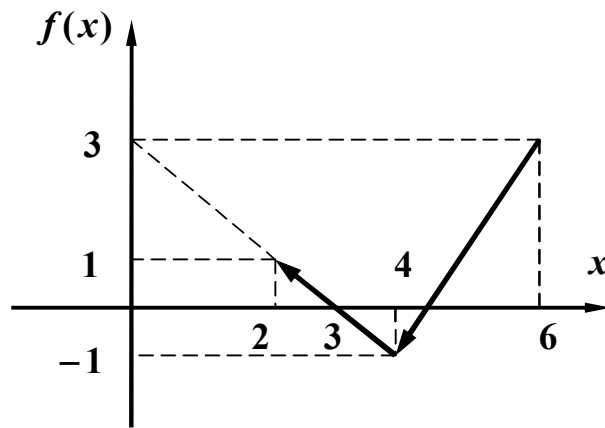


Рис. 1.17

Розв'язання. За умовою задачі функція $f(x)$ неперіодична, $a = 2$, $b = 6$. Оскільки $f(x)$ треба розвинути в ряд Фур'є за синусами, то $l = 6 - 2 = 4$ і $f(x)$ необхідно продовжити на суміжний відрізок $[-2, 2]$ непарним чином. Отримана у такий спосіб допоміжна функція $f^*(x)$ буде мати період $T = 8$ (рис. 1.18).

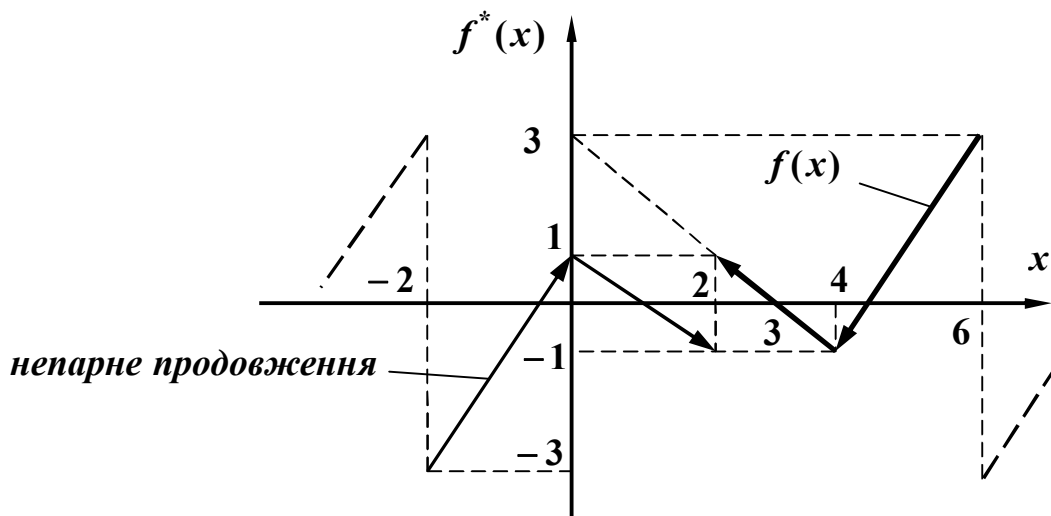


Рис. 1.18

На відрізку $[-2, 6]$ функція $f^*(x)$ кусково-неперервна (має один розрив першого роду в точці $x = 2$), отже, задовольняє умовам кожної з теорем збіжності. Ряд (1.39) в даному випадку має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi(x-2)}{4}.$$

Обчислимо його коефіцієнти за формулами (1.40):

$$b_n = \frac{2}{4} \int_2^6 f(x) \sin \frac{n\pi(x-2)}{4} dx, \quad \text{де } f(x) = \begin{cases} 3-x, & 2 \leq x \leq 4, \\ 2x-9, & 4 < x \leq 6. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \left[\int_2^4 (3-x) \sin \frac{n\pi(x-2)}{4} dx + \int_4^6 (2x-9) \sin \frac{n\pi(x-2)}{4} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{3-x}{n\pi} 4 \cos \frac{n\pi(x-2)}{4} + \frac{16}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi(x-2)}{4} \right]_2^4 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[-\frac{2x-9}{n\pi} 4 \cos \frac{n\pi(x-2)}{4} + \frac{32}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi(x-2)}{4} \right]_4^6 = \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left[3(-1)^n - 1 + \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] = \begin{cases} \frac{8}{(2k-1)\pi} \left[1 + \frac{(-1)^k}{(2k-1)\pi} \right], & n = 2k-1, \\ -\frac{2}{k\pi}, & n = 2k \quad (k = 1, 2, \dots). \end{cases} \end{aligned}$$

Таким чином, шукане розвинення має вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2k-1} \left[1 + \frac{(-1)^k}{(2k-1)\pi} \right] \sin \frac{(2k-1)\pi(x-2)}{4} - \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi(x-2)}{2}.$$

Оскільки на відрізку $[2, 6]$ задана функція неперервна, то сума $S(x)$ знайденого ряду Фур'є в кожній точці цього відрізка буде співпадати з $f(x)$, а на відрізку $[-2, 2]$ – з її парним продовженням. В межових точках відрізка $[2, 6]$ сума ряду набуває значень $S(2) = S(6) = 0$.

1.9. Ефект Гіббса

Питання про збіжність рядів Фур'є у практичній площині виникло наприкінці XIX століття у зв'язку зі спробами передбачення інтенсивності припливів і відливів. Лорд Кельвін винайшов аналоговий обчислювальний пристрій, що дозволяв морякам торгового і військового флотів дізнаватися про припливи та відливи. Аналоговий обчислювач механічно визначав набори

амплітуд і фаз за таблицею припливних висот і відповідних моментів часу, що ретельно замірювалися протягом року в даній гавані.

Кожна амплітуда і фаза представляли синусоїдальну компоненту функції висоти припливу і вводилися в обчислювальний пристрій лорда Кельвіна, який синтезував криву, що пророкувала висоту припливу, як функцію часу, на наступний рік. Незабаром подібні криві припливів були складені для всіх портів світу.

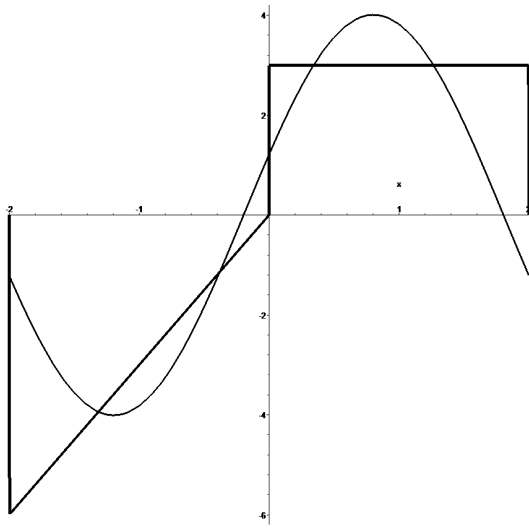
Здавалося очевидним, що ця машина з великою кількістю механічних елементів рахунку зможе обчислити більше число амплітуд і фаз і, таким чином, забезпечить більш точні передбачення. Однак виявилось, що це не відбувалося у разі, коли припливна функція, яку потрібно було синтезувати, містила різкий стрибок, тобто, за суттю, була розривною функцією.

Наприкінці 1898 р. – початку 1899 р. американський фізик *Джозайя Уїллард Гіббс* (1839-1903), один з основоположників статистичної механіки, професор математичної фізики на факультеті філософії та витончених мистецтв Йельського університету, опублікував в англійському загальнонауковому журналі «Nature» («Природа», видається з 1869 р.) дві невеликі нотатки (J. Willard Gibbs. Fourier's Series. // Nature. – 1898. – Vol. 59, Num. 1522. – P. 200, J. Willard Gibbs. Fourier's Series. // Nature. – 1899. – Vol. 59, Num. 1539. – P. 606), в яких показав, що ряд Фур'є не завжди подає функцію з належною точністю. Редакція журналу, як і сам Гіббс, не знали, що цей результат (ряд Фур'є розривної функції не збігається до цієї функції в околі точки розриву) вже був опублікований в Англії англійським вченим *Генрі Уїлбрахамом* (1825-1883) за 50 років до цього (Willbraham H. // Cambridge and Dublin Math. Journ. – 1848. – Vol.3. – P.198 – 201), але не був помічений у науковому світі. Тому наразі це явище відомо як **ефект Гіббса**.

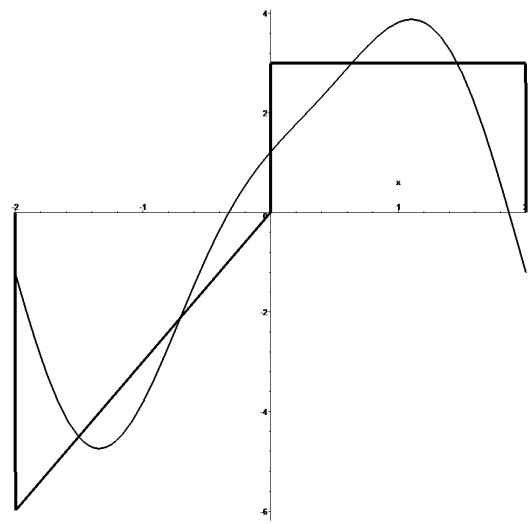
Раніше ми вже звертали увагу на особливості поведінки частинних сум ряду Фур'є в околі точок розриву (див. приклад 1.1). Тут ми обговоримо це дещо детальніше.

На рис. 1.19 наведені графіки частинних сум $S_1(x) - S_5(x)$, $S_{10}(x)$, $S_{25}(x)$, $S_{50}(x)$ ряду Фур'є функції

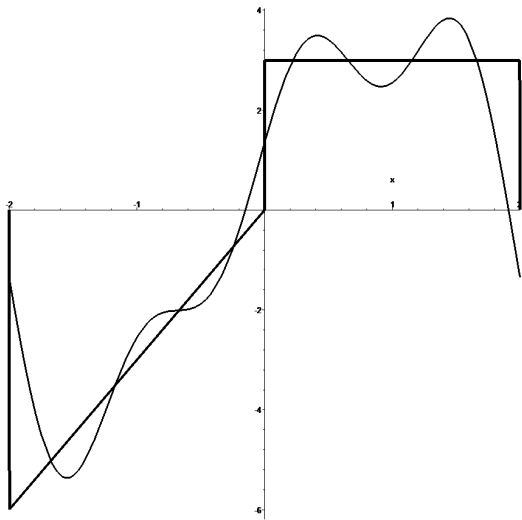
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & -2 \leq x \leq 0, \\ 3, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$



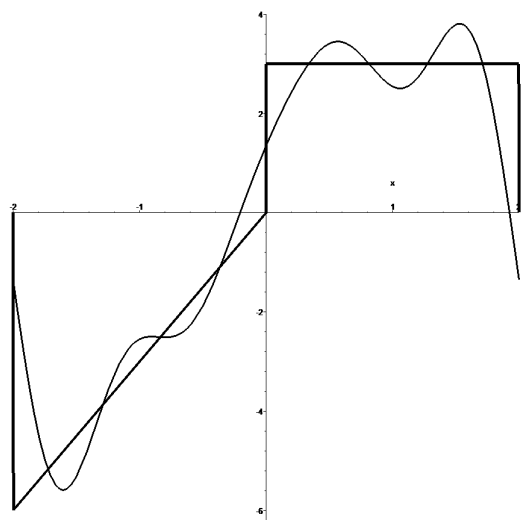
$S_1(x)$



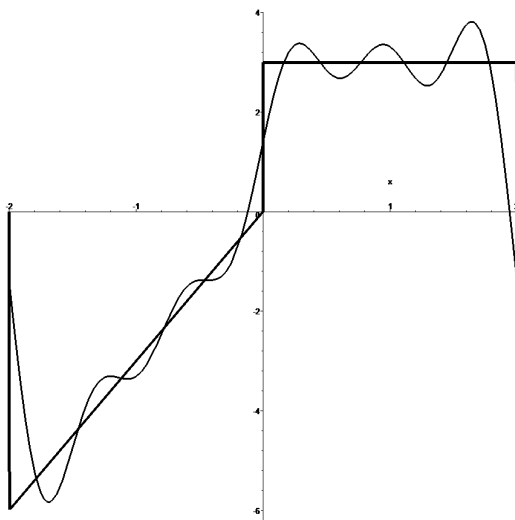
$S_2(x)$



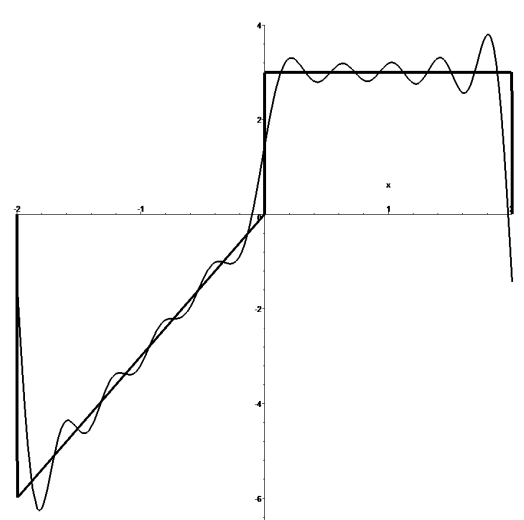
$S_3(x)$



$S_4(x)$



$S_5(x)$



$S_{10}(x)$

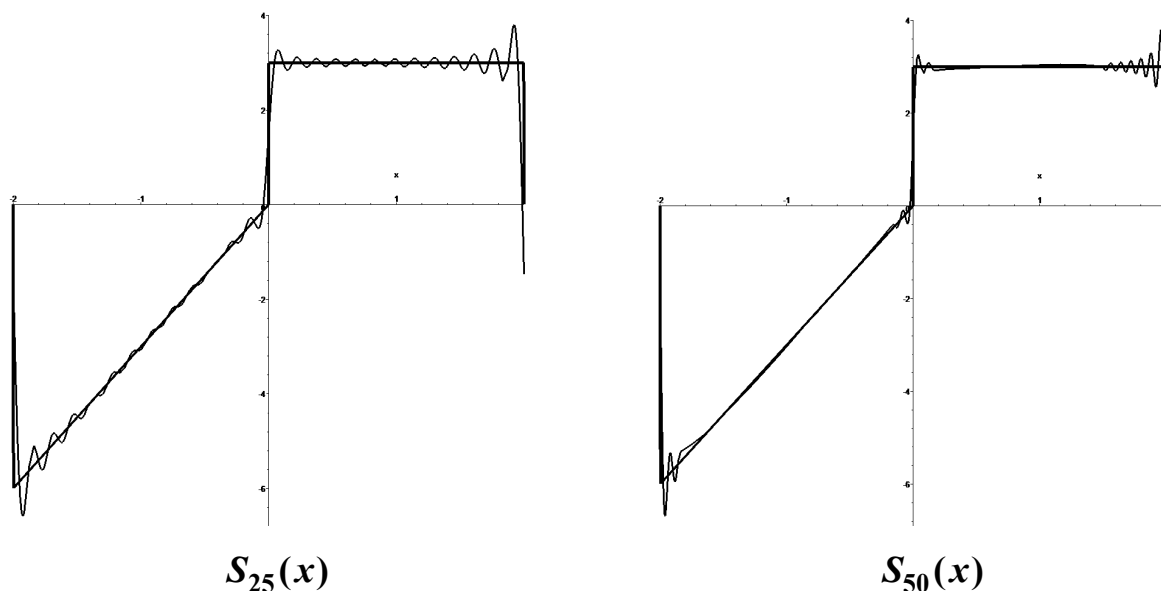


Рис. 1.19

Як бачимо, зі збільшенням числа гармонік графіки частинних сум неухильно наближаються до графіка заданої функції, але в околах точок розриву (це внутрішня точка $x = 0$ і межові точки $x = \pm 2$) спостерігається осциляція значень частинних сум, амплітуда якої зростає при наближенні до точки розриву. Дослідження показали, що граничне значення відхилення сум $S_n(x)$ в околі такої точки x_0 становить $0,09 \cdot |f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$ в кожен бік, тобто подвійна амплітуда пульсацій синтезованих функцій $S_n(x)$ досягає 18% від величини стрибка $\Delta = |f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$ функції $f(x)$ і практично не змінюється зі збільшенням числа гармонік (рис. 1.20). Це явище, яке має місце для будь-якої кусково-гладкої функції і обумовлене “дефектом” збіжності її ряду Фур’є, і є ефектом Гіббса.

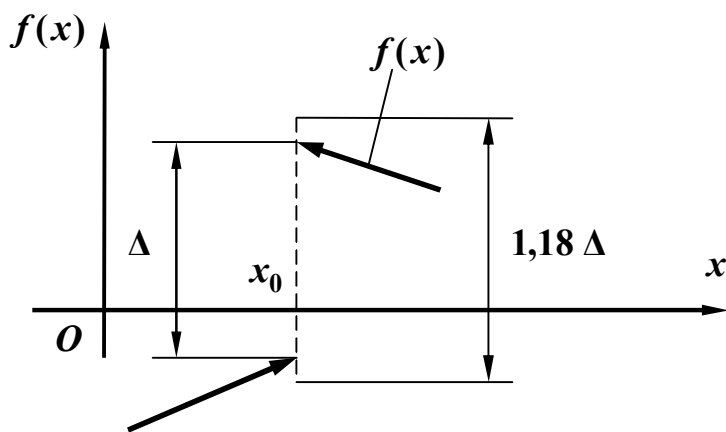


Рис. 1.20

Ефект Гіббса є дуже небажаним у практичних задачах, зокрема, пов'язаних з точним наближенням формованого сигналу (наприклад, у комп'ютерній томографії). Наразі розроблені методи придушення цього ефекту, що дозволяють значно послабити або навіть зовсім позбавитись від нього (наприклад, метод сигма-множників).

1.10. Комплексна форма ряду Фур'є

Якщо застосувати відомі *формули Ейлера*

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

справедливі для всіх дійсних чисел φ , до ряду Фур'є (1.10) функції $f(x)$ на відрізьку $[-\pi, \pi]$, то отримаємо при $\varphi = nx$

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

$$\text{де } c_n = \begin{cases} (a_n - ib_n)/2, & n > 0, \\ a_0/2, & n = 0, \\ (a_{-n} + ib_{-n})/2, & n < 0. \end{cases}$$

Знову застосувавши формули Ейлера, перетворимо вирази коефіцієнтів c_n :

$$(a_n - ib_n)/2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n > 0,$$

$$a_0/2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i0x} dx, \quad n = 0,$$

$$(a_{-n} + ib_{-n})/2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n < 0.$$

Отже, ми бачимо, що для всіх значень n коефіцієнти c_n визначаються однією формулою

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.41)$$

Таким чином, *комплексна форма* ряду $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ має вигляд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (1.42)$$

де коефіцієнти c_n обчислюються за формулою (1.41).

Застосувавши формули Ейлера до більш загального ряду (1.26) $2l$ -періодичної функції, заданої на відрізку $[-l, l]$, аналогічно отримаємо комплексну форму цього ряду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{l} x}, \quad (1.43)$$

де коефіцієнти обчислюються за формулою

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.44)$$

Така форма часто застосовується у фізиці, електротехніці і радіотехніці. При цьому функції e^{inx} називають *гармоніками*, частоти гармонік $\frac{n\pi}{l} = \alpha_n$ – *хвильовими числами*, сукупність яких утворює *спектр*, що має *дискретний характер*, а самі коефіцієнти c_n отримали назву *комплексних амплітуд*. Слід зауважити, що в електротехніці сукупність величин $|c_n|$ називають *спектром функції $f(x)$* .

Приклад 1.7. Розвинути в комплексний ряд Фур'є на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцію $f(x) = e^x$.

Розв'язання. Задана функція на відрізку $[-\pi, \pi]$ неперервна. Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-in)} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{x(1-in)}}{1-in} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-in)} (e^\pi e^{-in\pi} - e^{-\pi} e^{in\pi}) = \left\{ e^{in\pi} = e^{-in\pi} = \cos n\pi = (-1)^n \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)} (e^\pi - e^{-\pi}).$$

Отже, шуканий ряд Фур'є має вигляд

$$S(x) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{inx}}{1-in}.$$

В точках $x \in (-\pi, \pi)$ неперервності функції ряд збігається до відповідного значення $f(x)$, тобто справедливе розвинення

$$e^x = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{inx}}{1-in}.$$

В межових точках $x = \pm \pi$ ряд збігається до значення $S(\pm \pi) = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2}$.

1.11. Практичний гармонічний аналіз

В багатьох випадках точне визначення коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$ стає неможливим. Це відбувається тоді, коли складний аналітичний вираз функції приводить до інтегралів, що “не беруться”, а також коли функція задана за допомогою таблиці або графічно. У цих випадках значення коефіцієнтів Фур'є можуть бути знайдені лише наближено. Отже, зміст *практичного гармонічного аналізу* полягає в наближеному розвиненні функцій в ряди Фур'є.

Треба зауважити, що усі сучасні системи комп'ютерної математики, зокрема, такі, як Mathcad, Maple, Mathematica, мають стандартні процедури наближеного обчислення інтегралів, однак при їх застосуванні треба інтерполювати задану функцію на відрізьку інтегрування. В даний час існує багато методів інтерполяції: лінійна, параболічна, поліноміальна, сплайнова та ін. Серед них найбільш прийнятною вважається *сплайнова* інтерполяція (від англ. *spline* – “гнучка металева лінійка”), при якій апроксимуюча сплайн-функція на заданих інтервалах подається многочленами невисокого степеня. При цьому у вузлових точках зберігається неперервність не тільки самої функції, але й її першої і навіть другої похідної. Графік такої сплайн-функції можна уявити у вигляді гнучкої сталеві лінійки, закріпленої у вузлових точках. При цьому лінійка

вигинається “найкращим” чином, тобто так, що її форма відповідає мінімуму потенційної енергії вигину. До недоліків сплайнової апроксимації слід віднести відсутність єдиного виразу сплайн-функції на усьому відрізку інтегрування.

Приклад 1.8. Розвинути в ряд Фур’є періодичну з періодом $T = 6$ функцію $f(x)$, задану наступною таблицею

x	0.0	0.5	1.2	1.7	2.2	2.7	4.0	4.9	6.0
$f(x)$	0.0	2.5	4.3	2.6	1.5	4.0	8.0	9.5	5.0

Розв’язання. Згідно з умовою функція задана на зміщеному відрізку довжиною в період, причому $a = 0$, $l = 3$. На рис. 1.21 задані вузлові точки функції $f(x)$ позначені квадратиками, а неперервна лінія є графіком апроксимуючої сплайн-функції $f_s(x)$.

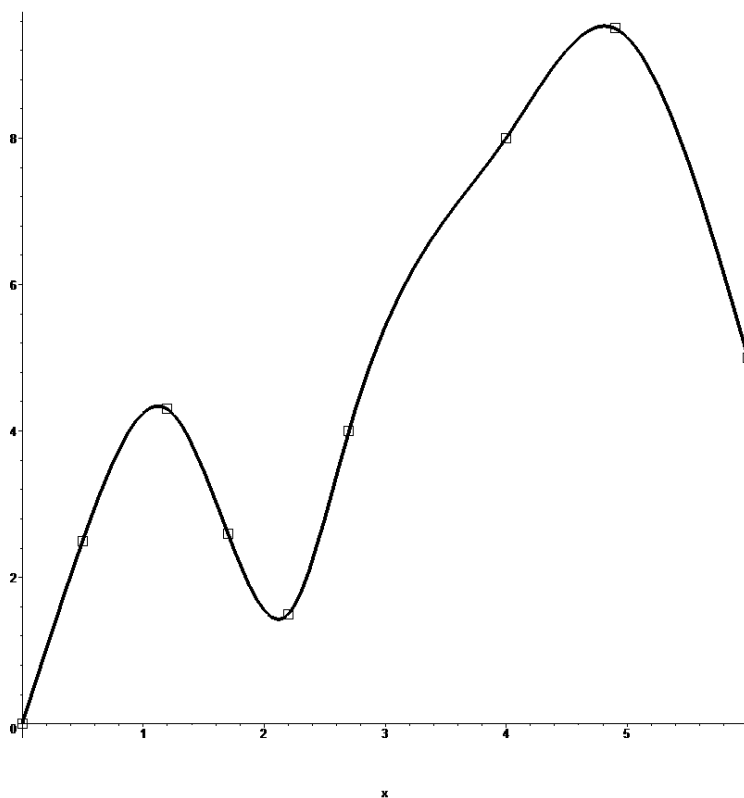


Рис. 1.21

У розрахунку інтерполяція здійснювалася за допомогою кубічних сплайнів, тобто в заданих інтервалах функція $f(x)$ наближалася кубічними поліномами, отже, $f_s(x)$ мала вигляд

$$f_s(x) = \begin{cases} 5.15x - 0.59x^3, & 0 \leq x < 0.5, \\ 0.15 + 4.7x - 0.89(x - 0.5)^2 - 3.08(x - 0.5)^3, & 0.5 \leq x < 1.2, \\ 5.59 - 1.07x - 7.36(x - 1.2)^2 + 5.42(x - 1.2)^3, & 1.2 \leq x < 1.7, \\ 10.03 - 4.37x + 0.77(x - 1.7)^2 + 7.16(x - 1.7)^3, & 1.7 \leq x < 2.2, \\ -2.37 + 1.76x + 11.5(x - 2.2)^2 - 10.04(x - 2.2)^3, & 2.2 \leq x < 2.7, \\ -11.46 + 5.73x - 3.57(x - 2.7)^2 + 1.18(x - 2.7)^3, & 2.7 \leq x < 4, \\ -1.66 + 2.42x + 1.02(x - 4)^2 - 2.06(x - 4)^3, & 4 \leq x < 4.9, \\ 13.2 - 0.76x - 4.55(x - 4.9)^2 + 1.38(x - 4.9)^3, & 4.9 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Результати розвинення $f(x)$ в ряд Фур'є (1.26) – (1.28) показані на рис. 1.22 – 1.24. Пунктирними лініями додатково показані графіки частинних сум $S_n(x)$ ряду при $n = 5$ (рис. 1.22), $n = 20$ (рис. 1.23), $n = 50$ (рис. 1.24).

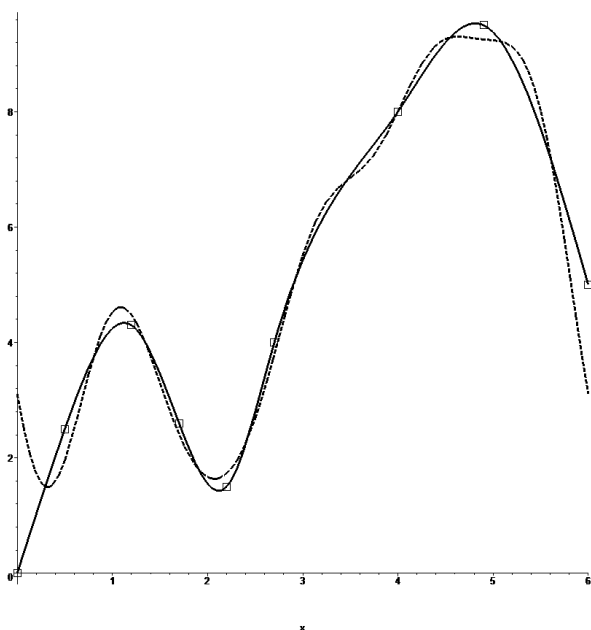


Рис. 1.22

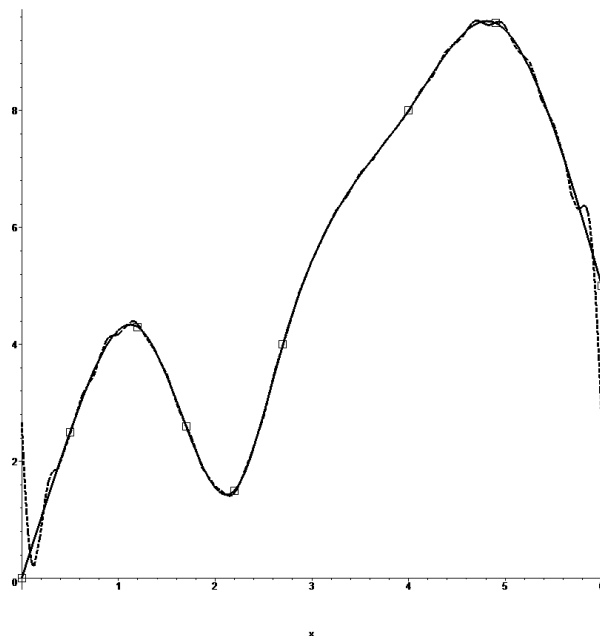
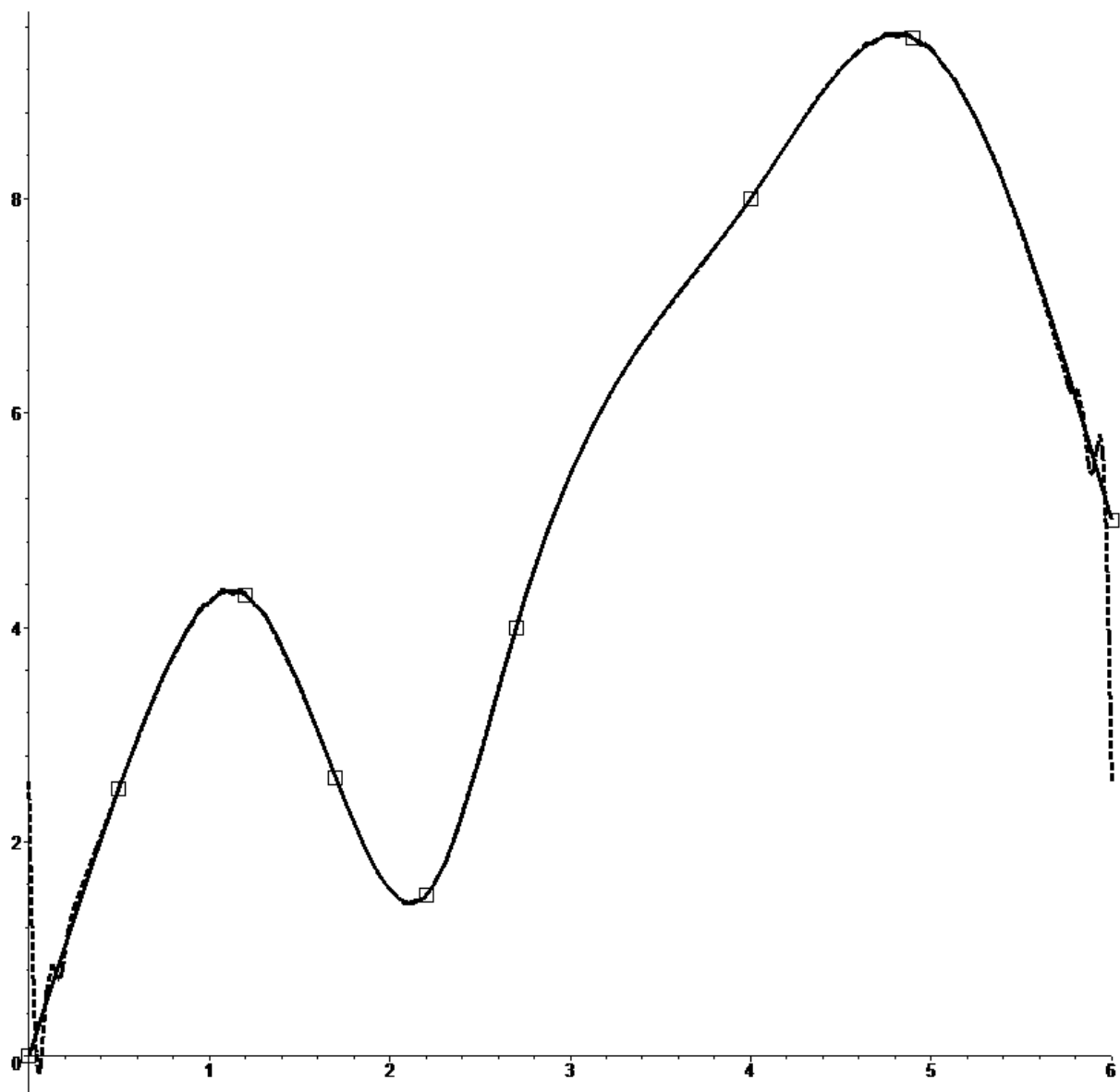


Рис. 1.23



^x
Рис. 1.24

Як бачимо, в точках неперервності ряд Фур'є цілком задовільно апроксимує задану функцію, а в точці розриву спостерігається чітко виражений ефект Гіббса.

2. ІНТЕГРАЛ ФУР'Є

Досі йшлося про подання рядом Фур'є кусково-гладких функцій – або періодичних, заданих на усій числовій осі, або заданих лише на деякому відрізку і продовжених періодично на усю вісь. Зокрема, функція $f(x)$, задана на відрізку $[-l, l]$, подається рядом Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (1.26)$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.29)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.30)$$

Частоти гармонік ряду (1.26) утворюють послідовність $\left\{ \frac{n\pi}{l} \right\} (n = 0, 1, 2, \dots)$,

яка є арифметичною прогресією з різницею π/l . Сукупність усіх частот називається *спектром*. Він має дискретний характер, причому зі збільшенням довжини відрізка (тобто зі збільшенням l) різниці між частотами сусідніх гармонік зменшуються, отже, спектр густішає. Якщо відрізок розвинення функції необмежено розширюється в обидва боки, охоплюючи усю числову вісь $(-\infty, +\infty)$, тобто при $l \rightarrow +\infty$, то різниця між частотами суміжних гармонік буде спадати до нуля, а їх спектр з дискретного перетвориться на неперервний. Внаслідок цього замість ряду доводиться розглядати його узагальнення у вигляді деякого інтеграла, який називається *інтегралом Фур'є*. Він був введений в науковий обіг Ж.Б. Фур'є у його книзі “Аналітична теорія тепла” (1822 р.) і застосовувався для розв'язання задач теплопровідності. Нині інтеграл Фур'є та пов'язане з ним однойменне інтегральне перетворення є надзвичайно потужним інструментом математичного дослідження дуже широкого круга задач з різних галузей науки і техніки.

2.1. Інтеграл Фур'є

При $l \rightarrow +\infty$ усі інтеграли (1.29) – (1.30) стають невласними, і для їх збіжності на функцію $f(x)$ треба накласти деякі додаткові умови.

Функція $f(x)$ називається **абсолютно інтегрованою** на усій числовій прямій, якщо вона інтегровна на будь-якому скінченному відрізку

$[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ і невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ збігається.

Зауваження. Абсолютно інтегровні на усій числовій прямій функції є *неперіодичними*.

Припустимо, що $f(x)$ обмежена, абсолютно інтегровна на $(-\infty, +\infty)$ і на будь-якому скінченному відрізку $[-l, l]$ розвивається в ряд Фур'є (1.26), (1.29), (1.30).

Підставимо в ряд (1.26) вирази його коефіцієнтів (1.29) і (1.30):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \right) \cos \frac{n\pi x}{l} + \left(\int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right) \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \left(\cos \frac{n\pi t}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} + \sin \frac{n\pi t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} (x-t) dt. \end{aligned}$$

Позначимо $\frac{n\pi}{l} = \alpha_n = \alpha$ і $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{(n+1)\pi}{l} - \frac{n\pi}{l} = \frac{\pi}{l} = \Delta\alpha$. Тоді

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos[\alpha(x-t)] dt \right) \Delta\alpha. \quad (2.1)$$

Оскільки невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ збігається, то $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = Q < \infty$

і тоді $\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt < \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{Q}{2l} = 0$.

Далі, $\lim_{l \rightarrow +\infty} \Delta\alpha = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{l} = 0$, тобто $\alpha \in (0, +\infty)$. Отже, сума у (2.1) є

інтегральною сумою функції $\int_{-l}^l f(t) \cos[\alpha(x-t)] dt$. Тому при $l \rightarrow +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos[\alpha(x-t)] dt \right) \Delta\alpha \rightarrow \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\alpha(x-t)] dt \right) d\alpha.$$

Таким чином при $l \rightarrow +\infty$ остаточно маємо

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\alpha(x-t)] dt \right) d\alpha$$

або

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt. \quad (2.2)$$

Формула (2.2) називається *інтегральною формулою Фур'є*, а інтеграл

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt \quad (2.3)$$

називається *інтегралом Фур'є функції $f(x)$* . Отже, інтегральна формула Фур'є є ніщо інше, як подання функції $f(x)$ у вигляді інтеграла Фур'є в точках її неперервності.

Перепишемо інтеграл Фур'є в іншому вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos \alpha x \cos \alpha t + \sin \alpha x \sin \alpha t) dt \right] d\alpha = \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right) \sin \alpha x \right] d\alpha. \end{aligned}$$

Позначимо

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt, \quad (2.4)$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt. \quad (2.5)$$

Тоді інтеграл Фур'є набуде вигляду

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] \, d\alpha \quad (2.6)$$

і, як неважко бачити, стає дуже схожим на відповідний ряд Фур'є, де підсумовування замінено інтегруванням від 0 до $+\infty$, а коефіцієнти обчислюються за формулами (2.4) і (2.5). Однак, на відміну від ряду Фур'є, який є розвиненням функції в суму гармонічних коливань з частотою $\frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, \dots$), що змінюється *дискретно*, інтеграл Фур'є є розвиненням функції в суму гармонічних коливань з частотою α , що змінюється *неперервно* від 0 до $+\infty$.

2.2. Достатні умови подання функції інтегралом Фур'є

Мають місце теореми, аналогічні теремам 1.1 і 1.2.

Теорема 2.1. Нехай функція $f(x)$ кусково-гладка в кожному скінченному проміжку числової прямої і абсолютно інтегровна на $(-\infty, +\infty)$. Тоді $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ інтеграл Фур'є функції $f(x)$ (2.3) збігається і має місце рівність

$$\Phi(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, \quad (2.7)$$

де $f(x \pm 0) = \lim_{t \rightarrow x \pm 0} f(t)$.

Зауваження. В точках неперервності $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$, отже, $\Phi(x) = f(x)$.

Теорема 2.2. Нехай функція $f(x)$ кусково-монотонна в кожному скінченному проміжку числової прямої (тобто задовольняє умови Діріхле на усій числовій прямій) і абсолютно інтегровна на $(-\infty, +\infty)$. Тоді

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$ інтеграл Фур'є функції $f(x)$ (2.3) збігається і має місце рівність (2.7).

Приклад 2.1. Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Ескіз графіка заданої функції наведений на рис. 2.1. Функція ані парна, ані непарна (загального типу).

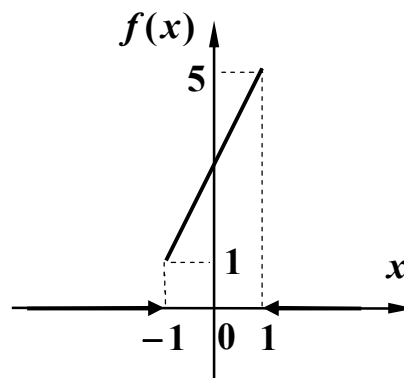


Рис. 2.1

Переконаємось, що $f(x)$ абсолютно інтегровна на $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int_{-1}^{1} (2x + 3) dx + \int_{1}^{+\infty} 0 \cdot dx = 0 + (x^2 + 3x) \Big|_{-1}^{1} + 0 = 6 < \infty.$$

Задана функція кусково-гладка на $(-\infty, +\infty)$. Це впливає з того, що

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \text{ скінченна на кожному з проміжків. Отже, задану функцію}$$

справді можна зобразити інтегралом Фур'є. Знайдемо $A(\alpha)$ та $B(\alpha)$.

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} (2t + 3) \cos \alpha t dt = \left| \begin{array}{l} u = 2t + 3, \quad dv = \cos \alpha t dt, \\ du = 2dt, \quad v = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2t + 3}{\alpha} \sin \alpha t \Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{\alpha} \int_{-1}^{1} \sin \alpha t dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(6 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} \cos \alpha t \Big|_{-1}^{1} \right) = 6 \frac{\sin \alpha}{\pi \alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (2t+3) \sin \alpha t \, dt = \left| \begin{array}{l} u = 2t+3, \quad dv = \sin \alpha t \, dt, \\ du = 2 \, dt, \quad v = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha t \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2t+3}{\alpha} \cos \alpha t \Big|_{-1}^1 + \frac{2}{\alpha} \int_{-1}^1 \cos \alpha t \, dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{4}{\alpha} \cos \alpha + \frac{2}{\alpha^2} \sin \alpha t \Big|_{-1}^1 \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{\alpha^2} \sin \alpha - \frac{4}{\alpha} \cos \alpha \right) = \frac{4}{\pi \alpha} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right).
\end{aligned}$$

Отже, інтеграл Фур'є заданої функції має вигляд

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[6 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \alpha x + \frac{4}{\alpha} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right) \sin \alpha x \right] d\alpha.$$

В точках неперервності він збігається до відповідного значення функції, тобто виконується $\Phi(x) = f(x)$, а в точках розриву $x = \pm 1$ він збігається до значень

$$\Phi(-1) = \frac{1}{2} [f(-1-0) + f(-1+0)] = \frac{1}{2} (0+1) = \frac{1}{2},$$

$$\Phi(1) = \frac{1}{2} [f(1-0) + f(1+0)] = \frac{1}{2} (5+0) = \frac{5}{2}.$$

2.3. Подання інтегралом Фур'є парних і непарних функцій

1. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 2.1 або 2.2. Якщо $f(x)$ парна, тобто $f(x) = f(-x)$, то усі функції вигляду $f(x) \cos \alpha x$ будуть парними, а функції вигляду $f(x) \sin \alpha x$ – непарними. Внаслідок цього усі невласні

інтеграли $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt$ дорівнюють нулю, а для кожного з інтегралів

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt \text{ справедлива рівність } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt. \text{ Отже, у}$$

випадку парної функції $f(x)$ у формулі (2.6) $B(\alpha) = 0$ і виконується рівність

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \int_0^{+\infty} A(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha, \tag{2.8}$$

де

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt. \quad (2.9)$$

Приклад 2.2. Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & -2 \leq x < 0, \\ e^{-x}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Ескіз графіка заданої функції наведений на рис. 2.2.

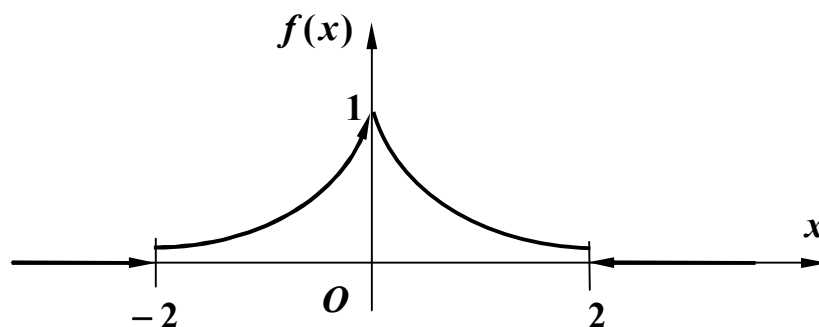


Рис. 2.2

Задана функція кусково-гладка і абсолютно інтегровна на $(-\infty, +\infty)$, оскільки

$$\text{похідна } f'(x) = \begin{cases} e^x, & -2 \leq x < 0, \\ -e^{-x}, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & |x| > 2 \end{cases} \text{ скінченна на кожному з проміжків і}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{-2} 0 \cdot dx + \int_{-2}^0 e^x dx + \int_0^2 e^{-x} dx + \int_2^{+\infty} 0 \cdot dx = 0 + e^x \Big|_{-2}^0 - e^{-x} \Big|_0^2 + 0 = \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Задана функція *парна*, отже, її можна подати інтегралом Фур'є у вигляді (2.8), де

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^2 e^{-t} \cos \alpha t dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{-t}}{1 + \alpha^2} (-\cos \alpha t + \alpha \sin \alpha t) \right] \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+a^2} \left(\frac{-\cos 2\alpha + a \sin 2\alpha}{e^2} + 1 \right).$$

Зауваження. Інтеграл $\int e^{-t} \cos at \, dt$ відноситься до так званих “циклічних” інтегралів, що беруться по частинах. Тут ми використали формулу первісної

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx).$$

Таким чином, інтеграл Фур'є заданої функції має вигляд

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi e^2} \int_0^{+\infty} \frac{a \sin 2\alpha - \cos 2\alpha + e^2}{1 + a^2} \cos ax \, da.$$

В точках неперервності він збігається до відповідного значення функції, тобто виконується $\Phi(x) = f(x)$, а в точках розриву $x = \pm 2$ він збігається до

$$\text{значення } \Phi(\pm 2) = \frac{f(-2-0) + f(-2+0)}{2} = \frac{f(2-0) + f(2+0)}{2} = \frac{1}{2e^2}.$$

2. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 2.1 або 2.2. Якщо $f(x)$ непарна, тобто $f(-x) = -f(x)$, то усі функції вигляду $f(x) \sin ax$ будуть парними, а функції вигляду $f(x) \cos ax$ – непарними. Внаслідок цього усі

невласні інтеграли $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos at \, dt$ дорівнюють нулю, а для кожного з інтегралів

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin at \, dt \text{ справедлива рівність } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin at \, dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \sin at \, dt.$$

Отже, у випадку непарної функції $f(x)$ у формулі (2.6) $A(\alpha) = 0$ і виконується рівність

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \int_0^{+\infty} B(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha, \quad (2.10)$$

де

$$B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin at \, dt. \quad (2.11)$$

Як бачимо, в обох випадках зовнішня аналогія з відповідними рядами Фур'є зберігається.

Приклад 2.3. Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & -2 \leq x < 0, \\ -e^{-x}, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Ескіз графіка заданої функції наведений на рис. 2.3.

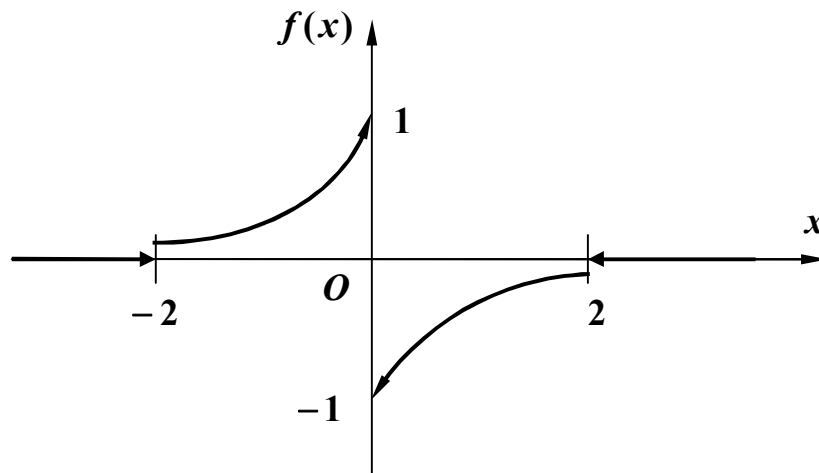


Рис. 2.3

Задана функція кусково-гладка і абсолютно інтегровна на $(-\infty, +\infty)$,

оскільки похідна $f'(x) = \begin{cases} e^x, & -2 \leq x < 0, \\ e^{-x}, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$ скінченна на кожному з проміжків і

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{-2} 0 \cdot dx + \int_{-2}^0 e^x dx + \int_0^2 e^{-x} dx + \int_2^{+\infty} 0 \cdot dx = 0 + e^x \Big|_{-2}^0 - e^{-x} \Big|_0^2 + 0 = \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Задана функція *непарна*, отже, її можна подати інтегралом Фур'є у вигляді (2.10), де

$$B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^2 e^{-t} \sin \alpha t dt = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{-t}}{1+\alpha^2} (-\sin \alpha t - \alpha \cos \alpha t) \right] \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+a^2} \left(\frac{\sin 2\alpha + a \cos 2\alpha}{e^2} - a \right).$$

Зауваження. Використана формула первісної “циклічного” інтеграла

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx).$$

Таким чином, інтеграл Фур'є заданої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi e^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\alpha + a \cos 2\alpha - a e^2}{1 + a^2} \sin \alpha x \, d\alpha.$$

В точках неперервності він збігається до відповідного значення функції, тобто виконується $\Phi(x) = f(x)$, а в точках розриву $x = 0$, $x = \pm 2$ він збігається відповідно до значень

$$\Phi(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0,$$

$$\Phi(-2) = \frac{f(-2-0) + f(-2+0)}{2} = \frac{1}{2e^2}, \quad \Phi(2) = \frac{f(2-0) + f(2+0)}{2} = -\frac{1}{2e^2}.$$

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ задана лише на додатній півосі $[0, +\infty)$, то її можна продовжити на від'ємну піввісь $(-\infty, 0)$ довільним способом, зокрема, парним або непарним або покласти $f(x) = 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0)$. Тоді функція буде подаватись різними інтегралами Фур'є, зокрема, при парному або непарному продовженні – відповідно інтегралами (2.8) і (2.10). У випадку, коли функція задана на від'ємній півосі $(-\infty, 0]$, її також можна продовжити на додатну піввісь аналогічними способами.

2.4. Комплексна форма інтеграла Фур'є

Нехай функція $f(x)$ абсолютно інтегровна на усій числовій прямій і задовольняє інші умови теореми 2.1 або теореми 2.2. Тоді справедлива інтегральна формула Фур'є

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) \, dt. \quad (2.2)$$

Оскільки внутрішній інтеграл є *парною* функцією від змінної α , то інтеграл Фур'є можна переписати у вигляді

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt. \quad (2.12)$$

Застосуємо формулу Ейлера $\cos \alpha(x-t) = \frac{1}{2} [e^{i\alpha(x-t)} + e^{-i\alpha(x-t)}]$ і отримаємо

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [e^{i\alpha(x-t)} + e^{-i\alpha(x-t)}] dt$$

або

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha(x-t)} dt.$$

Інтеграли справа дорівнюють один одному (в цьому неважко переконатися, зробивши заміну $z = -\alpha$), отже,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt. \quad (2.13)$$

Ми отримали *комплексну форму* інтеграла Фур'є.

Зауваження.

1. Формула (2.3) визначає не якийсь новий інтеграл Фур'є, а лише іншу, комплексну, форму його запису.

2. Нагадаємо, що *головним значенням* (від фр. “Valeur principale” – “головне значення”) невласного інтеграла називається границя

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

Якщо ця границя скінченна, то говорять, що невласний інтеграл *збігається у змісті головного значення*. Інтеграл Фур'є може розбігатися у звичайному змісті, а збігатися лише у змісті головного значення. Якщо ж він збігається, то він збігається й у змісті головного значення. Тому, взагалі кажучи, інтеграл Фур'є треба записувати у вигляді

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt$$

і необґрунтована заміна його головного значення звичайним може приводити до помилок.

3. Інтеграл Фур'є також часто застосовується у формі

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt$$

або, за аналогією з відповідним рядом Фур'є (1.42), у формі

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha, \quad (2.14)$$

де $C(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt.$

Приклад 2.4. Подати інтегралом Фур'є у комплексній формі функцію

$$f(x) = \begin{cases} e^{-3x}, & x \geq 0, \\ 2e^{4x}, & x < 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Задана функція абсолютно інтегровна на усій числовій осі і має єдину точку розриву першого роду $x = 0$ (рис. 2.4).

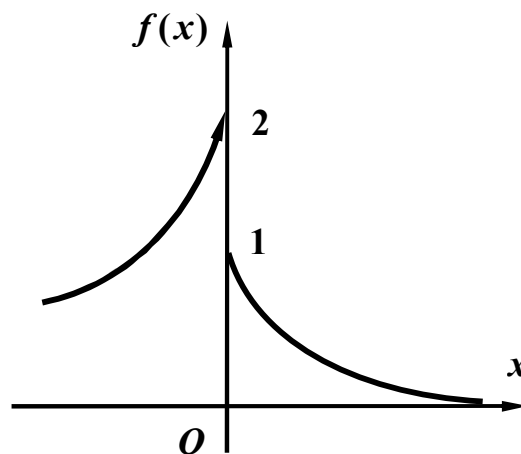


Рис. 2.4

Знайдемо коефіцієнти інтеграла Фур'є у комплексній формі (2.14)

$$\begin{aligned}
C(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iat} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 2e^{4t} e^{-iat} dt + \int_0^{+\infty} e^{-3t} e^{-iat} dt \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(2 \int_{-\infty}^0 e^{t(4-ia)} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t(3+ia)} dt \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{4-ia} e^{t(4-ia)} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-(3+ia)} e^{-t(3+ia)} \Big|_0^{+\infty} \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{4-ia} - 0 + 0 - \frac{1}{-(3+ia)} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{4-ia} + \frac{1}{3+ia} \right).
\end{aligned}$$

Таким чином, інтеграл Фур'є заданої функції має вигляд

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{4-ia} + \frac{1}{3+ia} \right) e^{iax} da.$$

В точках неперервності функції $f(x)$ він збігається до відповідного значення функції, тобто виконується $\Phi(x) = f(x)$, а в точці розриву $x = 0$ він збігається

до значення
$$\Phi(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{2e^0 + e^0}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}.$$

2.5. Перетворення Фур'є

Перепишемо інтегральну формулу Фур'є у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iat} dt \right) e^{iax} da.$$

Оскільки функція $f(x)$ абсолютно інтегровна на усій числовій осі, то невластний інтеграл

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iax} dx \tag{2.15}$$

збігається. Функція $F(\alpha)$, яка визначається цим інтегралом, називається *прямим перетворенням Фур'є функції $f(x)$* .

Теорема 2.3. (теорема обернення перетворення Фур'є). Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 2.1 або 2.2 і в усіх своїх точках розриву задовольняє умову

$$f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}. \quad (2.16)$$

Тоді справедлива **формула обернення прямого перетворення Фур'є**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} dx, \quad (2.17)$$

а функція $f(x)$ називається **оберненим перетворенням Фур'є функції $F(\alpha)$** .

Зауваження. Перетворення Фур'є належить до так званих *інтегральних перетворень*

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x) K(x, \alpha) dx,$$

за допомогою яких здійснюється перехід від функції $f(x)$, заданої на деякому відрізку $[a, b]$, до функції $F(\alpha)$. Існування і вигляд $F(\alpha)$ визначаються функцією $K(x, \alpha)$ (ядро перетворення) і проміжком інтегрування. Отже, перетворення Фур'є визначається ядром $K(x, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\alpha x}$ і проміжком $(-\infty, +\infty)$.

Функція $F(\alpha)$ називається **спектральною функцією** або **спектральною характеристикою** вихідної функції $f(x)$. Оскільки функції $e^{i\alpha x}$ описують гармоніки, то з точки зору механіки спектральну функцію можна розуміти як міру інтенсивності окремих коливань, що відповідають різним значенням частот α – тому її модуль $|F(\alpha)|$ називають **амплітудним спектром** функції $f(x)$, а аргумент $\arg F(\alpha)$ – **фазовим спектром** функції $f(x)$.

Зауваження. Вибір знаків “–” та “+” відповідно у показниках експонент прямого та оберненого перетворень умовний і зроблений лише за традицією.

Приклад 2.5. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$.

Розв'язання. Задана функція кусково-гладка на $(-\infty, +\infty)$, оскільки

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \text{ скінченна на кожному скінченному відрізку } [-l, l]$$

числової осі. Переконаємось далі, що $f(x)$ абсолютно інтегровна на $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^1 x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1 < \infty.$$

Отже, перетворення Фур'є існує і за наведеною формулою

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\int_{-1}^0 x e^{-i\alpha x} dx + \int_0^1 x e^{-i\alpha x} dx \right).$$

Інтегруючи частинами, одержимо

$$-\int_{-1}^0 x e^{-i\alpha x} dx = e^{-i\alpha x} \left(\frac{x}{i\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{\alpha^2} + e^{-i\alpha} \left(\frac{1}{i\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right),$$

$$\int_0^1 x e^{-i\alpha x} dx = -e^{-i\alpha x} \left(\frac{x}{i\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \Big|_0^1 = -e^{-i\alpha} \left(\frac{1}{i\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Підсумовуючи значення обох інтегралів, отримуємо $F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-i\alpha} - 1}{\alpha^2}.$

2.6. Косинус- і синус-перетворення Фур'є

1. Нехай функція $f(x)$ визначена у проміжку $[0, +\infty)$. Її можна продовжити на всю числову вісь до *парної*, поклавши $f(-x) = f(x) \forall x \in (-\infty, 0)$. Якщо $f(x)$ у проміжку $[0, +\infty)$ задовольняє умови теореми 2.1 або 2.2, то за допомогою такого продовження і формул (2.8) і (2.9), після підстановки (2.9) у (2.8) можемо отримати

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(t) \cos at dt \right) \cos ax da$$

або
$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos at dt \right) \cos ax da.$$

В силу абсолютної інтегровності функції $f(x)$ невласний інтеграл

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos at \, dt \quad (2.18)$$

збігається. Функція $F_c(\alpha)$, яка визначається цим інтегралом, називається **косинус-перетворенням Фур'є функції $f(x)$** . Отже, справедливе подання функції $f(x)$ інтегралом Фур'є за косинусами

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = F_c(\alpha), \quad x \in (0, +\infty). \quad (2.19)$$

Якщо ж функція $f(x)$, окрім умов теореми 2.1 або 2.2, в усіх своїх точках розриву задовольняє умову (2.16), то для неї справедлива **формула обернення косинус-перетворення Фур'є**

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\alpha) \cos at \, dt, \quad x \in (0, +\infty). \quad (2.20)$$

Зауваження. В точці $x = 0$ формула вірна, якщо $f(0) = f(+0)$.

2. Нехай функція $f(x)$ визначена у проміжку $[0, +\infty)$. Її можна продовжити на всю числову вісь до *непарної*, поклавши $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in (-\infty, 0)$. Якщо $f(x)$ у проміжку $[0, +\infty)$ задовольняє умови теореми 2.1 або 2.2, то за допомогою такого продовження і формул (2.10) і (2.11), після підстановки (2.11) у (2.10), можемо отримати

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(t) \sin at \, dt \right) \sin ax \, da$$

або

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin at \, dt \right) \sin ax \, da.$$

В силу абсолютної інтегровності функції $f(x)$ невласний інтеграл

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin at \, dt \quad (2.21)$$

збігається. Функція $F_s(\alpha)$, яка визначається цим інтегралом, називається **синус-перетворенням Фур'є функції $f(x)$** . Отже, справедливе подання функції $f(x)$ інтегралом Фур'є за синусами

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = F_s(\alpha), \quad x \in (0, +\infty). \quad (2.22)$$

Якщо ж функція $f(x)$, окрім умов теореми 2.1 або 2.2, в усіх своїх точках розриву задовольняє умову (2.16), то для неї справедлива **формула обернення синус-перетворення Фур'є**

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha, \quad x \in (0, +\infty). \quad (2.23)$$

Зауваження. В точці $x = 0$ формула вірна, якщо $f(0) = 0$.

Приклад 2.6. Знайти косинус- та синус-перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi \end{cases}.$$

Розв'язання. Задана функція абсолютно інтегровна в проміжку $[0, +\infty)$.

Отже, за визначенням

$$\begin{aligned} F_c(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin x \cos \alpha x \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} [\sin(1-\alpha)x + \sin(1+\alpha)x] \, dx = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\cos(1-\alpha)x}{1-\alpha} + \frac{\cos(1+\alpha)x}{1+\alpha} \right] \Big|_0^{\pi} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\cos(1-\alpha)\pi}{1-\alpha} + \frac{\cos(1+\alpha)\pi}{1+\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1+\alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\cos \pi \alpha}{1-\alpha} + \frac{\cos \pi \alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1+\alpha} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos \pi \alpha + 1}{1-\alpha^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_s(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin x \sin \alpha x \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} [\cos(1-\alpha)x - \cos(1+\alpha)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(1-\alpha)x}{1-\alpha} - \frac{\sin(1+\alpha)x}{1+\alpha} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(1-\alpha)\pi}{1-\alpha} - \frac{\sin(1+\alpha)\pi}{1+\alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin \pi \alpha \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1+\alpha} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \pi \alpha}{1-\alpha^2}. \end{aligned}$$

Оскільки $f(x)$ неперервна всюди на $[0, +\infty)$, то вона задовольняє умови теореми 2.1 і, окрім того, умова (2.16) виконується. Тому для неї справедливі формули обернення (2.20) і (2.23), а саме

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos \pi \alpha + 1}{1 - \alpha^2} \cos \alpha t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \pi \alpha + 1}{1 - \alpha^2} \cos \alpha t \, dt, \quad x \in [0, +\infty),$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \pi \alpha}{1 - \alpha^2} \sin \alpha t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi \alpha}{1 - \alpha^2} \sin \alpha t \, dt, \quad x \in [0, +\infty).$$

3. ПОШИРЕННЯ ТЕПЛА В СТРИЖНІ

Ряди і перетворення Фур'є широко застосовуються, зокрема, при розв'язанні крайових і початкових задач *математичної фізики*. Розглянемо їх на прикладі задачі про поширення тепла в стрижні.

3.1. Постановка задач

Розглянемо теплоізолюваний з боків *однорідний* стрижень довжиною l , настільки тонкий, щоб у будь-який момент часу температуру в усіх точках його поперечного перерізу можна було б вважати однаковою. Якщо на кінцях стрижня підтримуються сталі температури u_1 і u_2 , то вздовж стрижня усталоється лінійний розподіл температури

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x. \quad (3.1)$$

При цьому тепло буде перетікати від більш нагрітого кінця стрижня до менш нагрітого. Цей процес може бути описаний функцією $u(x, t)$, яка показує температуру у перерізі стрижня x в момент часу t . Тоді за *законом Фур'є* кількість тепла, що протікає через переріз x площею S за проміжок часу dt , дорівнює

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial x} S dt, \quad (3.2)$$

де k – коефіцієнт теплопровідності, який залежить від матеріалу стрижня.

Якщо всередині стрижня тепло не виникає і не поглинається (тобто теплові джерела відсутні), то підрахунок балансу теплоти на підставі закону збереження енергії приводить до *однорідного рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.3)$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ – коефіцієнт теплопровідності ($a = \text{const}$), c – питома теплоємність, ρ – густина матеріалу стрижня. Зауважимо, що коефіцієнти k і c можна вважати сталими лише у невеликих інтервалах змінювання температури, оскільки вони зазвичай є повільно змінними функціями від неї.

Для отримання єдиного розв'язку рівняння теплопровідності, який би відповідав конкретному процесу, до рівняння необхідно приєднати початкові і граничні умови.

Початкова умова полягає у завданні значень функції $u(x, t)$ у початковий момент часу t_0 .

Граничні умови залежать від температурного режиму на кінцях стрижня і можуть бути різними. Розглядають три *основні типи* таких умов.

1. **Граничні умови першого роду** – коли на кінці стрижня (наприклад $x = 0$) задана температура $u(0, t) = \mu(t)$, де $\mu(t)$ – функція, задана на проміжку часу $t_0 \leq t \leq T$, протягом якого вивчається даний процес.
2. **Граничні умови другого роду** – коли на кінці стрижня (наприклад $x = l$) задано значення похідної $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\frac{Q(l, t)}{k}$, де $Q(l, t)$ задана величина теплового потоку, що протікає через торцевий переріз $x = l$ стрижня.
3. **Граничні умови третього роду** відповідають теплообміну на поверхні стрижня з оточуючим середовищем, температура якого $\theta(t)$ відома. Припускається, що теплообмін відбувається за **законом Ньютона** $Q = h(u - \theta)$ (h – коефіцієнт теплообміну), отже граничні умови третього

роду мають вигляд $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\frac{h}{k}[u(l, t) - \theta(t)]$ (для кінця $x = l$) або

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{k}[u(0, t) - \theta(t)] \quad (\text{для кінця } x = 0).$$

Можливі і більш складні крайові умови. Зазначимо також, що оскільки умови на кінцях стрижня можуть бути різних типів, то число їх можливих комбінацій, кожній з яких відповідає окрема задача, доволі значне. Ми розглянемо тут найбільш відому – так звану **першу крайову** задачу для обмеженої області (у

даному випадку – для *стрижня скінченної довжини*): відшукати розв’язок рівняння теплопровідності (3.3) у області $0 < x < l$, $t_0 < t \leq T$, який задовольняє

$$\text{початкову умову } u(x, t_0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.4)$$

$$\text{граничні умови } u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (3.5)$$

де $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – задані функції, а $t_0 \leq t \leq T$ – проміжок часу, протягом якого вивчається даний процес. Якщо $\mu(t) = 0$, то відповідна гранична умова називається *однорідною*.

Окрім сформульованої задачі також часто зустрічаються її *граничні випадки*.

1. Якщо стрижень дуже довгий, то протягом невеликого проміжку часу вплив заданого на кінцях температурного режиму на режим у центральній частині стрижня впливає дуже слабо (температура на центральній ділянці визначається в основному лише початковим розподілом температури). Тому у подібних задачах зазвичай вважають, що стрижень має нескінченну довжину. Отже, маємо *задачу з початковими умовами (задачу Коші) про розподіл температури на нескінченній прямій* (у нескінченному стрижні): знайти розв’язок рівняння теплопровідності (3.3) у області $-\infty < x < +\infty$, $t > t_0$, який задовольняє початкову умову

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.6)$$

де $\varphi(x)$ – задана функція.

2. Якщо ж ділянка стрижня, температура якої нас цікавить, знаходиться поблизу одного з кінців й далеко від другого, то температура цієї ділянки практично визначається температурним режимом близького кінця й початковими умовами. В цьому випадку стрижень звичайно вважається півнескінченним і *перша крайова задача для півнескінченного стрижня* формулюється у вигляді: знайти розв’язок рівняння теплопровідності (5.13) у області $0 < x < +\infty$, $t > t_0$, який задовольняє

$$\text{початкову умову } u(x, t_0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (3.7)$$

$$\text{граничну умову } u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq t_0, \quad (3.8)$$

де $\varphi(x)$, $\mu(t)$ – задані функції.

3. Оскільки вплив початкових умов при поширенні тепла в стрижні із плином часу зменшується, то в доволі віддалений від початкового момент температура стрижня практично визначається граничними умовами. Отже у

цьому випадку маємо *крайову задачу без початкових умов*: знайти розв'язок рівняння теплопровідності (3.3) у області $0 < x < l$, $t > -\infty$, який задовольняє граничні умови

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad (3.9)$$

де $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – задані функції. Серед задач цього типу дуже важливою є задача для півнескінченного стрижня: знайти розв'язок рівняння теплопровідності (3.3) у області $0 < x < +\infty$, $t > -\infty$, який задовольняє граничну умову

$$u(0, t) = \mu(t), \quad (3.10)$$

де $\mu(t)$ – задана функція.

В залежності від характеру температурного режиму на границях можливі й інші види задач без початкових умов.

3.2. Розв'язок першої крайової задачі

Точним розв'язком першої крайової задачі називається функція $u(x, t)$ з наступними властивостями:

1) $u(x, t)$ визначена й неперервна у замкненій області

$$0 \leq x \leq l, \quad t_0 \leq t \leq T;$$

2) $u(x, t)$ задовольняє рівнянню теплопровідності у відкритій області

$$0 < x < l, \quad t_0 < t;$$

3) $u(x, t)$ задовольняє початкову і граничні умови, тобто

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

де $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – неперервні функції, що задовольняють умови спряження $\varphi(0) = \mu_1(t_0)$ і $\varphi(l) = \mu_2(t_0)$ (це необхідно для забезпечення неперервності функції $u(x, t)$ у замкненій області).

Розв'язки інших крайових задач, зокрема задач для нескінченного і півнескінченного стрижнів, а також задачі без початкових умов, визначаються аналогічно. Слід тільки додати, що в останніх випадках функція $u(x, t)$ повинна бути не тільки *неперервною*, але й *обмеженою* в усій області.

Доведено, що перша крайова задача *поставлена коректно*, тобто її розв'язок існує, єдиний і неперервно залежить від початкової і граничних умов.

3.3. Поширення тепла в стрижні скінченної довжини.

Метод поділу змінних (метод Фур'є)

Метод поділу змінних полягає у відшуванні розв'язку рівняння у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної. Цей метод, який носить ім'я Фур'є, є особливо зручним для розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними у випадку двох незалежних змінних.

Розглянемо застосування метода Фур'є при розв'язуванні поставленої у п.3.1 задачі про поширення тепла у стрижні скінченної довжини: знайти розв'язок рівняння теплопровідності (3.3) у області $0 < x < l$, $0 < t \leq T$, який задовольняє

$$\text{початкову умову } u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.11)$$

$$\text{однорідні граничні умови } u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.12)$$

Згідно з методом Фур'є припустимо, що ненульовий частинний розв'язок рівняння, такий що задовольняє умови (3.12), можливо відшукувати у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t). \quad (3.13)$$

Підставимо (3.13) у рівняння (3.3) і поділимо обидві частини рівності на a^2XT . Тоді маємо:

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad (3.14)$$

де $\lambda = \text{const}$, оскільки ліва і права частини рівності залежать від різних змінних і можуть дорівнювати одна одній тільки у тому випадку, коли вони сталі. Звідси випливають два звичайні диференціальні рівняння

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (3.15)$$

$$T' + a^2\lambda T = 0. \quad (3.16)$$

Підставимо (3.13) у граничні умови (3.12) і, з урахуванням того, що $T(t) \neq 0$, отримаємо

$$X(0) = 0, \quad (3.17)$$

$$X(l) = 0. \quad (3.18)$$

Таким чином, для визначення функції $X(x)$ ми дістали відому задачу про власні значення (так звану *задачу Штурма-Ліувілля*) (3.15), (3.17)-(3.18). Неважко показати, що нетривіальні розв'язки (власні функції) цієї задачі

існують тільки для значень параметра $\lambda > 0$ (інакше $X(x) \equiv 0$). У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (3.15) є $X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x$ (A, B – довільні сталі). Після підстановки його до граничних умов (3.17), (3.18) отримаємо власні значення

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.19)$$

яким відповідають власні функції (нетривіальні розв'язки)

$$X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n}x. \quad (3.20)$$

Ці розв'язки визначаються з точністю до сталого множника, який зазвичай покладають рівним одиниці. Значенням (3.19) відповідають розв'язки рівняння (3.16)

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad (3.21)$$

де C_n – невідомі поки що коефіцієнти.

Отже, бачимо, що функції

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.22)$$

являють собою частинні розв'язки рівняння (3.3), які задовольняють однорідні граничні умови (3.12).

Складемо формально ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.23)$$

Оскільки усі члени ряду задовольняють граничні умови, то їм задовольняє і функція $u(x, t)$. Вона має задовольняти ще й початкову умову (3.11), отже

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x). \quad (3.24)$$

Це означає, що C_n є коефіцієнтами Фур'є функції $\varphi(x)$ при розвиненні її у відповідний ряд за синусами на інтервалі $(0, l)$, тобто

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi. \quad (3.25)$$

Доведено, що ряд (3.23), коефіцієнти якого визначаються формулою (3.25), задовольняє усі умови задачі, отже є її розв'язком.

Зауважимо, що коли на кінцях стрижня підтримуються сталі ненульові температури $u(0,t) = u_0$, $u(l,t) = u_1$, $0 \leq t \leq T$ (тобто коли граничні умови *стаціонарно неоднорідні*), то розв'язок задачі треба розшукувати у вигляді

$$u(x,t) = u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0) + v(x,t),$$

де функція $v(x,t) = u(x,t) - u_0 - \frac{x}{l}(u_1 - u_0)$ є розв'язком розглянутої вище відповідної задачі з *однорідними* граничними умовами

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

і початковою умовою $v(x,0) = u(x,0) - u_0 - \frac{x}{l}(u_1 - u_0)$, $0 \leq x \leq l$.

Приклад 3.1. Знайти розв'язок поставленої задачі при $a = 0.5$, якщо початковий ($t = 0$) розподіл температур в стрижні довжиною $l = 30$ має вигляд, показаний на рис. 3.1.

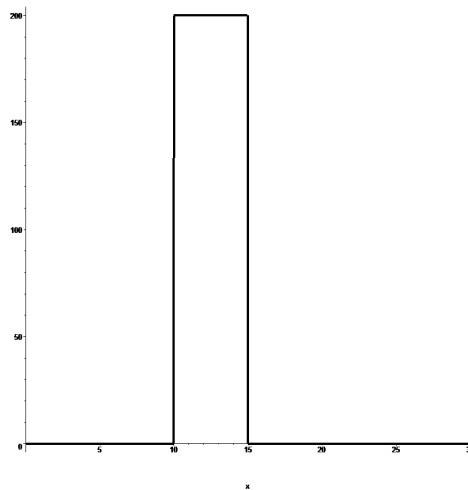


Рис. 3.1

Розв'язання. Згідно з умовою $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 10, \quad 15 < x < 30, \\ 200, & 10 \leq x \leq 15. \end{cases}$

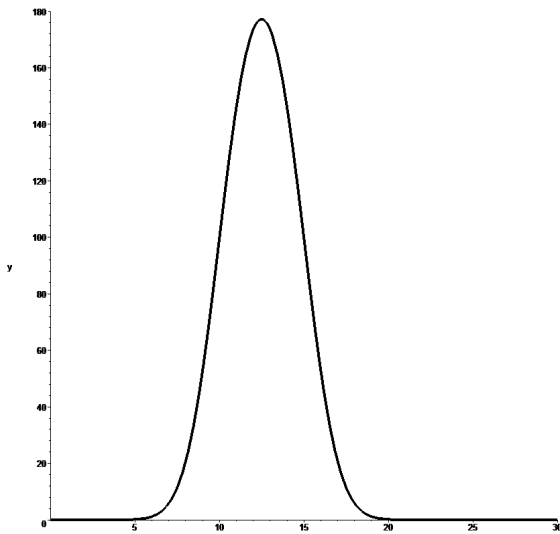
Коефіцієнти Фур'є (3.25) в даному випадку обчислюються за формулою

$$C_n = \frac{2 \cdot 200}{30} \int_{10}^{15} \sin \frac{n\pi\xi}{30} d\xi = -\frac{40}{3} \cdot \frac{30}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{30} \xi \Big|_{10}^{15} = -\frac{400}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{3} \right),$$

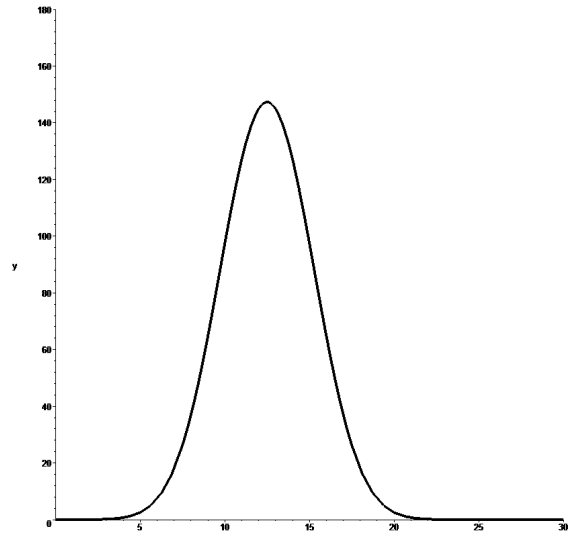
Отже,

$$u(x,t) = -\frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{3} \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

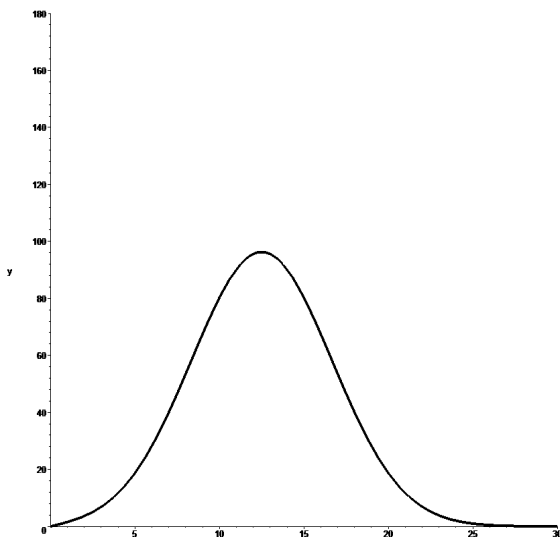
На рис. 3.2 показаний розподіл $u(x,t)$ тепла у стрижні в різні моменти часу t . При обчисленні частинних сум ряду Фур'є за формулою (3.23) утримувалося **100** членів ряду.



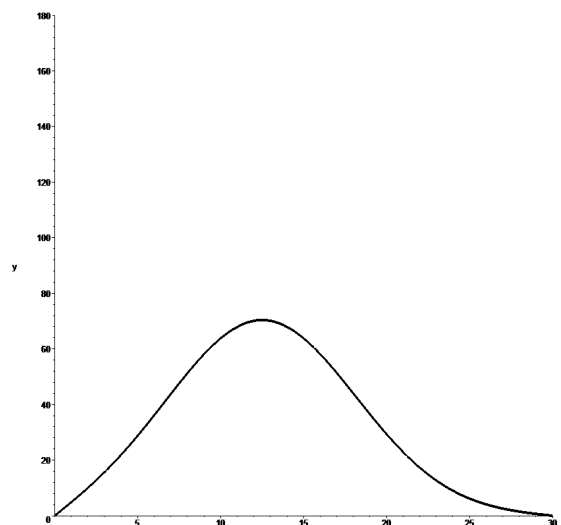
$t = 5$



$t = 10$



$t = 30$



$t = 60$

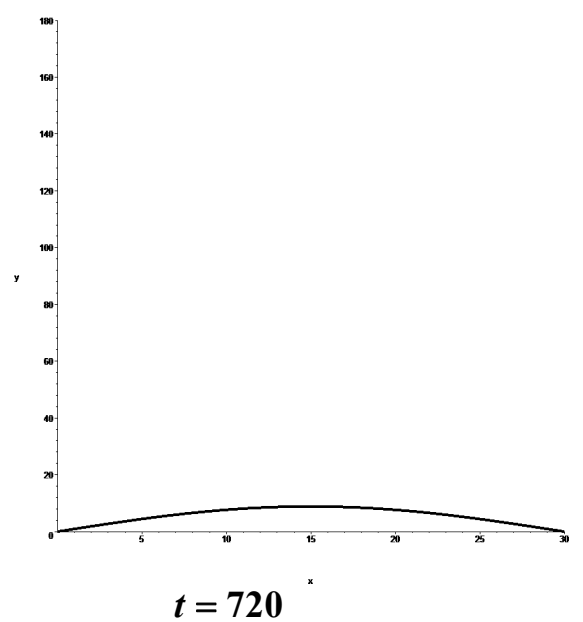
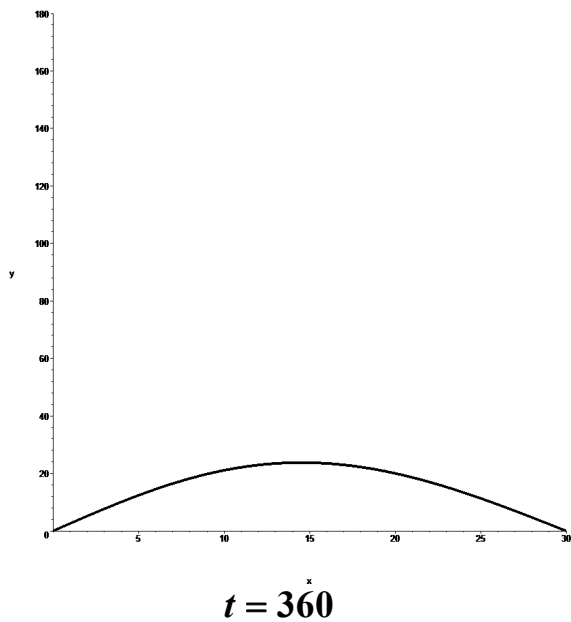
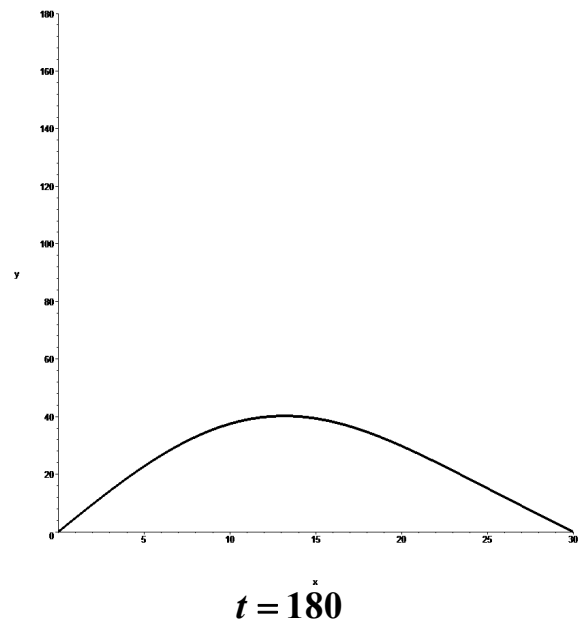
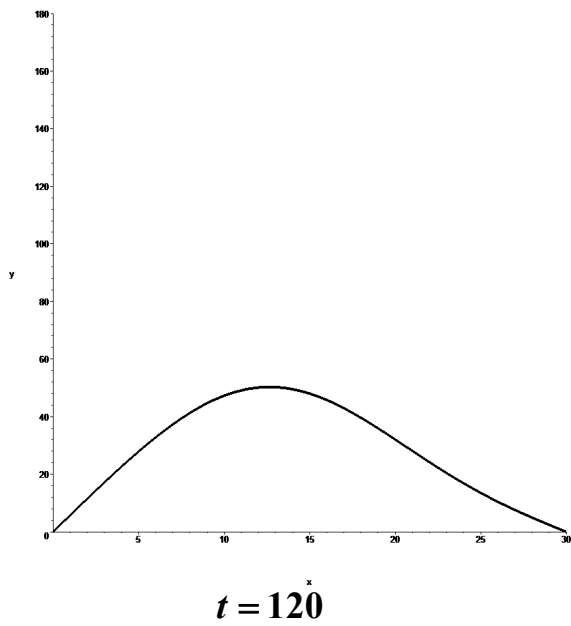


Рис. 3.2

Як бачимо, розповсюдження тепла в стрижні супроводжується швидким падінням температури, а графік функції $u(x,t)$ поступово змінює свій вигляд і стає симетричним відносно лінії $x = l/2$. Графік функції $u(x,t)$ у вигляді поверхні показаний на рис. 3.3, а його окремі фрагменти – на рис. 3.4–3.6.

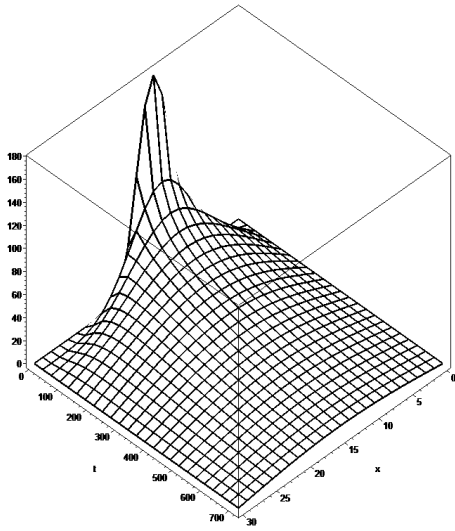


Рис. 3.3

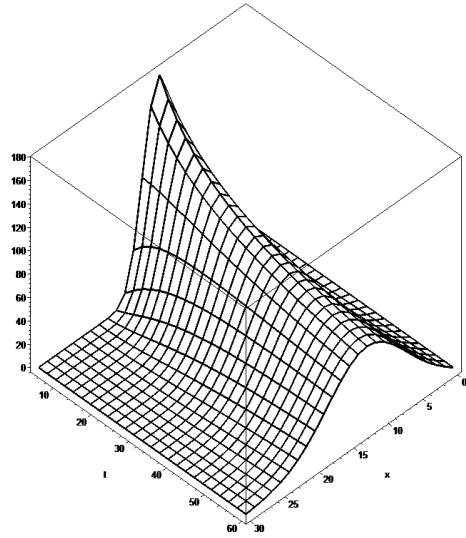


Рис. 3.4

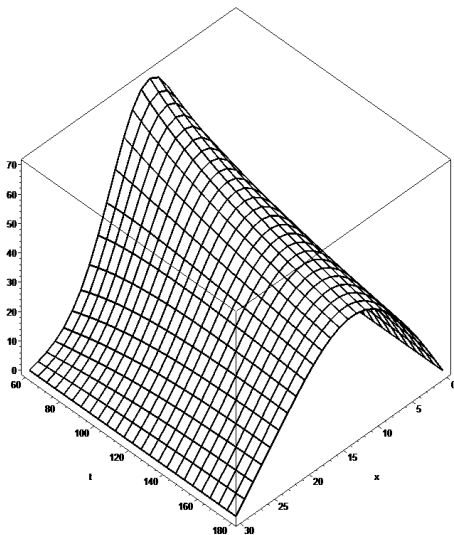


Рис. 3.5

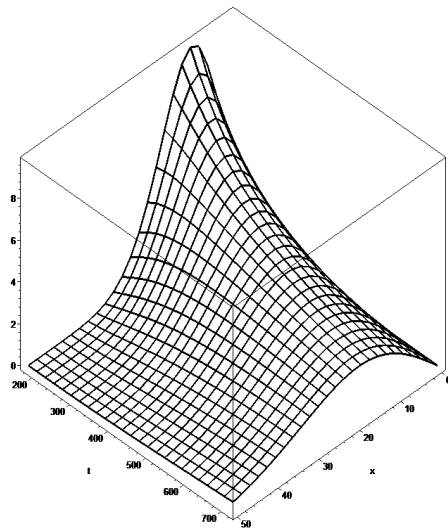


Рис. 3.6

3.4. Поширення тепла в необмеженому стрижні

3.4.1. Нескінченний стрижень

Розглянемо *задачу Коші*: знайти розв'язок рівняння теплопровідності (3.3) в області $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$, який задовольняє початкову умову

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.6)$$

де $\varphi(x)$ – задана функція.

Якщо $\varphi(x)$ є неперервною функцією, то виконання початкової умови будемо розуміти як $\lim_{\substack{t \rightarrow 0+0 \\ \xi \rightarrow x}} u(\xi, t) = \varphi(x)$.

Як вже зазначалося у п.3.2, розв’язок рівняння теплопровідності в даному випадку однозначно визначається початковою умовою тільки тоді, коли він обмежений. Отже, згідно з методом поділу змінних, будемо шукати обмежений нетривіальний розв’язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = \text{const}) \quad (3.3)$$

у вигляді добутку

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.26)$$

Підставимо (3.26) у рівняння (3.3) і поділимо обидві частини рівності на $a^2 X T$. Тоді маємо:

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -a^2, \quad (3.27)$$

де $a^2 = \text{const}$. Звідси випливають два звичайні диференціальні рівняння

$$X'' + a^2 X = 0, \quad (3.28)$$

$$T' + a^2 T = 0. \quad (3.29)$$

Після розв’язування цих рівнянь знайдемо частинні розв’язки рівняння (3.3) у вигляді

$$u_\alpha(x, t) = A(\alpha) e^{-a^2 \alpha^2 t \pm i \alpha x}. \quad (3.30)$$

Ці розв’язки задовольняють умову обмеженості. Оскільки $-\infty < \alpha < +\infty$, то візьмемо у (3.30) знак “+” і утворимо функцію

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) e^{-a^2 \alpha^2 t + i \alpha x} d\alpha, \quad (3.31)$$

яка є суперпозицією частинних розв’язків рівняння (3.3) і тому сама є його розв’язком. Вона повинна задовольняти початкову умову, звідки маємо

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) e^{i \alpha x} d\alpha.$$

Скористаємось формулою обернення перетворення Фур’є (2.17) і отримаємо

$$A(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\alpha\xi} d\xi. \quad (3.32)$$

Після її підстановки у (3.31) і зміни порядку інтегрування дістаємо:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\alpha\xi} d\xi \right) e^{-\alpha^2 a^2 t + i\alpha x} d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 a^2 t + i\alpha(x-\xi)} d\alpha \right) \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Доведено, що внутрішній інтеграл у (3.33) дорівнює

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 a^2 t + i\alpha(x-\xi)} d\alpha = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (3.34)$$

Підставивши (3.34) у (3.33) остаточно отримаємо розв'язок у вигляді

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi, \quad (3.35)$$

який називається *інтегралом Пуассона*. Для будь-якої обмеженої функції $\varphi(x)$ він обмежений і при $t > 0$ зображує розв'язок поставленої задачі Коші, який при $t = 0$ неперервно примикає до $\varphi(x)$ в усіх точках неперервності цієї функції.

Зауваження. Якщо початкова умова задається не при $t = 0$, а при $t = t_0$, то вираз (3.35) набуває вигляду

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \varphi(\xi) d\xi. \quad (3.36)$$

Приклад 3.2. Знайти розподіл температур $u(x, t)$ в нескінченному стрижні у будь-який момент часу, якщо початковий розподіл температур при $t = t_0 = 0$ має вигляд:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1, & x \geq 0, \\ T_2, & x < 0. \end{cases}$$

Розв'язання. За формулою Пуассона дістаємо розв'язок задачі у вигляді:

$$u(x, t) = \frac{T_2}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{T_1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

або, після перетворень,

$$u(x, t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\tau^2} d\tau. \quad (3.37)$$

Функція

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau \quad (3.38)$$

є відома *функція Лапласа* або *інтеграл ймовірностей*. Цю функцію також називають *функцією помилок* й позначають $\text{erf } x$. Вона є непарною, тобто $\Phi(-z) = -\Phi(z)$. За допомогою інтеграла ймовірностей (3.38) формула (3.37) може бути записана у вигляді

$$u(x, t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Зауваження. Якщо початковий розподіл температури стрижня такий, що

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x < x_1, \quad x > x_2, \end{cases}$$

то розв'язок задачі має вигляд

$$u(x, t) = \frac{T}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

або

$$u(x, t) = \frac{T}{2} \left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \right].$$

Приклад 3.3. Знайти розподіл температур $u(x, t)$ в нескінченному стрижні у будь-який момент часу, якщо початковий розподіл температур при $t = t_0 = 0$ задається функцією $u(x, 0) = \varphi(x) = 200e^{-x^2}$, а $a = 0.5$.

Розв'язання. Початковий розподіл температур показаний на рис. 3.7.

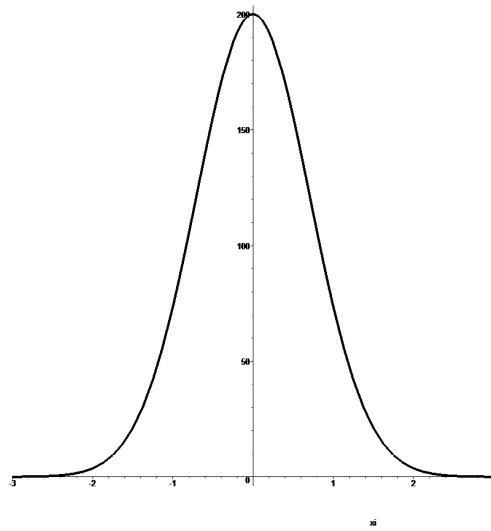
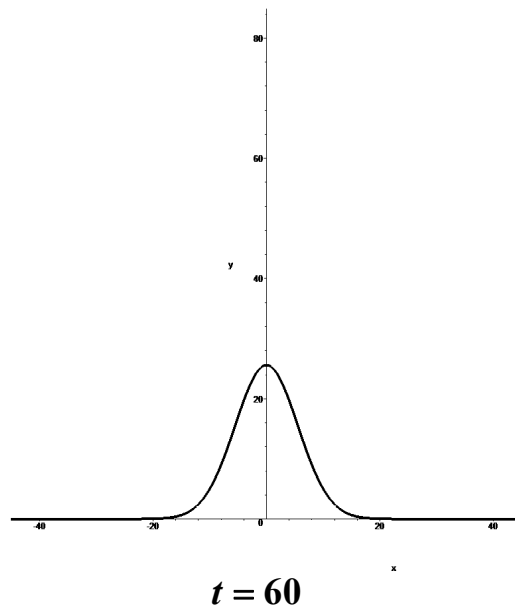
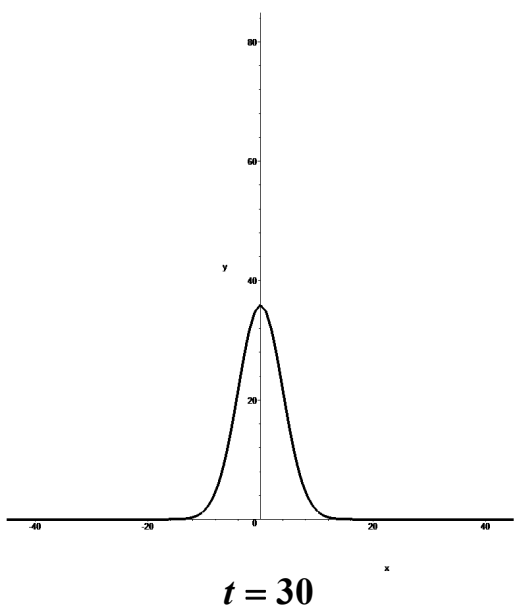
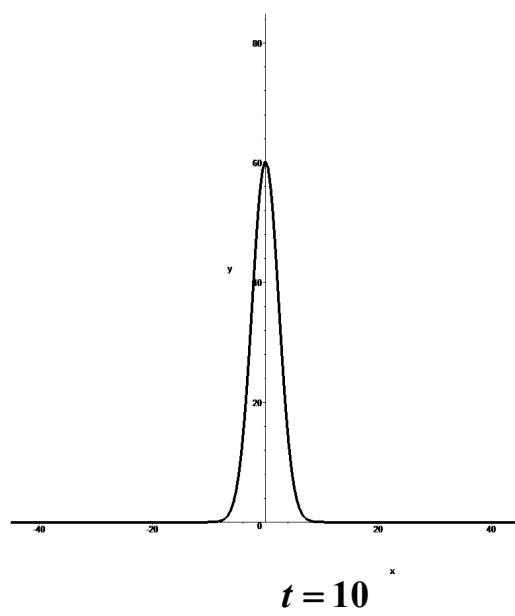
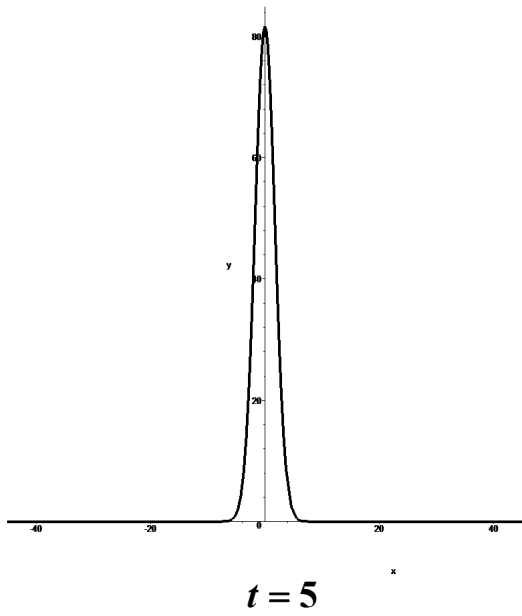


Рис. 3.7

На рис. 3.8 показаний розподіл $u(x,t)$ тепла в стрижні в різні моменти часу t .



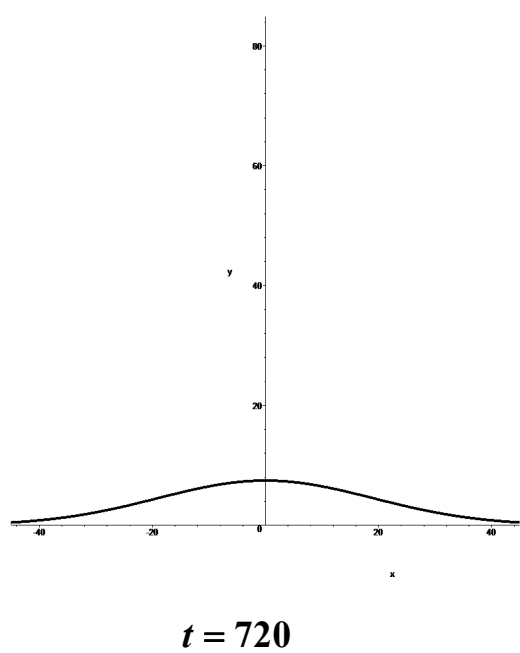
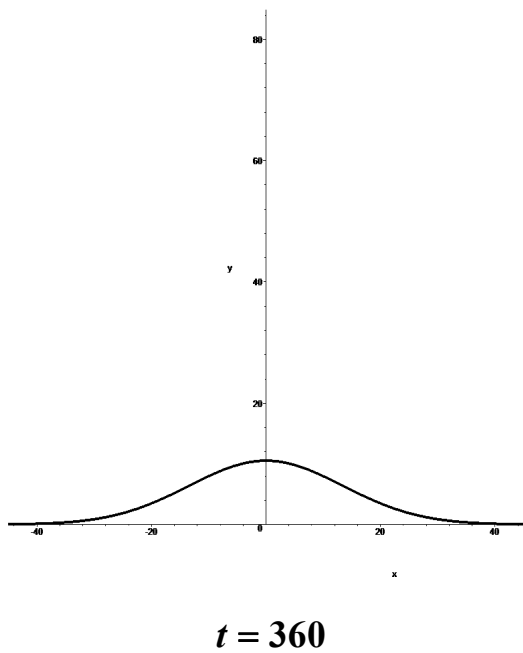
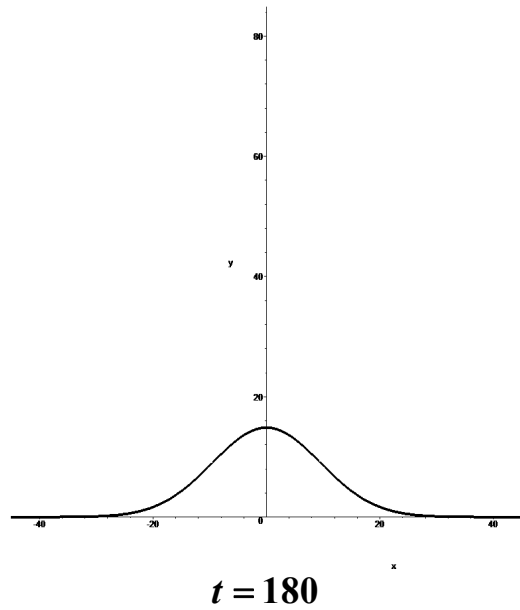
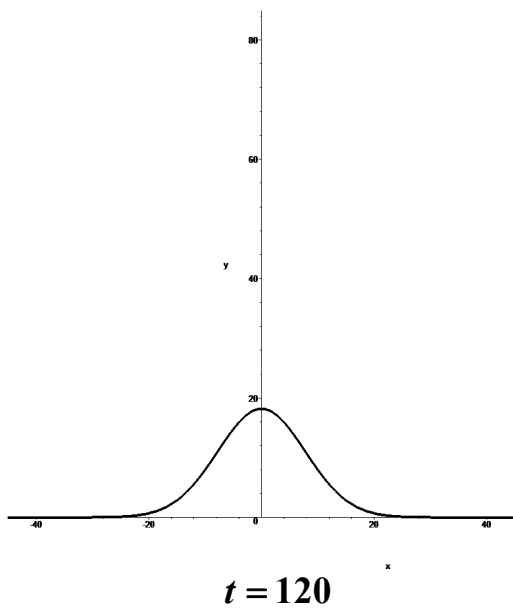


Рис. 3.8

Як бачимо, початкове різке падіння температури, спостережне в точці $x = 0$, з плином часу поступово уповільнюється. Це добре видно на рис. 3.9, де наведений графік функції $u(x,t)$ у вигляді поверхні, а його окремі фрагменти – на рис. 3.10 – 3.12.

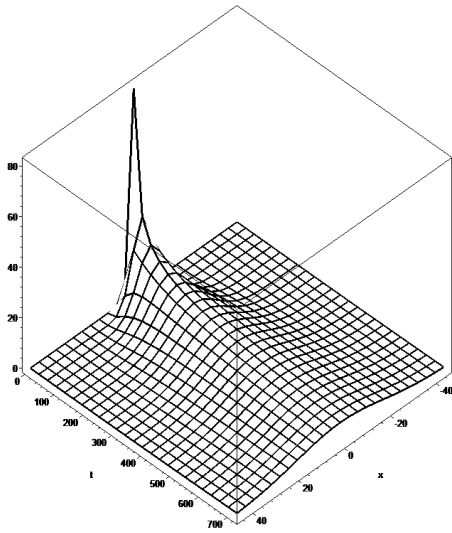


Рис. 3.9

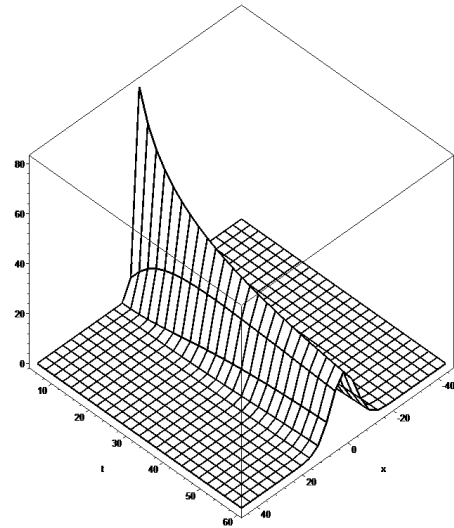


Рис. 3.10

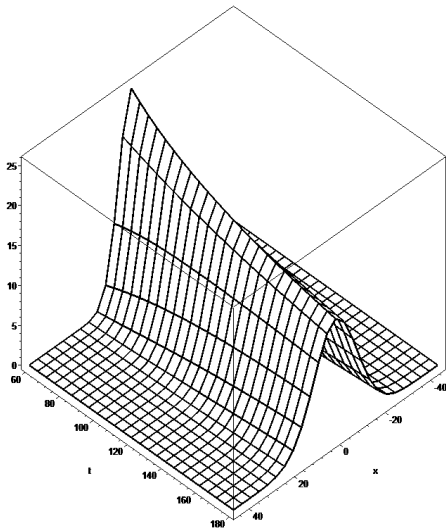


Рис. 3.11

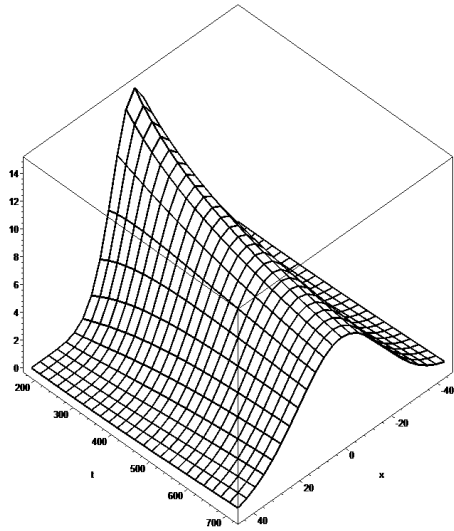


Рис. 3.12

3.4.2. Півнескінченний стрижень

Якщо нас цікавить розподіл температур поблизу одного з кінців стрижня, а вплив іншого кінця несуттєвий, то вважають, що цей кінець знаходиться у нескінченності. Це приводить до задачі про відшукування розв'язку рівняння теплопровідності (3.3) на півнескінченній прямій $0 < x < +\infty$ для значень $t > 0$, який задовольняє

$$\text{початкову умову } u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x > 0) \quad (3.7)$$

і граничну умову, яка залежить від заданого граничного температурного режиму:

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (t \geq 0) \quad (\text{для першої крайової задачі}), \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -\frac{Q(l, t)}{k} \quad (\text{для другої крайової задачі})$$

або $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{k}[u(0, t) - \theta(t)]$ (для третьої крайової задачі).

Зауваження. Для того, щоб умови задачі визначали єдиний розв'язок, необхідно на функцію $u(x, t)$ накласти додаткову умову її обмеженості всюди, тобто $|u(x, t)| < M$ при $0 \leq x < +\infty$, $t \geq 0$. Звідси випливає, що початкова функція $\varphi(x)$ також повинна бути обмеженою, а саме $|\varphi(x)| < M$.

Доведено, що розв'язок першої крайової задачі має вигляд

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \varphi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{x}{(t-\tau)\sqrt{t-\tau}} \mu(\tau) d\tau. \quad (3.39)$$

Зауваження. Якщо початкова умова задається не при $t = 0$, а при $t = t_0$, то вираз для $u(x, t)$ набуває вигляду

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t_0)}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right) \varphi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{x}{(t-\tau)\sqrt{t-\tau}} \mu(\tau) d\tau.$$

Також доведено, що розв'язок другої крайової задачі з однорідною граничною умовою $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ має вигляд

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \varphi(\xi) d\xi. \quad (3.40)$$

Приклад 3.4. Розглянемо задачу про остигання *рівномірно* нагрітого до температури T півнескінченного стрижня з теплоізолюваною бічною поверхнею, на кінці якого підтримується стала *нульова* температура. Це означає, що треба знайти розв'язок рівняння теплопровідності (3.3) в області $0 < x < +\infty$, $t > 0$, який задовольняє початкову умову $u(x, 0) = T$, $0 \leq x < +\infty$ і граничну умову $u(0, t) = 0$, $t \geq 0$ (*перша крайова задача для півнескінченного стрижня*).

Розв'язання. Оскільки за умовою задачі $\varphi(x) = T$, $\mu(t) = 0$, $t_0 = 0$, то за

формулою (3.39) будемо мати $u(x, t) = \frac{T}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right) d\xi$.

Введемо змінні $\eta = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$, $\eta_1 = \frac{\xi + x}{2a\sqrt{t}}$ і розіб'ємо інтеграл на два доданки.

Після перетворень отримаємо розв'язок задачі у вигляді $u(x, t) = T \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$,

де $\Phi(z)$ – інтеграл ймовірностей.

Приклад 3.5. Знайти розв'язок *першої* крайової задачі для *нерівномірно* нагрітого півнескінченного стрижня, на кінці якого підтримується стала нульова температура, якщо початковий розподіл температур при $t = t_0 = 0$ має вигляд

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < l, \quad x > L, \\ T, & l \leq x \leq L. \end{cases}$$

Обчислення провести при $a = 0.5$, $T = 200$, $l = 4$, $L = 6$.

Розв'язання. Початковий розподіл температур показаний на рис. 3.13.

Оскільки на кінці стрижня підтримується стала нульова температура, то гранична умова є $u(0, t) = 0$. Отже, розв'язок (3.39) задачі в даному випадку має вигляд

$$u(x, t) = \frac{T}{2a\sqrt{\pi t}} \int_l^L \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right) d\xi \quad (3.41)$$

або $u(x, t) = \frac{T}{2} \left[\Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-L}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x+L}{2a\sqrt{t}}\right) \right]$,

де $\Phi(z)$ – інтеграл ймовірностей.

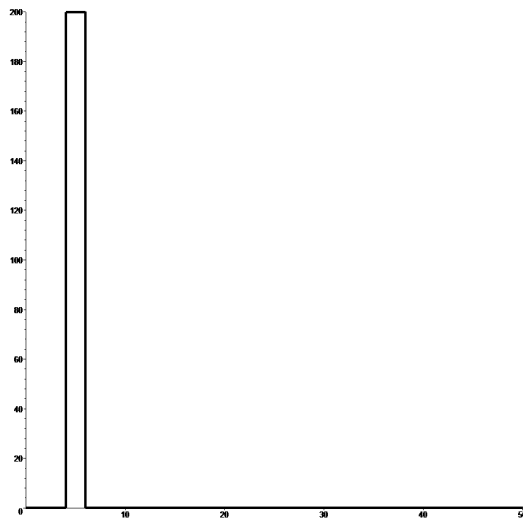
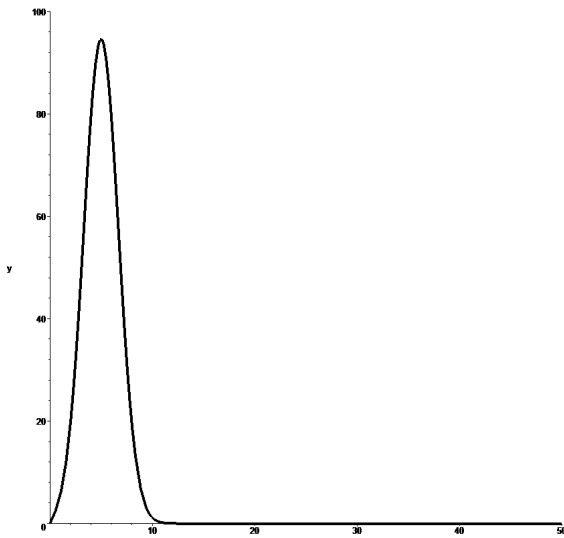
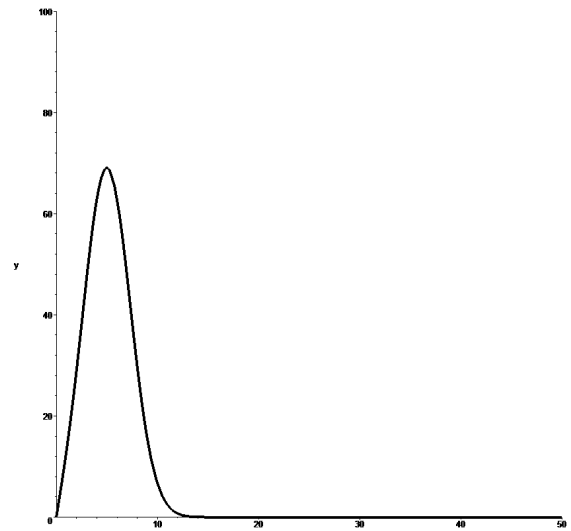


Рис. 3.13

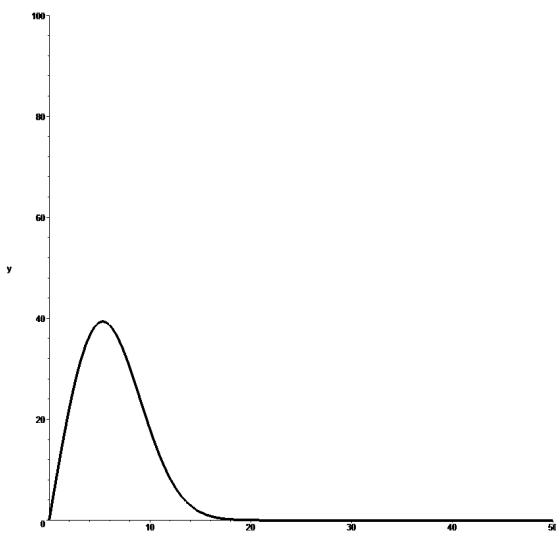
На рис. 3.14 показаний розподіл $u(x, t)$ тепла в стрижні в різні моменти часу t .



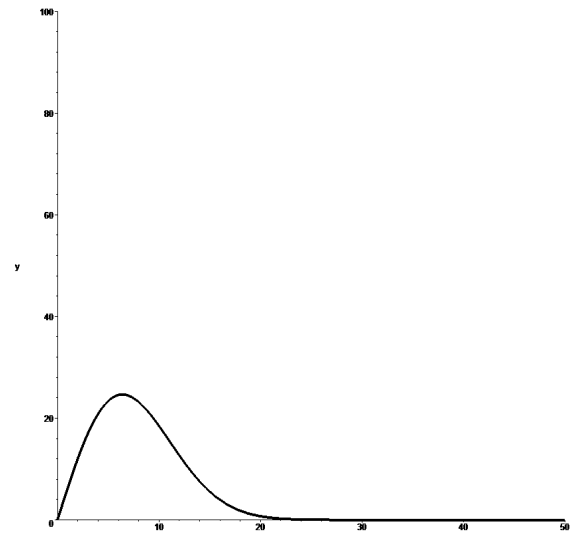
$t = 5$



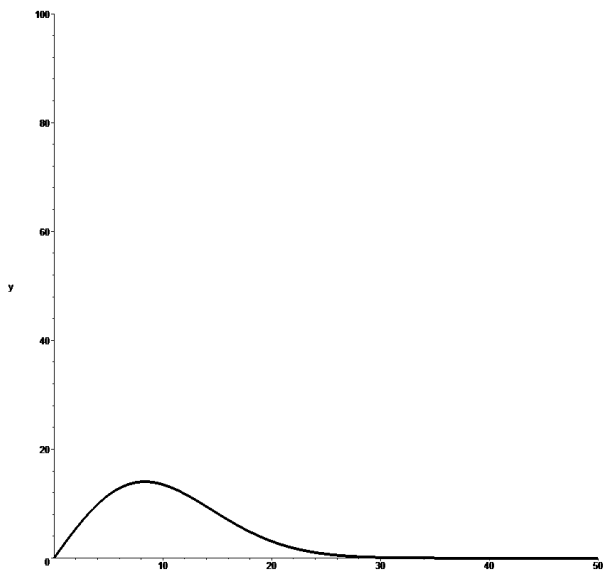
$t = 10$



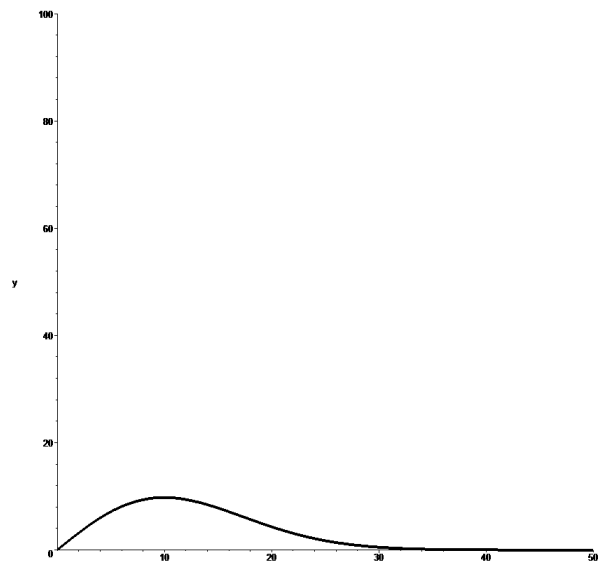
$t = 30$



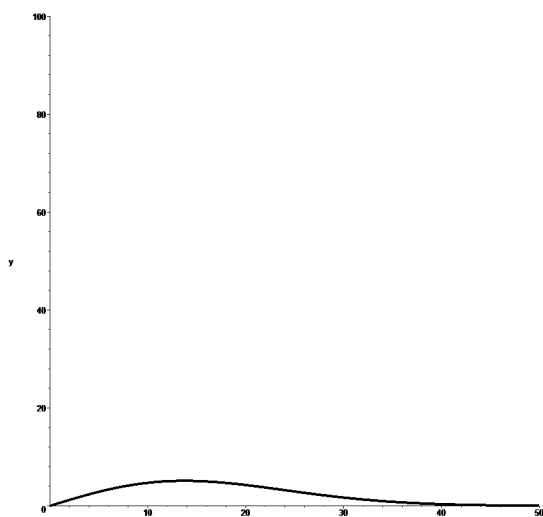
$t = 60$



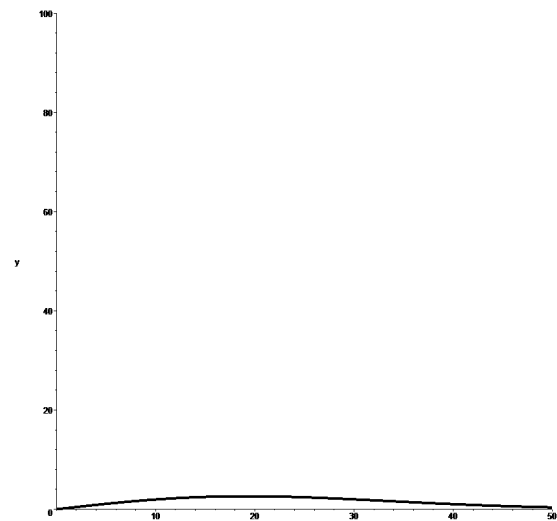
$$t = 120$$



$$t = 180$$



$$t = 360$$



$$t = 720$$

Рис. 3.14

Як бачимо, різке падіння температури біля кінця стрижня, яке спостерігається на початку процесу остигання, з плином часу поступово уповільнюється. Графік функції $u(x,t)$ у вигляді поверхні показаний на рис. 3.15, а його окремі фрагменти – на рис. 3.16–3.18.

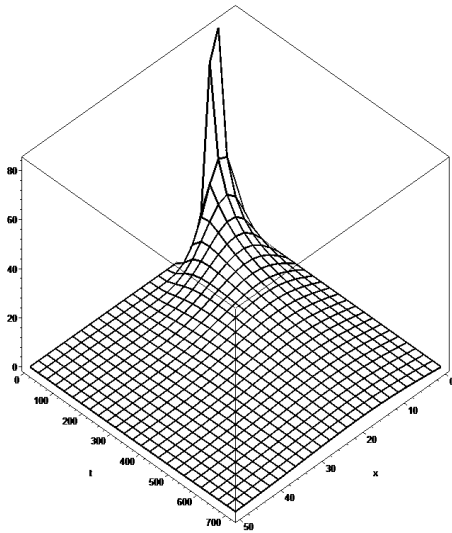


Рис. 3.15

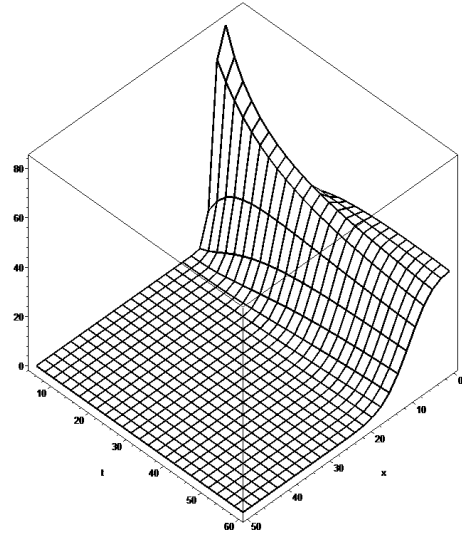


Рис. 3.16

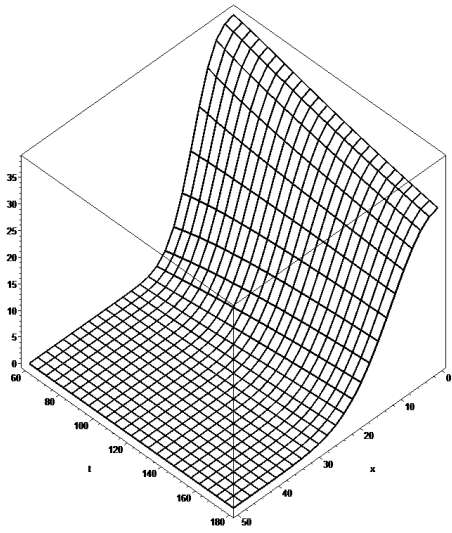


Рис. 3.17

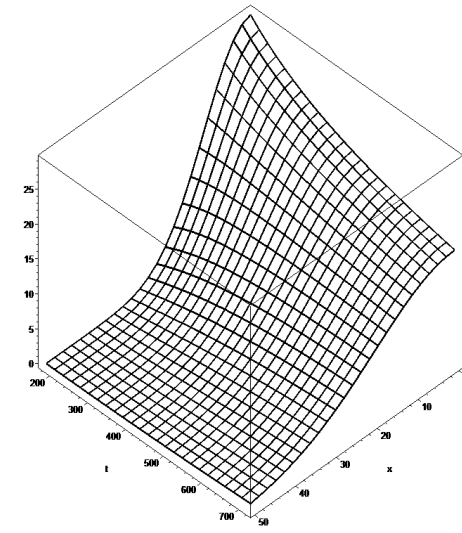


Рис. 3.18

Приклад 3.6. Знайти розв'язок тієї ж задачі при умові, що кінець стрижня теплоізований.

Розв'язання. Оскільки кінець стрижня теплоізований, то гранична умова має вигляд $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$, тобто в даному випадку маємо другу крайову задачу для півнескінченного стрижня. Розв'язок (3.40) даної задачі має вигляд

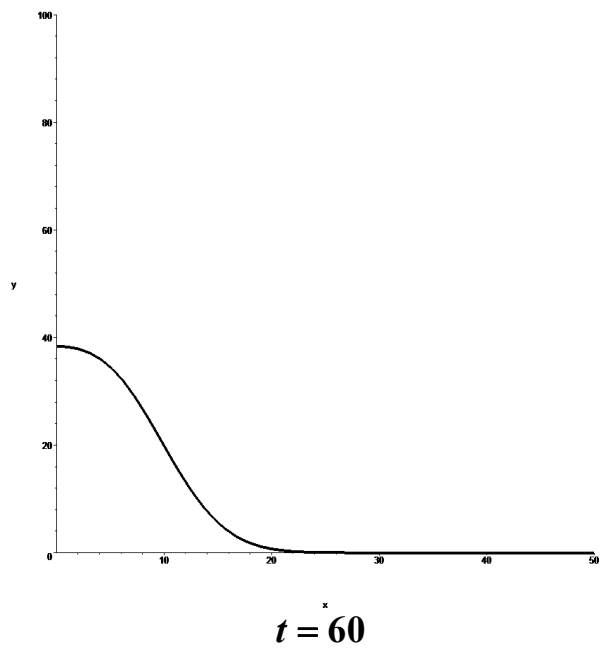
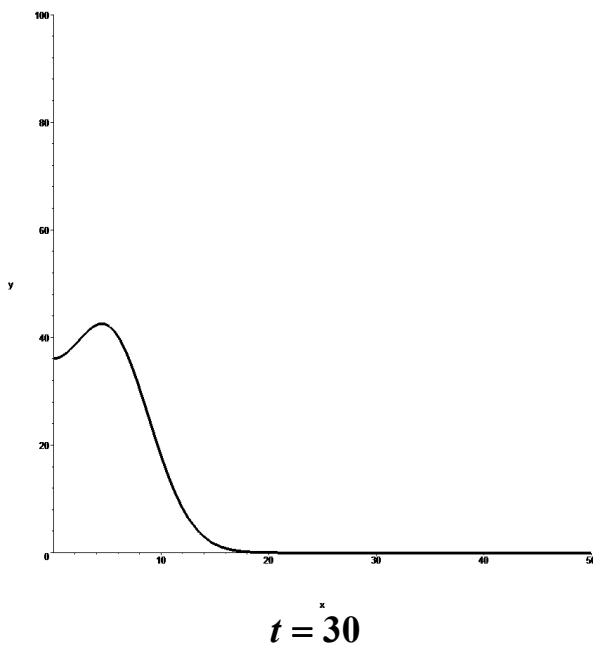
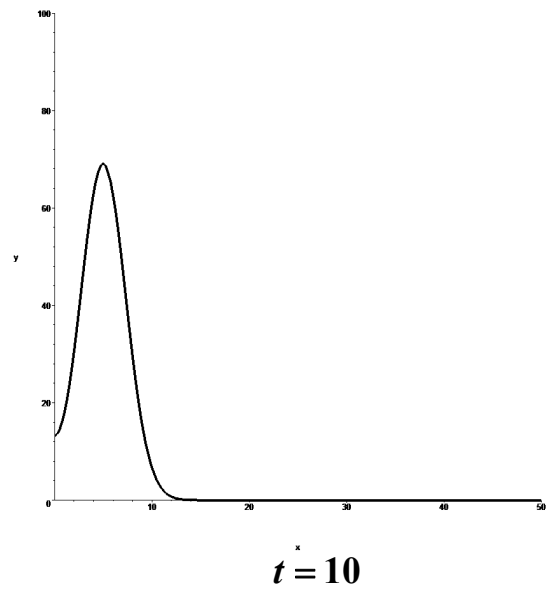
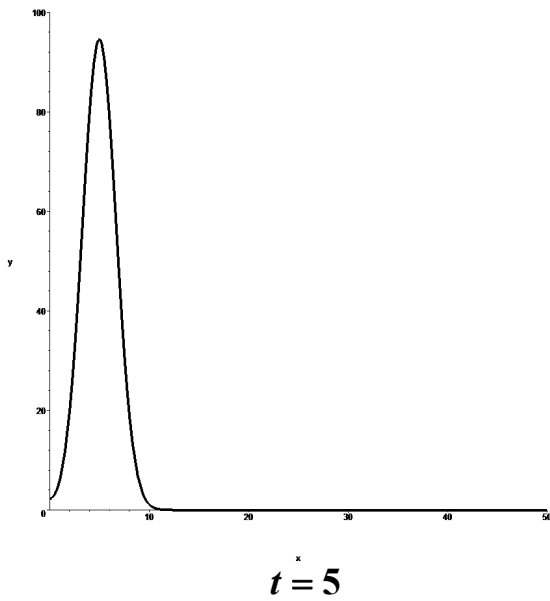
$$u(x, t) = \frac{T}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^L \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) d\xi \quad (3.42)$$

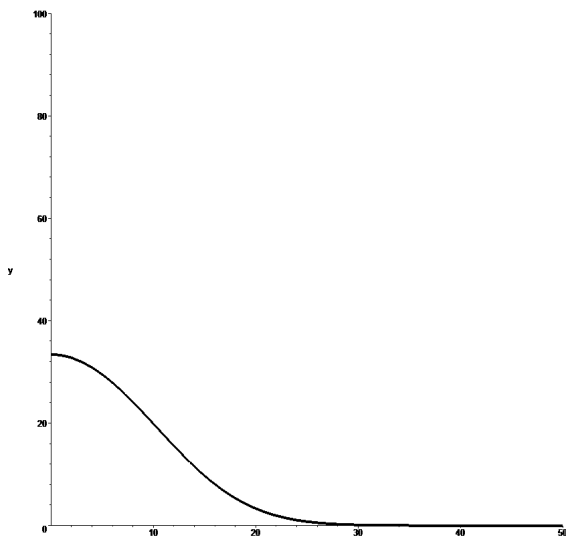
або

$$u(x,t) = -\frac{T}{2} \left[\Phi \left(\frac{l-x}{2a\sqrt{t}} \right) + \Phi \left(\frac{l+x}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi \left(\frac{L-x}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi \left(\frac{L+x}{2a\sqrt{t}} \right) \right],$$

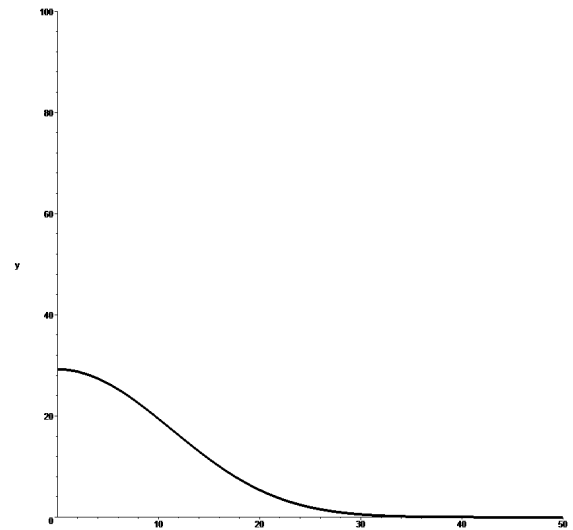
де $\Phi(z)$ – інтеграл ймовірностей.

На рис. 3.19 показаний розподіл $u(x,t)$ тепла в стрижні в різні моменти часу t .

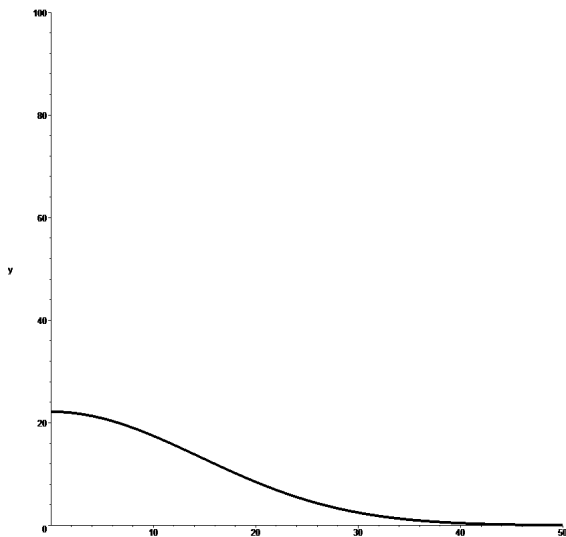




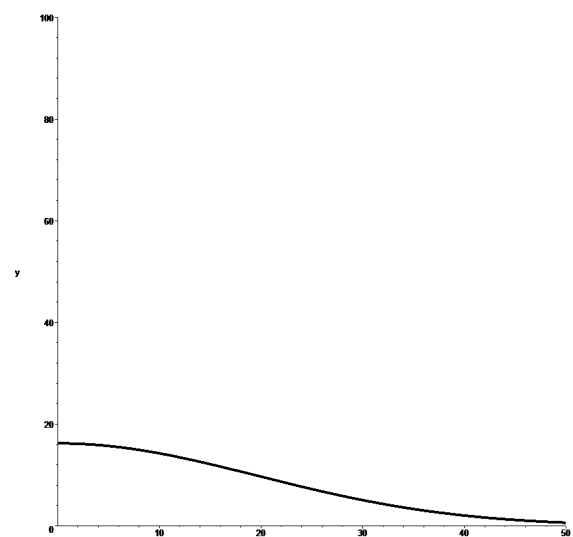
$t = 120$



$t = 180$



$t = 360$



$t = 720$

Рис. 3.19

Як бачимо, теплоізолюваний кінець стрижня спочатку нагрівається, а потім починає остигати, по мірі того, як тепло розповсюджується по стрижню. Графік функції $u(x,t)$ у вигляді поверхні показаний на рис. 3.20, а його окремі фрагменти – на рис. 3.21–3.23.

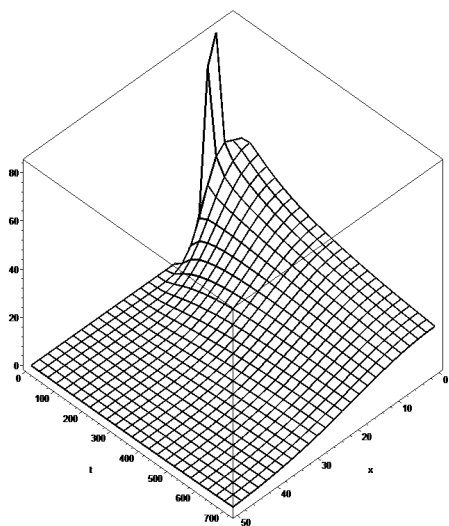


Рис. 3.20

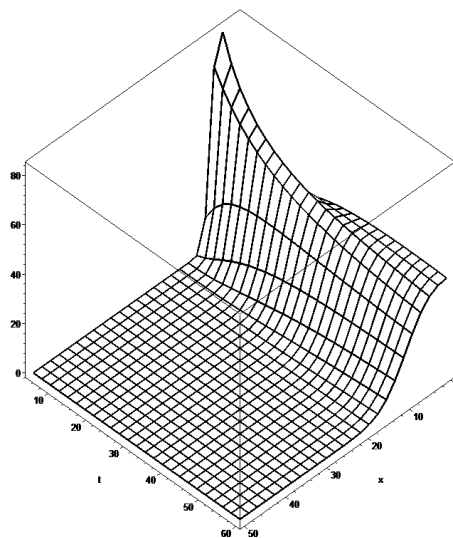


Рис. 3.21

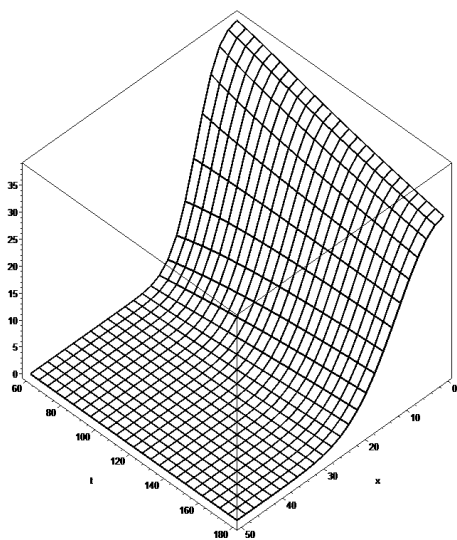


Рис. 3.22

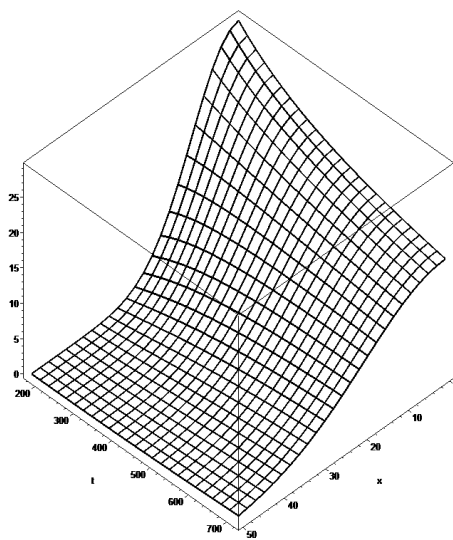


Рис. 3.23

ЗАКІНЧЕННЯ

Звук, як відомо, – це коливальний рух частинок газоподібного, рідкого або твердого середовища, що поширюється у вигляді хвиль. Коли ми чуємо звук, наш орган слуху будує своєрідне “перетворення”, представляючи цей звук у вигляді спектра послідовних значень гуčnosti для тонів різної висоти [2].

Аналогічні операції за допомогою математичних методів можна проводити над звуковими хвилями або практично над будь-якими іншими коливальними процесами – від світлових хвиль і океанських припливів до циклів сонячної активності.

У наш час вивчення перетворення Фур'є головним чином зводиться до пошуку ефективних способів переходу від функцій до їх перетвореного вигляду і назад. Щоб обчислити інтеграл Фур'є і зробити перетворення, можна скористатися аналітичними методами. І хоча при спробі застосування цих методів у повсякденній практиці можуть виникнути певні труднощі, багато інтегралів Фур'є вже знайдені і зведені в таблиці.

Крім того, існують ще й чисельні методи, що дозволяють розраховувати перетворення Фур'є для функцій, що задаються таблицею експериментальних даних, або функцій, інтеграли Фур'є від яких аналітично взяти неможливо. До появи комп'ютерів чисельні розрахунки перетворень були досить трудомісткими, оскільки доводилося виконувати величезну кількість арифметичних операцій вручну. Однак з появою комп'ютерів становище змінилося, з'явилися нові застосування гармонічного аналізу.

Як відомо, звуковий сигнал у комп'ютері може представлятися у вигляді деякого набору відліків його амплітуд, вироблених через певні проміжки часу (період дискретизації) та подаються деякою кількістю двійкових розрядів (розрядів вибірки). Таке подання зручне для зберігання звукового сигналу і його перетворення назад у неперервний сигнал. Однак, деякі операції обробки звукового сигналу у такому поданні не завжди бувають зручними. Це пов'язане з тим, що реальний звуковий сигнал складається з частот з певною амплітудою і фазою. Таким чином, застосування таких операцій обробки звукового сигналу як “фільтр нижніх частот” або “фільтр верхніх частот” вимагає перетворення вихідного звукового сигналу у вигляді відліків в його частотний спектр. Після цього перетворення звуковий сигнал буде представлений у вигляді

коефіцієнтів, відповідних амплітудам і фазам частот, що складають цей сигнал. Тепер, наприклад, операція “фільтр нижніх частот”, яка “вирізає” з сигналу всі частоти вище деякої заданої, може просто обнулити коефіцієнти, що відповідають частотам, які необхідно вирізати. У такий спосіб видаляється високочастотний шум у цифровому музичному запису. Потім за допомогою оберненого перетворення отримуємо музичний сигнал поліпшеної якості. Та насправді коло областей застосування такого перетворення значно ширше: обробка растрових зображень, телекомунікації, дослідження та вимірювання сигналів, радіолокація і т. д. Наприклад, оцінити кореляцію (схожість) двох картинок набагато швидше, якщо проводити її за допомогою розкладання в ряд Фур'є. Те ж саме – з множенням великих, наприклад, тисячзначних, чисел. Якщо це робити безпосередньо, то треба зробити мільйон множень, а за допомогою рядів Фур'є – в сто разів швидше. Це широко використовується в сучасних алгоритмах шифрування (наприклад, RSA). Для передачі даних у цифровій формі по аналогових лініях телефонної мережі (модем), вони спочатку перетворюються в деякий набір частот і передаються по лініях передач, а потім, на приймальній стороні виконується зворотне перетворення і відновлюються вихідні дані. Широко застосовуються ряди Фур'є і в апаратах мобільного зв'язку, зокрема, в радіотракті, в боротьбі з відбиттями і загасаннями, в алгоритмі стиснення звуку (типу MP3).

Часто перетворення Фур'є застосовують і в біології. Так, наприклад, форма подвійної спіралі ДНК була відкрита в 1962 році з використанням дифракції рентгенівських променів у поєднанні з аналізом Фур'є. Рентгенівські промені фокусувалися на кристалі волокон ДНК, і зображення, що отримується при дифракції випромінювання на молекулах ДНК, фіксувалося на плівці. Ця дифракційна картина давала інформацію про амплітуду при застосуванні перетворення Фур'є до кристалічної структури. Інформація про фазу, яку неможливо було отримати з одних тільки фотографій, виводилася шляхом зіставлення дифракційної картини ДНК з картинами, отриманими при аналізі подібних хімічних структур. За інтенсивністю рентгенівських променів і фазовою інформацією, отриманих за допомогою перетворення Фур'є, біологи змогли відновити кристалічну структуру, тобто вихідну функцію. В останні роки вивчення дифракції рентгенівських променів у поєднанні з подібним “оберненим” аналізом Фур'є дозволили визначити структуру і багатьох інших органічних молекул, а також більш складних утворень, зокрема вірусів.

За допомогою аналізу Фур'є фахівці з дослідження космічного простору підвищують чіткість зображень небесних тіл, сфотографованих з космічних апаратів. Автоматичні міжпланетні станції і штучні супутники Землі передають інформацію на Землю у вигляді послідовності радіоімпульсів. Комп'ютери обробляють ці імпульси за допомогою методів гармонічного аналізу. При цьому комп'ютер модулює окремі компоненти кожного перетворення, щоб чіткіше виділити одні властивості та усунути інші, аналогічно тому, як за допомогою перетворення Фур'є усувається шум з музичного запису. В кінцевому підсумку змінені таким чином дані знову перетворюються на вихідній формі, і тим самим відновлюється зображення. За допомогою описаного процесу можна різкіше сфокусувати зображення, відфільтрувати туманний фон і відрегулювати контрастність.

Перетворення Фур'є відіграють дуже важливу роль у фізиці плазми і напівпровідникових матеріалів, мікрохвильовій акустиці, сейсмології, океанографії, радіолокації, медичних обстеженнях. Серед численних застосувань в хімії можна назвати використання перетворення Фур'є в спектрометричному аналізі, а в медицині – створені на його основі алгоритми комп'ютерної томографії.

На основі методів, що використовують перетворення Фур'є, конструюються сучасні антени скануючих радіотелескопів, створюються карти сонячної поверхні, розробляються нові способи аналізу даних по кількості сонячних плям і товщині земних відкладень ґрунту.

Завдяки широкому застосуванню рядів і перетворень Фур'є ми і сьогодні можемо повторити з повною підставою те, що лорд Кельвін сказав в 1867 році: “Теорема Фур'є не тільки є одним з найбільш витончених результатів сучасного аналізу, але й дає нам незамінний інструмент у дослідженні найскладніших питань сучасної фізики” [2].

ЛІТЕРАТУРА

1. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1967. – 780 с.
2. Брейсуэлл Рональд Р. Преобразование Фурье // Scientific American (издание на русском языке). - №8 / Август 1989. – С. 48-56.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 608 с.
4. Власова Е.А. Ряды: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 616 с.
5. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: Наука, 1979. – 408 с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. II: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
8. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.2. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.
9. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
10. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. Учебное пособие для втузов / Под ред. Г.И. Кручковича. – М.: Высшая школа, 1970. – 512 с.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт.: Т.3. – М.: Наука, 1970. – 656 с.
13. Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.

Навчальне видання

Павленко Анатолій Васильович
Копорулін Володимир Львович
Кагадій Лариса Петрівна
Моссаковська Людмила Володимирівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
РОЗДІЛ “РЯДИ ТА ІНТЕГРАЛ ФУР’Є”

Навчальний посібник

Тем. план 2015, поз. 123

Підписано до друку 20.05.2015. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк 5,41. Умов. друк. арк. 5,34. Тираж 100 пр. Замовлення № 99.

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ- 5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ