МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Робоча програма,

методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Математичні методи оптимізації» для студентів спеціальності 8.05060101 – теплоенергетика

Дніпропетровськ НМетАУ 2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Робоча програма,

методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Математичні методи оптимізації» для студентів спеціальності 8.05060101 – теплоенергетика

Затверджено
на засіданні Вченої ради
академії
Протокол № 1 від 27.01.2014 р.

Дніпропетровськ НМетАУ 2014

УДК 519.6
Робоча програма, методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Математичні методи оптимізації» для студентів спеціальності 8.05060101 – теплоенергетика / Укл.: О.В. Гупало, А.І. Кульчицька. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2014. – 23 с.

Наведені робоча програма, методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Математичні методи оптимізації», приклади розрахунку індивідуального завдання, рекомендована література.

Призначена для студентів, що навчаються за спеціальністю 8.05060101 – теплоенергетика.

Друкується за авторською редакцією.

Укладачі: О.В. Гупало, канд. техн. наук., доц.
А.І. Кульчицька, магістр.

Відповідальний за випуск О.О. Єрьомін, д-р техн. наук, доц.

Рецензент М.В. Губинський, д-р техн. наук, проф. (НМетАУ)

Підписано до друку 26.05.2014. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский. Обл.-вид. арк. 1,35. Умов. друк. арк. 1,32. Тираж 20 прим. Замовлення № .

Національна металургійна академія України
49600, Дніпропетровськ – 5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничій відділ НМетАУ

1 РОБОЧА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ»

Розподіл навчальних годин

Усього годин за навчальним планом, у тому числі:	108
аудиторні заняття, з них:	12
лекції	4
лабораторні роботи	4
практичні заняття	4
семінарські заняття	–
Самостійна робота, у тому числі при:	96
вивченні розділів програми, які не викладаються на лекціях	84
виконанні індивідуальних завдань	12
Підсумковий контроль	екзамен

Характеристика дисципліни

Навчальна дисципліна «Математичні методи оптимізації» є нормативною і входить до циклу дисциплін природничо-наукової підготовки.

Мета вивчення дисципліни – засвоєння знань та придбання навичок, необхідних для уміння за допомогою відомих методів оптимізувати конструкційні та експлуатаційні параметри енергетичного обладнання, енергетичних об’єктів та їх елементів, що забезпечить максимальний корисний виграш при заданому критерії та накладених обмеженнях.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен знати:

– область та необхідні умови застосування методів оптимізації в інженерній практиці;

– загальну структуру та класифікацію оптимізаційних задач;

– основні методи розв’язання задач безумовної оптимізації та оптимізаційних задач при наявності обмежень;

– методи розв’язання задач лінійного програмування.

Наприкінці вивчення дисципліни студент повинен вміти:

– використовуючи дані щодо сукупності конструкційних та експлуатаційних параметрів енергетичного обладнання,енергетичних об’єктів, або їх елементів, обирати критерій оптимальності,визначати параметри оптимізації та формулювати задачу оптимізації;

– обирати метод розв’язання поставленої оптимізаційної задачі;

– отримувати розв’язок задачі оптимізації, що забезпечує максимальний корисний виграш при заданому критерії оптимальності та накладених обмеженнях, та на його основі розробляти технічні рішення щодо вдосконалення енергетичного об’єкта або його обладнання.

Контроль поточної роботи студента здійснюється шляхом складання індивідуального завдання викладачу з його обов’язковим захистом.

Критерії успішності – отримання позитивної оцінки при складанні екзамену.

Засоби діагностики успішності навчання – комплект завдань для проведення екзамену в тестовій формі.

Набуті знання і вміння використовуються при виконанні випускної роботи магістра.

Зміст дисципліни

Методи розв’язання задач безумовної оптимізації. Основні поняття та визначення: необхідні умови для застосування оптимізаційних методів; область застосування методів оптимізації в інженерній практиці; структура оптимізаційних задач; поняття оптимізації, критерію оптимальності, цільової функції. Задачі безумовної оптимізації:математична постановка задачі безумовної оптимізації; властивості функцій однієї та декількох змінних; поняття монотонної та унімодальної функцій, глобального і локального екстремумів, сідлової точки; аналітичні методи пошуку екстремумів функцій однієї та декількох змінних; необхідні та достатні умови існування екстремумів функцій однієї та декількох змінних. Чисельні методи пошуку екстремуму функції однієї змінної: загальна характеристика методів пошуку екстремуму функції однієї змінної; метод рівномірного пошуку; методи виключення інтервалів; методи квадратичної та кубічної інтерполяції. Чисельні методи пошуку екстремуму функції декількох змінних: загальна характеристика методів пошуку екстремуму функції декількох змінних; методи прямого пошуку; градієнтні методи першого та другого порядків.

Лінійне програмування. Задачі лінійного програмування: математична постановка задачі лінійного програмування у загальному вигляді; графічний метод розв’язання задачі та можливість його застосування; графічне уявлення області припустимих розв’язків; визначення оптимального розв’язка задачі; єдиність оптимального розв’язка; альтернативні оптимальні розв’язки. Симплекс-метод розв’язання задач лінійного програмування: канонічна форма постановки задачі лінійного програмування; перетворення постановки задачі до канонічної форми; застосування симплекс-методу для розв’язання задачі. Задачі цілочислового лінійного програмування: математична постановка задачі; загальна характеристика методів розв’язання задач цілочислового лінійного програмування.

Методи розв’язання задач умовної оптимізації. Задачі умовної оптимізації: математична постановка задачі умовної оптимізації в загальному вигляді; обмеження у вигляді рівностей. обмеження у вигляді нерівностей; змішані обмеження. класифікація методів розв’язання задач умовної оптимізації; метод виключення змінних; метод множників Лагрнажа. Методи прямого пошуку в задачах умовної оптимізації: виключення обмежень у вигляді рівностей; визначення початкової припустимої точки; застосування методів прямого пошуку для розв’язання задач умовної оптимізації. Методи послідовної безумовної мінімізації: загальна характеристика методів послідовної безумовної мінімізації; метод штрафів; поняття штрафної функції; найпоширеніші штрафні функції; застосування методу штрафів для розв’язання задач умовної оптимізації. Методи можливих напрямків: загальна характеристика методів та їх застосування для розв’язання задач умовної оптимізації.

Лабораторні роботи

Тема заняття	Тривалість, годин
1. Чисельне розв’язання задач безумовної оптимізації.	2
2. Чисельне розв’язання задач умовної оптимізації.	2

Практичні заняття

Тема заняття	Тривалість, годин
1. Застосування аналітичних методів для розв'язання екстремальних задач у відсутності обмежень.	2
2. Застосування методу множників Лагранжа для розв'язання задач умовної оптимізації.	2

Індивідуальне завдання (12 годин)

Визначення оптимального складу паливної суміші.

Рекомендована література

1. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х кн. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986.
2. Теплообмен и тепловые режимы в промышленных печах / Розенгарт Ю.И., Потапоп Б.Б, Ольшанский В.М., Бородулин А.В. – Киев-Донецк: Вища школа, 1986. – 296 с.
3. Ревун М.П., Потапов Б.Б., Ольшанский В.М., Бородулин А.В. Высокотемпературные теплотехнологические процессы и установки в металлургии: Учебное пособие. – Днепропетровск: ЗГИА. – 443 с.
4. Бояринов А. И., Кафаров В.В. Методы оптимизации в химической технологии. – М.: Химия, 1969. – 564 с.
5. Б. Банди. Методы оптимизации. Вводный курс: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.

2 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ «ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО СКЛАДУ ПАЛИВНОЇ СУМІШІ»

2.1 Завдання

З трьох різних палив скласти найдешевшу суміш, яка мала б теплоту згоряння не нижче заданої ($Q_{доп}$) та вміст шкідливих домішок (золи та сірки) не більше допустимих (відповідно, $A_{доп}$ и $S_{доп}$). Визначити частки палив у суміші оптимального складу.

Розв'язати задачу графічним і симплексним методами. Перевірити отримані результати шляхом розв'язання задачі за допомогою пакета прикладних програм.

Теоретичні питання, пов'язані з постановкою та методами розв'язання задач лінійної оптимізації, детально розглянуто в рекомендованій літературі [1 – 4]. Вихідні данні для виконання розрахунків наведені в табл. 2.1.

2.2 Вихідні дані

Номер варіанта розрахунку, наведеного в таблиці 2.1, дорівнює сумі останніх двох цифр номера залікової книжки студента.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані

№ вар	Номер палива	Ціна палива ($Ц_i$), ум. од.	Теплота згоряння палива (Q_i), МДж/кг	Зміст золи (A_i), %	Зміст сірки (S_i), %	Частка палива у суміші, x_i
1	1	16	18	1,8	0,04	x_1
	2	20	22,5	0	0,01	x_2
	3	8	9	0,9	0,02	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=13,5	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
2	1	12	9	0,9	0,02	x_1
	2	16	18	1,8	0,04	x_2
	3	20	22,5	0	0,01	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$= 13,5	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$

Продовження табл. 2.1

№ вар	Номер палива	Ціна палива ($Ц_i$), ум. од.	Теплота згоряння палива (Q_i), МДж/кг	Зміст золи (A_i), %	Зміст сірки (S_i), %	Частка палива у суміші, x_i
3	1	20	22	1,8	0,04	x_1
	2	10	11	0,9	0,02	x_2
	3	25	27,5	0	0,01	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$= 16,5	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
4	1	9	10	0,9	0,02	x1
	2	22,5	25	0	0,01	x2
	3	18	20	1,8	0,04	x3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=15	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
5	1	20	22	1,8	0,04	x_1
	2	25	27,5	0	0,01	x_2
	3	10	11	0,9	0,02	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=16,5	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
6	1	22	24	1,8	0,04	x_1
	2	11	12	0,9	0,02	x_2
	3	27,5	30	0	0,01	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=18	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
7	1	8	9	0,9	0,02	x_1
	2	16	18	1,8	0,04	x_2
	3	20	22,5	0	0,01	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=13,5	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
8	1	16	18	1,8	0,04	x_1
	2	20	22,5	0	0,01	x_2
	3	12	9	0,9	0,02	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=13,5	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
9	1	18	20	1,8	0,04	x_1
	2	9	10	0,9	0,02	x_2
	3	22,5	25	0	0,01	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=15	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
10	1	10	11	0,9	0,02	x_1
	2	25	27,5	0	0,01	x_2
	3	20	22	1,8	0,04	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=16,5	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$

Продовження табл. 2.1

№ вар	Номер палива	Ціна палива ($Ц_i$), ум. од.	Теплота згоряння палива (Q_i), МДж/кг	Зміст золи (A_i), %	Зміст сірки (S_i), %	Частка палива у суміші, x_i
11	1	18	20	1,8	0,04	x_1
	2	22,5	25	0	0,01	x_2
	3	13,5	10	0,9	0,02	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=15	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
12	1	22	24	1,8	0,04	x_1
	2	16,5	12	0,9	0,02	x_2
	3	27,5	30	0	0,01	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=18	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
13	1	13,5	10	0,9	0,02	x1
	2	22,5	25	0	0,01	x2
	3	18	20	1,8	0,04	x3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=15	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
14	1	15	11	0,9	0,02	x_1
	2	20	22	1,8	0,04	x_2
	3	25	27,5	0	0,01	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=16,5	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
15	1	20	22	1,8	0,04	x_1
	2	25	27,5	0	0,01	x_2
	3	15	11	0,9	0,02	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=16,5	$A_{доп} \leq 0,9$	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
16	1	8	9	0,9	0,02	x_1
	2	20	22,5	0	0,01	x_2
	3	16	18	1,8	0,04	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=13,5	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
17	1	22	24	1,8	0,04	x_1
	2	27,5	30	0	0,01	x_2
	3	16,5	12	0,9	0,02	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=18	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$
18	1	11	12	0,9	0,02	x_1
	2	22	24	1,8	0,04	x_2
	3	27,5	30	0	0,01	x_3
	Параметри суміші		$Q_{доп}$=18	$A_{доп}$=0,9	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$

2.3 Приклад виконання завдання

2.3.1 Математична постановка задачі

У сформульованій в пункті 2.1 задачі критерієм оптимальності є ціна паливної суміші ($Ц_{сум}$), а керуючими чинниками - частки палив в суміші (x_1, x_2, x_3). Математична постановка задачі включає цільову функцію, що зв'язує критерій оптимальності з керуючими факторами:

$$Ц_{сум} = Ц_1 \cdot x_1 + Ц_2 \cdot x_2 + Ц_3 \cdot x_3 = \min \text{, ум.од.} \tag{2.1}$$

і систему обмежень, згідно з якими керуючі фактори повинні задовольняти наступним умовам, зображеним у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} Q_1 \cdot x_1 + Q_2 \cdot x_2 + Q_3 \cdot x_3 \geq Q_{доп}; & (2.2) \\ A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 \leq A_{доп}; & (2.3) \\ S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 + S_3 \cdot x_3 \leq S_{доп}. & (2.4) \end{cases}$$

Тут Q_1, Q_2, Q_3 – відповідно, теплота згоряння 1-го, 2-го и 3-го палив, що входять до суміши, МДж/кг; $A_1, A_2, A_3, S_1, S_2, S_3$ – вміст золи та сірки в і-ому паливі, %; $Q_{доп}, A_{доп}, S_{доп}$ – задані мінімально допустиме значення теплоти згорання паливної суміші і максимально допустимі значення вмісту в паливній суміші золи та сірки.

Також постановка задачі повинна бути доповнена рівністю суми часток палив, що входять до суміші, одиниці:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \tag{2.5}$$

і обмеженням, згідно з яким частка палива в суміші не може набувати значення менше 0 і більше 1:

$$0 \leq x_i \leq 1, \qquad \{i = 1, 2, 3\}. \tag{2.6}$$

Розглянемо рішення задачі для вихідних даних, наведених у табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Вихідні дані. Варіант розрахунку № 19

№ палива	Ціна палива ($Ц_i$), ум. од.	Теплота згоряння палива (Q_i), МДж/кг	Зміст, %		Частка палива у суміші, x_i
			золи (A_i)	сірки (S_i)	
1	12	25	0	0,01	x_1
2	8	20	4	0,04	x_2
3	4	10	2	0,02	x_3
Параметри паливної суміші		$Q_{доп}$=15	$A_{доп}$=2	$S_{доп}$=0,02	$x_1+x_2+x_3=1$

2.3.2 Графічний метод розв’язання задачі.

В постановці задачі присутні три керуючих фактора. Для застосування графічного методу необхідно зменшити кількість невідомих керуючих факторів до двох. Для цього використовуємо обмеження (2.5).

Виразимо з рівняння (2.5) один з керуючих факторів, наприклад x_3:

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2. \tag{2.7}$$

Підставимо в рівняння (2.1) замість керуючого фактора x_3 рівняння (2.7) і значення цін палива, що відповідають прийнятим вихідним даним:

$$Ц_{сум} = Ц_1 \cdot x_1 + Ц_2 \cdot x_2 + Ц_3 \cdot (1 - x_1 - x_2) = \min;$$

$$Ц_{сум} = Ц_1 \cdot x_1 + Ц_2 \cdot x_2 + Ц_3 - Ц_3 \cdot x_1 - Ц_3 \cdot x_2 = \min;$$

$$Ц_{сум} - Ц_3 = (Ц_1 - Ц_3) \cdot x_1 + (Ц_2 - Ц_3) \cdot x_2 = \min.$$

$$Ц_{сум} - Ц_3 = (12 - 4) \cdot x_1 + (8 - 4) \cdot x_2 = \min.$$

Розділимо обидві частини отриманого рівняння на 4 і отримаємо вираз для перетвореної цільової функції:

$$У = \frac{Ц_{сум} - Ц_3}{4} = 2 \cdot x_1 + x_2 = \min. \qquad (2.1')$$

Зробимо аналогічні перетворення з рівнянням (2.2):

$$Q_1 \cdot x_1 + Q_2 \cdot x_2 + Q_3 \cdot (1 - x_1 - x_2) \geq Q_{доп};$$

$$(Q_1 - Q_3) \cdot x_1 + (Q_2 - Q_3) \cdot x_2 + Q_3 \geq Q_{доп};$$

$$(25 - 10) \cdot x_1 + (20 - 10) \cdot x_2 + 10 \geq 15;$$

$$\frac{15}{5} \cdot x_1 + \frac{10}{5} \cdot x_2 + \frac{10}{5} \geq \frac{15}{5};$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \geq 3;$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 1. \qquad (2.2')$$

Для рівнянь (2.3) та (2.4) після перетворень отримаємо:

$$-x_1 + x_2 \leq 0; \qquad (2.3')$$

$$-x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 0. \qquad (2.4')$$

Оскільки частка третього палива, що входить до суміші, величина не від’ємна і менша одиниці, то рівність (2.5) перетворимо в нерівність:

$$x_1 + x_2 \leq 1 \qquad (2.5')$$

Таким чином, математичне формулювання задачі приймає вигляд:

$$У = 2 \cdot x_1 + x_2 = \min; \tag{2.1'}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 1; & (2.2') \\ -x_1 + x_2 \leq 0; & (2.3') \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 0; & (2.4') \\ x_1 + x_2 \leq 1; & (2.5') \\ 0 \leq x_i \leq 1, \ \text{для} \ \ i = 1, 2. & (2.6') \end{cases}$$

Тепер у постановці задачі залишилися тільки два керуючих фактора (x_1, x_2) і її можна розв'язувати графічним методом.

На першому етапі розв'язання задачі побудуємо на факторній площині область допустимих значень керуючих факторів, використовуючи обмеження (2.2') – (2.6').

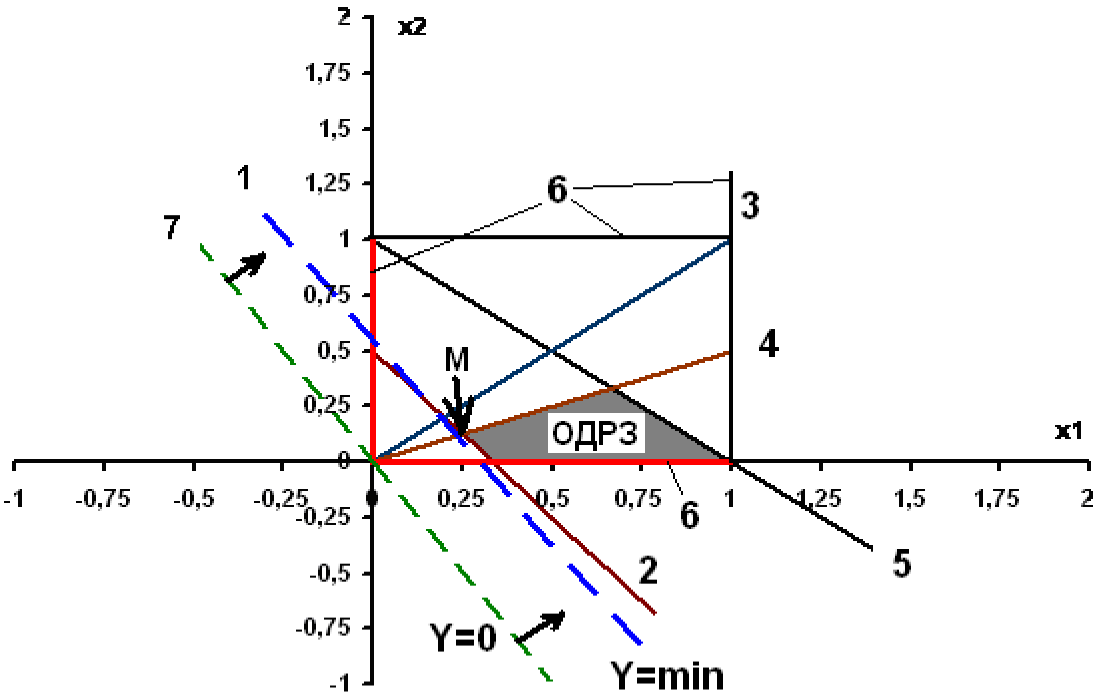

Рисунок – 2.1. Розв'язання задачі графічним методом

З обмеження (2.5’) отримаємо: $x_2 \le 1 - x_1$. Використовуючи цю нерівність, побудуємо пряму (2.5) на факторній площині. Задаємо значення змінної $x_1 = 0$, тоді $x_2 \le 1$. При $x_1 = 1$ змінна $x_2 \le 0$. Наносимо значення знайдених точок на графік (див. рис. 2.1), з’єднуємо їх прямою і обмежуємо область зміни керуючих факторів, що задовольняють нерівності (2.5’), всіма точками, що лежать на прямій 5 або нижче неї.

З обмеження (2.2’) отримаємо: $x_2 \ge \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot x_1$. При $x_1 = \frac{1}{3}$ змінна $x_2 \ge 0$; при $x_1 = 0$ змінна $x_2 \ge \frac{1}{2}$. По двох точках будуємо пряму і обмежуємо область зміни керуючих факторів x_1 та x_2, що задовольняють нерівності (2.2’), всіма точками, що лежать на прямій 2 або вище неї.

З обмеження (2.3’): $x_2 \le x_1$. Тоді при $x_1 = 0$ змінна $x_2 \le 0$, а при $x_1 = 1$, $x_2 \le 1$. Будуємо пряму 3 і обмежуємо область зміни керуючих факторів x_1 и x_2, що задовольняють нерівності (2.3’), всіма точками, що лежать на прямій 3 або нижче неї.

З обмеження (2.4’): $x_2 \le \frac{1}{2} \cdot x_1$. При $x_1 = 0$, $x_2 \le 0$; при $x_1 = 1$, $x_2 \le \frac{1}{2}$. Будуємо пряму 4 і обмежуємо область зміни керуючих факторів x_1 та x_2, що задовольняють нерівності (2.4’), всіма точками, що лежать на прямій 4 або нижче неї.

Для закінчення побудов використовуємо також нерівності (2.6).

Далі визначаємо область допустимих розв’язків задачі (ОДРЗ) на факторній площині, що задовольняє всім розглянутим обмеженням (2.2’) – (2.6’). Координати будь-якої точки, що лежить в межах ОДРЗ, є допустимим розв’язком задачі.

На другому етапі розв’язання задачі з множини допустимих розв’язків вибирають той, який є оптимальним. Для цього використовують цільову функцію (2.1’).

Визначимо значення x_1 и x_2 при яких:

$$У = 2 \cdot x_1 + x_2 = \min. \tag{2.1’}$$

З (2.1’) виразимо змінну x_2:

$$x_2 = У - 2 \cdot x_1.$$

Приймаємо У = 0.

Отримаємо:

$$x_2 = -2 \cdot x_1. \tag{2.7}$$

Побудуємо пряму на факторній площині, яка відповідає рівнянню (2.7).

Отримаємо: при $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; при $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -1$.

Пряма 7 для випадку, коли критерій оптимальності У = 0, не має спільних точок з ОДРЗ, тому такий результат є не досяжним.

При збільшенні критерію оптимальності У пряма 7 буде переміщатися паралельно самій собі вгору, в бік ОДРЗ.

Пряма 1, що відповідає випадку, коли критерій оптимальності досягає свого мінімального значення (У = min) перетинає ОДРЗ в точці М. Координати цієї точки М є розв'язком поставленої задачі оптимізації і можуть бути визначені з графіка, або шляхом розв'язку системи рівнянь (2.2') і (2.4').

Розв'язуючи спільно рівняння (2.2') і (2.4'), отримаємо оптимальні значення управляючих x_1 та x_2: $x_1^{опт} = \frac{1}{4}$, $x_2^{опт} = \frac{1}{8}$.

Оптимальне значення третього керуючого чинника визначається з рівняння (2.7):

$$x_3^{опт} = 1 - x_1^{опт} - x_2^{опт} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Якби за умовою задачі суміш складалася не з трьох, а з більшого числа палив, то розмірність цієї задачі не вдалося б знизити до двох керуючих факторів, і розв'язати задачу графічним методом було б не можливо.

2.3.3 Симплексний алгоритм розв'язання задач лінійного програмування

Розглянемо розв'язання задачі з використанням симплексного алгоритму.

Математичне формулювання попередньої задачі в перетвореній формі має вигляд:

$$У = 2 \cdot x_1 + x_2 = \min; \tag{2.1'}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 1; & (2.2') \\ -x_1 + x_2 \leq 0; & (2.3') \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 0; & (2.4') \\ x_1 + x_2 \leq 1; & (2.5') \\ 0 \leq x_i \leq 1, \text{ для } \; i = 1, 2. & (2.6') \end{cases}$$

Для розв'язання задачі цим методом математичне формулювання задачі приводять до канонічного виду: всі обмеження (2.2') – (2.4'), представлені у вигляді нерівностей замінюють рівностями, використовуючи для цього додаткові невід'ємні змінні x_4, x_5 і x_6, а рівняння (2.5') перетворюють в рівняння (2.5). Таким чином, математична постановка задачі приймає вигляд:

$$У = 2 \cdot x_1 + x_2 = \min; \tag{2.1''}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_4 = 1; & (2.2'') \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 0; & (2.3'') \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 + x_6 = 0; & (2.4'') \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; & (2.5'') \\ 0 \leq x_i \leq 1, \text{ для } \; i = 1, 2, \ldots, 6. & (2.6'') \end{cases}$$

Як і при застосуванні графічного методу, процес розв’язання задачі поділяється на два етапи. На першому етапі використовуються обмеження (2.2’’) – (2.5’’) з урахуванням умови (2.6’’). Мета першого етапу розв’язання задачі полягає в отриманні будь-якого припустимого розв’язку системи рівнянь (2.2’’) – (2.5’’). Допустимим розв’язком буде такий розв’язок цих рівнянь, який не порушує умови (2.6’’)

Система (2.2’’) – (2.5’’) містить 4 рівняння і 6 невідомих змінних (керуючих факторів). Для її розв’язання необхідно задати значення будь-яких двох керуючих факторів, а інші керуючі фактори визначити шляхом розв’язання системи (2.2’’) – (2.5’’). Змінні, значення яких задають, називаються вільними змінними. Інші змінні, значення яких знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь – змінними, що визначаються.

Приймемо в якості вільних змінних x_1 і x_2. Для зручності обчислень обираємо їх значення дорівнюючими 0. Тоді з системи рівнянь (2.2’’) – (2.5’’) знайдемо перший розв’язок задачі (див. табл. 2.3).

Таблиця 2.3 – Перший розв’язок задачі

Керуючий фактор	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Значення керуючого фактора	0	0	1	-1	0	0

Перший розв’язок не є допустимим, тому що він порушує обмеження (2.6’’), оскільки четвертий керуючий фактор $x_4 < 0$.

Щоб перейти до наступного розв’язку переведемо x_4 у вільні змінні і прирівняємо її до нуля. На місце x_4 в змінні, що визначаються, потрібно перевести одну із змінних: x_1 або x_2.

Слід зазначити, що якщо у першому розв’язку не одна, а декілька змінних виявилися б від’ємними, то переводити їх у вільні змінні потрібно було б не одночасно, а по одній.

У розглянутому прикладі змінними, що визначаються, можна зробити як x_1, так і x_2, оскільки з рівняння (2.2’’) видно, що в обох випадках отримаємо невід’ємні допустимі значення змінних, що визначаються.

Якби в рівнянні (2.2’’) коефіцієнт при x_1 або x_2 був невід’ємним, то таку змінну було б недоцільно робити змінною, що визначається, тому що отриманий розв’язок був би свідомо неприпустимим.

Якщо ж обидва коефіцієнта при x_1 і x_2 в рівнянні (2.2’’) були б невід’ємні, то це означало б, що поставлена задача взагалі не має допустимого розв’язка, тобто накладені на керуючі фактори обмеження не можуть бути виконані.

Продовжимо розв'язання задачі і для отримання другого розв’язку переведемо x_1 в змінні, що визначаються, а вільними змінними приймемо $x_2 = x_4 = 0$.

Виразимо всі змінні, що визначаються, через нові вільні змінні x_2 і x_4. З рівняння (2.2’’) отримаємо:

$$x_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \cdot x_4. \qquad (2.2’’’)$$

Підставимо (2.2’’’) в рівняння (2.3”), (2.4”) і (2.5”).

З (2.3’’): $x_5 = x_1 - x_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \cdot x_4 - x_2 = \frac{1}{3} - 1\frac{2}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \cdot x_4.$ (2.3’’’)

З (2.4’’): $x_6 = x_1 - 2 \cdot x_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \cdot x_4 - 2 \cdot x_2 = \frac{1}{3} - 2\frac{2}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \cdot x_4.$ (2.4’’’)

З (2.5’’): $x_3 = 1 - x_1 - x_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot x_2 - \frac{1}{3} \cdot x_4 - x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot x_2 - \frac{1}{3} \cdot x_4.$ (2.5’’’)

Другий розв’язок задачі наведено в табл. 2.4.

Таблиця 2.4 – Другий розв’язок задачі

Керуючий фактор	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Значення керуючого фактора	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Оскільки умова (2.6’’) виконується, то другий розв’язок задачі є допустимим.

На другому етапі розглядаються тільки допустимі розв’язки, і кожний з них перевіряється на оптимальність. Для цього використовують цільову функцію (2.1’’).

Перевіримо, чи є оптимальним допустимий розв'язок № 2. Для цього критерій оптимальності У необхідно виразити через змінні x_2 і x_4, які були прийняті вільними при отриманні другого розв'язку задачі. Підставимо в (2.1'') рівняння (2.2''').

Отримаємо:

$$У = 2 \cdot x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \cdot x_4 \right) + x_2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cdot x_2 + \frac{2}{3} \cdot x_4 + x_2 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot x_2 + \frac{2}{3} \cdot x_4 . \qquad (2.8)$$

Проаналізуємо отримане рівняння (2.8).

У другому розв'язку задачі змінна $x_4 = 0$. У будь-якому іншому допустимому розв'язку, де x_4 буде змінною, що визначається, її значення може виявитися більше 0. При цьому критерій оптимальності (див. рівняння 2.8) буде зростати, що суперечить постановці задачі оптимізації. Тому значення $x_4 = 0$ є найкращим значенням для змінної x_4, і вона повинна залишатися вільною і рівною нулю.

Змінна $x_2 = 0$. При цьому в будь-якому іншому допустимому розв'язку задачі, де x_2 може виявитися змінною, що визначається, її значення може виявитися більше 0, що буде призводити до зменшення величини критерію оптимальності У. Оскільки за умовою задачі критерій оптимальності повинен досягати свого мінімального значення, то значення змінної $x_2 = 0$ не забезпечує досягнення мінімуму цільової функції і другий розв'язок задачі не є оптимальним.

Для отримання оптимального розв'язку переведемо змінну x_2 у вільні змінні. Для вибору нової вільної змінної визначимо значення змінної x_2, якщо замість неї у вільні змінні по черзі перевести кожну зі змінних, що визначались у другому (допустимому) розв'язку задачі: x_1 , x_3, x_5 і x_6.

З (2.2''): $x_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \cdot x_4 .$

Якщо $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, то $0 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot x_2$, $\frac{2}{3} \cdot x_2 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

З (2.3’’): $x_5 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \cdot x_4$.

Якщо $x_5 = x_4 = 0$, $\frac{1}{3} = \frac{5}{3} \cdot x_2$, $x_2 = \frac{1}{5}$.

З (2.4’’): $x_6 = \frac{1}{3} - 2\frac{2}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \cdot x_4$.

Якщо $x_6 = x_4 = 0$, то $\frac{1}{3} = \frac{8}{3} \cdot x_2$, $x_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$.

З (2.5’’): $x_3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot x_2 - \frac{1}{3} \cdot x_4$.

Якщо $x_3 = x_4 = 0$, то $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot x_2$, $x_2 = 2$.

Проаналізуємо отримані результати. З метою визначення на наступному етапі допустимого розв’язку задачі, для переведення в вільні змінні вибираємо той керуючий фактор, для якого значення змінної x_2 приймає найменше невід'ємне значення. У розглянутому прикладі найменше невід'ємне значення змінної x_2 забезпечує переведення у вільні змінні керуючого фактора x_6.

Приймаємо значення вільних змінних: $x_4 = x_6 = 0$ і знову розв’язуємо систему рівнянь (2.2’’) – (2.5’’).

З (4’’’): $x_6 = \frac{1}{3} - 2\frac{2}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \cdot x_4$ виразимо x_2:

$$x_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot x_4 - \frac{3}{8} \cdot x_6. \qquad (2.9)$$

Підставимо (2.9) в (2.2’’), (2.3’’) і (2.5’’). Отримаємо:

$$x_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x_4 + \frac{1}{4} \cdot x_6; \qquad (2.10)$$

$$x_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot x_4 - \frac{3}{8} \cdot x_6; \qquad (2.11)$$

$$x_3 = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} \cdot x_4 + \frac{3}{8} \cdot x_6; \qquad (2.12)$$

$$x_5 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot x_4 + \frac{5}{8} \cdot x_6. \qquad (2.13)$$

Представимо третій розв'язок задачі у вигляді табл. 2.5.

Таблиця 2.5 – Третій розв'язок задачі

Керуючий фактор	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Значення керуючого фактора	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0

Як видно з табл. 2.5 цей розв'язок задачі є допустимим оскільки задовольняє умові (2.6''). Перевіримо розв'язок на оптимальність. Для цього виразимо критерій оптимальності У через вільні змінні x_4 і x_6, підставивши в цільову функцію (2.1'') рівняння (2.10) і (2.11):

$$У = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x_4 + \frac{1}{4} \cdot x_6\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot x_4 - \frac{3}{8} \cdot x_6\right) = \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot x_4 + \frac{1}{8} \cdot x_6. \qquad (2.12)$$

Оскільки коефіцієнти при x_4 і x_6 додатні, то рівність нулю цих змінних забезпечує мінімум критерію оптимальності. Таким чином, третій розв'язок задачі є допустимим і оптимальним.

Слід зазначити, якщо після перетворення цільової функції один з коефіцієнтів, які стоять при вільних змінних, виявився б рівним 0, то це свідчило б про те, що задача має не один, а безліч рівноцінних розв'язків.

Остаточна відповідь: оптимальний склад паливної суміші забезпечується, при наступних значеннях часток палив, що складають суміш: $x_1^{опт} = \frac{1}{4}$; $x_2^{опт} = \frac{1}{8}$; $x_3^{опт} = \frac{5}{8}$.

Отримані результати збігаються з результатами розв'язку задачі, який було отримано графічним методом.

Мінімальна ціна паливної суміші розраховується за формулою (2.1):

$$Ц_{сум\_min} = Ц_1 \cdot x_1^{опт} + Ц_2 \cdot x_2^{опт} + Ц_3 \cdot x_3^{опт} = 12 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{5}{8} = 6{,}5 \text{ ум.од.}$$

2.3.4 Перевірка отриманих результатів

Перевірка результатів розрахунків виконується за допомогою пакета прикладних програм. Приклад перевірки розв'язку задачі приведено на рис. 2.2.

Цільова функція: $Y(x1, x2, x3) := 12 \cdot x1 + 8 \cdot x2 + 4 \cdot x3$

Приймаємо значення часток палив в суміші у першому наближенні:

$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0$

Система обмежень: Given

$25 \cdot x1 + 20 \cdot x2 + 10 \cdot x3 \geq 15$

$0 \cdot x1 + 4 \cdot x2 + 2 \cdot x3 \leq 2$

$0.01 \cdot x1 + 0.04 \cdot x2 + 0.02 \cdot x3 \leq 0.02$

$x1 + x2 + x3 = 1$

$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0 \quad x3 \geq 0$

$x1 \leq 1 \quad x2 \leq 1 \quad x3 \leq 1$

Розвязання задачі з використанням стандартних функцій пакета прикладних програм:

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} := \text{Minimize}(Y, x1, x2, x3)$$

Розв'язок задачі.
Оптимальні частки палив в суміші:

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.125 \\ 0.625 \end{pmatrix}$$

Мінімальна ціна паливної суміші: $Y(x1, x2, x3) = 6.5$

Рисунок 2.2 – Розв'язок задачі за допомогою пакета прикладних програм

ЗМІСТ