МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

РОБОЧА ПРОГРАМА,
методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів напряму 6.051002 – метрологія, стандартизація та сертифікація

Частина 3

Затверджено
на засіданні Вченої ради
академії
Протокол № 1 від 27.01.2014

Дніпропетровськ НМетАУ 2014

УДК 517(07)
Робоча програма, методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів напряму 6.051002 – метрологія, стандартизація та сертифікація. У 3-х частинах. Частина 3 / Укл.: А.В. Павленко, В.Л. Копорулін, Л.П. Кагадій, Л.В. Моссаковська. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2014. – 78 с.

Наведені робоча програма до вивчення дисципліни «Вища математика» у IV семестрі, список рекомендованої літератури, методичні вказівки, супроводжені розв'язанням типових прикладів з докладними поясненнями, та варіанти контрольних завдань.

Призначена для студентів другого курсу напряму 6.051002 – метрологія, стандартизація та сертифікація заочної форми навчання.

Друкується за авторською редакцією

Укладачі: А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.
Л.П. Кагадій, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Л.В. Моссаковська, ст. викл.

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент О.О. Сдвижкова, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)

Підписано до друку 15.05.2014. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 4,59. Умов. друк. арк. 4,52. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

ЗМІСТ

ВСТУП 3
РОБОЧА ПРОГРАМА (IV семестр) 4
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА 6
КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ 8
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 7 8
Методичні вказівки до виконання. 8
Індивідуальні завдання. 30
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 8 38
Методичні вказівки до виконання. 38
Індивідуальні завдання. 57
ВИМОГИ до оформлення контрольної роботи, її подання і перевірка 67
ДОДАТКИ. 68

ВСТУП

Вища математика без перебільшення є однією з найважливіших складових практично усіх природознавчих і технічних дисциплін. Тому її вивчення вкрай важливе для фундаментальної фахової підготовки сучасного інженера.

Лекції і практичні заняття, які проводяться для студентів заочної форми навчання, носять переважно оглядовий характер. Їх мета – створити уяву щодо загальної схеми побудови даного розділу математики, ознайомити з основними теоретичними відомостями і методами розв’язання типових задач. Головною ж формою навчання студента-заочника є самостійна робота. Вивчення теоретичних положень доцільно супроводжувати самостійним розв’язанням відповідних задач і лише після вироблення достатніх практичних навичок приступати до виконання завдань контрольної роботи. Необхідні консультації протягом навчального семестру надаються викладачами академії згідно із затвердженим розкладом.

Сьогодні в Інтернеті неважко знайти величезну кількість літератури з будь-якої теми, в тому числі і з вищої математики. Тому до списку рекомендованої літератури увійшли лише деякі з найбільш уживаних на думку авторів джерел. Рекомендації щодо їх використання дані у методичних вказівках до виконання кожної контрольної роботи. Консультації відносно інших підручників студент може отримати у викладача.

Р О Б О Ч А П Р О Г Р А М А
навчальної дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

IV семестр

Розподіл навчальних годин

Кількість годин					Кількість контр. робіт	Форма звітності
УСЬОГО	Аудиторних занять			Самостійної роботи		
	Усього	Лекцій	Практичних занять			
162	**20**	**8**	**12**	**142**	**2**	**екзамен**

Зміст програми

15. Аналіз скалярних та векторних полів

57. Основні поняття теорії поля: поле, скалярне і векторне, стаціонарне і нестаціонарне, плоске і просторове поля.

58. Скалярне поле: поверхні і лінії рівня, похідна за напрямком, градієнт та його властивості.

59. Векторне поле: векторні лінії, дивергенція (розбіжність) векторного поля та її властивості, соленоїдне поле, ротор (вихор) та його властивості, безвихрове і потенціальне поля.

60. Оператор Гамільтона, запис за його допомогою векторних операцій першого порядку. Векторні операції другого порядку. Оператор і рівняння Лапласа. Гармонічні функції. Гармонічне (лапласове) векторне поле.

16. Функції комплексної змінної

61. Поняття функції комплексної змінної та його геометричний зміст. Основні елементарні функції. Границя і неперервність функції комплексної змінної.

62. Похідна і диференціал. Умови Коші-Рімана. Поняття аналітичної функції. Особливі точки. Гармонічні функції та їх зв'язок з аналітичними.

63. Інтеграл від функції комплексної змінної. Інтегральна теорема Коші. Невизначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца. Інтегральна формула Коші.

64. Числові ряди. Ряди функцій комплексної змінної. Степеневі ряди, їх властивості. Розвинення аналітичних функцій в ряди Тейлора і Лорана.

65. Нулі аналітичної функції. Теорема єдиності. Класифікація ізольованих особливих точок однозначного характеру. Визначення типу особливої точки.

66. Лишок аналітичної функції у скінченній особливій точці, його обчислення. Основна теорема про лишки. Застосування лишків до обчислення інтегралів.

17. Операційне числення

67. Перетворення Лапласа: основні поняття і означення. Властивості перетворення Лапласа та їх застосування. Таблиця зображень деяких основних функцій.

68. Способи відновлення оригінала за зображенням. Розв'язання задач Коші для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і систем таких рівнянь операційним методом.

18. Теорія ймовірностей

69. Елементи комбінаторики: переставлення, розміщення, сполучення, загальні правила.

70. Основні поняття теорії ймовірностей: випадкові події, їх види та дії над ними, ймовірність випадкової події. Класична ймовірність. Статистична та геометрична ймовірності.

71. Умовна ймовірність. Теореми додавання і множення ймовірностей. Формула повної ймовірності. Ймовірності гіпотез. Формули Байєса.

72. Повторення незалежних випробувань: біноміальна формула Бернуллі, локальна формула Муавра-Лапласа, формула Пуассона, інтегральна формула Муавра-Лапласа.

73. Одновимірні випадкові величини, їх типи. Закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин: ряд та многокутник розподілу, інтегральна та диференціальна функції розподілу.

74. Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

75. Деякі найважливіші закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин: геометричний, біномний, Пуассона, рівномірний, показниковий. Нормальний розподіл (закон Гаусса) і пов’язані з ним розподіли Пірсона, Стьюдента, Фішера – Снедекора.

20. Математична статистика

76. Предмет і задачі математичної статистики. Генеральна та вибіркова сукупності. Види вибірок. Простий випадковий вибір, види реальних виборів.

77. Варіаційний ряд. Дискретний та інтервальний (групований) статистичні розподіли вибірки. Полігон і гістограма частот (відносних частот).

78. Емпірична (вибіркова) функція розподілу та її властивості.

79. Вибіркова оцінка генеральної числової характеристики. Числові характеристики вибірки: вибіркові середня, моменти, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

80. Статистичне оцінювання параметрів розподілу. Точкове і інтервальне оцінювання. Вимоги до точкових оцінок: незміщеність, спроможність, ефективність. Точкове оцінювання генеральних числових характеристик за відповідними вибірковими. Властивості вибіркової середньої і вибіркової дисперсії. Виправлена вибіркова дисперсія. Умовні та рівновіддалені варіанти. Зведення первинних варіант до рівновіддалених.

81. Інтервальне оцінювання числових характеристик і параметрів розподілу генеральної сукупності. Довірчий інтервал, точність і надійність (довірча ймовірність) оцінки, рівень значущості. Інтервальне оцінювання числових характеристик нормального розподілу.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

ПІДРУЧНИКИ І НАВЧАЛЬНІ ПОСІБНИКИ

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.

2. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 228 с.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 479 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями: Учеб. пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 176 с.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.
8. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / В.И. Афанасьев и др.; под ред. А.И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.
9. Эйдерман В.Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

ЗБІРНИКИ ЗАДАЧ

10. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 405 с.
11. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу и др.; под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.
12. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 3: Учеб. пособие для втузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 576 с.
13. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 4: Учеб. пособие для втузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Виконання кожної контрольної роботи треба починати з вивчення теоретичних положень за наведеними посиланнями, причому це необхідно поєднувати з самостійним розв'язанням рекомендованих задач. До виконання контрольних завдань доцільно приступати тільки після вироблення достатніх практичних навичок. Типові приклади наведені з метою допомогти в цьому. Вони перенумеровані наступним чином: перша цифра означає порядковий номер контрольної роботи, друга цифра – порядковий номер прикладу. Рисунки мають аналогічну нумерацію.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 7

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

Рекомендується (скориставшись одним або двома з наведених нижче джерел)

– вивчити теоретичні положення за **[2]**, гл. 6; **[6]**, гл. XVI-XVIII; **[9]**, гл. I-III, V-VIII;
– розібрати розв'язання задач у **[4]**, гл. VII, §§ 1-2, 4-6, гл. VIII, §§ 1-4; **[5]**, гл. 1, § 1, пр. 1-24, § 2, пр. 1-3, § 4; **[8]**, гл. 1, §§ 1.1-1.16, гл. 2; **[9]**, гл. IX, § 33;
– самостійно розв'язати задачі: **[4]**, №№ 1019, 1039, 1040, 1067, 1068, 1086, 1098, 1104, 1105, 1112, 1118, 1125, 1126, 1143, 1146, 1148, 1149; **[11]**, №№ <u>5.1.2</u>-6, <u>5.2.</u>5-6, 27-30, <u>5.5.</u>3-6, 31-33, <u>7.1.</u>2-19, <u>7.2.</u>5-16, <u>7.3.</u>9-10, <u>7.5.</u>37-38, <u>8.1.</u>2, 3, 6, 8, 10, 13, 23-31, 43, 54, 61, 62, 64, 67, <u>8.2.</u>2-7, 10, 12-а,б, 13, 14, <u>8.3.</u>4, 5, 9, 17, 38, 48, 49; **[12]**, гл. 11, №№ 32, 95, 96-98, 110, 114, 143-146, гл. 12, №№ 218, 219, 236, 238, 239, 246, 433-435, гл. 13, №№ 20-25, 27-28, 42-44, 53-58, 62-66, 112-117, 233-236, 257-259, гл. 14, №№ 1-9, 17, 18, 19, 25, 32, 34, 40, 44, 45, 47, 48, 74 -76, 79, 86,87, 93, 94, 111, 113, 114, 131.

<u>Приклад 7.1.</u> Знайти швидкість зміни скалярного поля $\boldsymbol{u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z}$ в точці $\boldsymbol{M_0(1, 3, 2)}$ за напрямком до точки $\boldsymbol{M_1(0, 5, 0)}$.

Розв'язання. Швидкість зміни скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ за напрямком вектора $\vec{s} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ визначається формулою $\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma$.

Обчислимо спочатку відповідні значення частинних похідних:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\left(-\frac{2x}{3-x^2} + y^2 z\right)\right|_{x=1,\, y=3,\, z=2} = -1 + 18 = 17,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.2xyz\right|_{x=1,\, y=3,\, z=2} = 12, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.xy^2\right|_{x=1,\, y=3,\, z=2} = 9.$$

В даному випадку $\vec{s} = \overrightarrow{M_0M_1}$. Обчислимо напрямні косинуси цього вектора:

$$\left|\vec{s}\right| = \sqrt{(0-1)^2 + (5-3)^2 + (0-2)^2} = 3 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Отже, $\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_0} = -\frac{17}{3} + \frac{24}{3} - \frac{18}{3} = -\frac{11}{3}$. Оскільки $\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_0} < 0$, то поле у даному напрямку спадає.

<u>**Приклад 7.2.**</u> Визначити напрямок та величину найбільшої швидкості зростання поля $u = x^2yz - xy^2z + xyz^2$ в точці $M_0(1, 1, 1)$.

Розв'язання. Напрямок найшвидшого зростання поля в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ співпадає з напрямком градієнта цього поля в даній точці:

$$\left.grad\, u\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\vec{k}.$$

Швидкість цього зростання є

$$\max\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_0} = \left.\left|grad\, u\right|\right|_{M_0} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\right)^2}.$$

Обчислимо відповідні значення частинних похідних:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.(2xyz - y^2z + yz^2)\right|_{x=1,\, y=1,\, z=1} = 2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.(x^2z - 2xyz + xz^2)\right|_{x=1,\, y=1,\, z=1} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (x^2y - xy^2 + 2xyz)\Big|_{x=1,\, y=1,\, z=1} = 2\,.$$

Отже, $\left. grad\, u \right|_{(1,\,1,\,1)} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$,

$$\max\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{(1,\,1,\,1)} = \left|grad\, u\right|\Big|_{(1,\,1,\,1)} = \sqrt{2^2+0^2+2^2} = 2\sqrt{2}\,.$$

<u>**Приклад 7.3.**</u> Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{a} = xe^{yz}\,\vec{i} + ye^{xz}\,\vec{j} - ze^{xy}\,\vec{k}$ і обчислити її в точках $M_1(1,\,1,\,1)$ й $M_2(1,\,1,\,-1)$.

Розв'язання. Дивергенцією (або *розбіжністю*) векторного поля

$$\vec{a} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$

називається вектор

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,.$$

Отже, $div\,\vec{a} = e^{yz} + e^{xz} - e^{xy}$.

В точці $M_1(1,\,1,\,1)$ $\left. div\,\vec{a}\right|_{M_1} = e + e - e = e > 0$, тобто M_1 – точка витоку.

В точці $M_2(1,\,1,\,-1)$ $\left. div\,\vec{a}\right|_{M_2} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} - e = \frac{2}{e} - e < 0$, тобто M_2 – точка стоку.

<u>**Приклад 7.4.**</u> З'ясувати, чи буде соленоїдним векторне поле

$$\vec{a} = x^2yz\,\vec{i} - xy^2z\,\vec{j} + arctg\sqrt{xy}\,\vec{k}\,.$$

Розв'язання. Векторне поле $\vec{a}$ називається *соленоїдним* (або *трубчатим*), якщо в кожній його точці дивергенція дорівнює нулю: $div\,\vec{a} = 0$. Соленоїдне поле не має ані джерел, ані стоків. В даному випадку

$$div\,\vec{a} = 2xyz - 2xyz + 0 = 0\,,$$

тобто задане поле є соленоїдним.

<u>**Приклад 7.5.**</u> Знайти ротор векторного поля $\vec{a} = yz\,\vec{i} - z^2\,\vec{j} + z(x+y)\,\vec{k}$ і обчислити його в точці $M_0(1,\,3,\,0)$.

Розв'язання. Ротором (або *вихорем*) векторного поля

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

називається вектор

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\ .$$

В даному випадку

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -z^2 & z(x+y) \end{vmatrix} = (z+2z)\vec{i} - (z-y)\vec{j} + (0-z)\vec{k} = 3z\,\vec{i} + (y-z)\vec{j} - z\,\vec{k}\ ,$$

отже, $rot\,\vec{a}\Big|_{M_0} = 0\cdot\vec{i} + (3-0)\cdot\vec{j} - 0\cdot\vec{k} = 3\vec{i}$.

<u>Приклад 7.6.</u> З'ясувати, чи буде потенціальним векторне поле

$$\vec{a} = (yz - 2x)\vec{i} + z(x+y)\vec{j} + xy\vec{k}\ .$$

Розв'язання. Векторне поле $\vec{a}$ називається *безвихровим*, якщо в кожній його точці ротор дорівнює нулю: $rot\,\vec{a} = \vec{0}$. Якщо існує функція $u = u(x,y,z)$, така, що $du = Pdx + Qdy + Rdz$, тобто $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$, то векторне поле називається *потенціальним*, а функція $u = u(x,y,z)$ називається *потенціалом* цього поля. Всяке безвихрове поле є потенціальним і навпаки.

В даному випадку $rot\,\vec{a} = (x-x)\vec{i} - (y-y)\vec{j} + (z-z)\vec{k} = \vec{0}$, тобто задане поле потенціальне.

<u>Приклад 7.7.</u> З'ясувати, чи буде гармонічним векторне поле

$$\vec{a} = (2xy + z^2 - x^2)\vec{i} + (x^2 + z - y^2)\vec{j} + (y + 2xz)\vec{k}\ .$$

Розв'язання. Векторне поле називається *гармонічним*, якщо воно одночасно є соленоїдним і безвихровим, тобто в кожній точці цього поля дивергенція і ротор дорівнюють нулю: $div\,\vec{a} = 0$, $rot\,\vec{a} = \vec{0}$.

В даному випадку $div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2y - 2x - 2y + 2x = 0$,

$$rot\,\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+z^2-x^2 & x^2+z-y^2 & y+2xz\end{vmatrix}=(1-1)\vec{i}-(2z-2z)\vec{j}+(2x-2x)\vec{k}=\vec{0}.$$

Оскільки обидві умови виконані, то задане векторне поле є гармоні ьчним.

Приклад 7.8. Перевірити, чи існує аналітична функція $f(z)$, уявною частиною якої є функція $v(x,y)=e^x\cos y$, і якщо так, то відновити $f(z)$ за умовою $f(0)=1+i$.

Розв'язання. Дійсна та уявна частини однозначної та аналітичної в області D функції $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ є в цій області *гармонічними* функціями, тобто визначені, мають неперервні частинні похідні другого порядку і задовольняють рівнянню Лапласа $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$. Далі, для того, щоб дві функції $u(x,y)$ й $v(x,y)$, гармонічні в однозв'язній області D, були дійсною та уявною частинами аналітичної в D функції $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, необхідно і достатньо, щоб вони були *спряженими*, тобто задовольняли умови Коші-Рімана $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Перевіримо спочатку, чи є задана функція $v(x,y)=e^x\cos y$ гармонічною. Для цього знайдемо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-e^x\cos y.$$

Неважко бачити, що функція $v(x,y)$ задовольняє рівнянню Лапласа, тобто вона є гармонічною і тому теоретично *може* бути уявною частиною деякої аналітичної функції $f(z)$, тобто $f(z)$ дійсно *існує.*

I спосіб. З умов Коші-Рімана маємо: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-e^x\sin y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^x\cos y$.

Проінтегруємо по x першу рівність:

$$u(x,y)=\int\left(-e^x\sin y\right)dx=-e^x\sin y+C(y),$$

де $C(y)$ – невідома поки що функція.

Підставимо знайдену функцію $u(x,y)$ до другої рівності і отримаємо рівняння $-e^x\cos y+C'(y)=-e^x\cos y$, з якого знаходимо $C'(y)=0$. Отже, $C(y)=C^*$, де C^* - довільна стала.

Отже, ми знайшли з точністю до сталого доданка C^*, який в цьому випадку є *дійсним*, гармонічну функцію $u(x,y)=C^*-e^x\sin y$, спряжену з вихідною функцією $v(x,y)$. Знайдена функція $u(x,y)$ є дійсною частиною аналітичної функції $f(z)$, отже $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=C^*-e^x\sin y+i\cdot e^x\cos y$. З умови $f(0)=1+i$ випливає, що $0+C^*+i=1+i$, звідки $C^*=1$ і тому $u(x,y)=1-e^x\sin y$. Таким чином, маємо:

$$f(z)=1-e^x\sin y+i\cdot e^x\cos y=1+i\cdot e^x(\cos y+i\sin y).$$

Оскільки $e^x(\cos y+i\sin y)=e^z$, то остаточно отримуємо $f(z)=1+ie^z$.

Зауваження. На практиці в більшості випадків функції $u(x,y)$ й $v(x,y)$ задаються виразами, що включають елементарні функції типа показникової або тригонометричних. Тоді функцію $f(z)$ можна виразити через змінну z за допомогою формальної заміни $x=z$, $y=0$: $f(z)=\left[u(x,y)+iv(x,y)\right]\Big|_{\substack{x=z\\y=0}}$.

Тут $f(z)=(1-e^x\sin y+i\cdot e^x\cos y)\Big|_{\substack{x=z\\y=0}}=1-e^z\cdot\sin 0+ie^z\cos 0=1+ie^z$.

<u>*II спосіб.*</u> В даному випадку $z_0=0$, $f(z_0)=1+i$, тому $\bar{z}_0=0$, $\overline{f(z_0)}=1-i$. Тоді за формулою $f(z)=2i\cdot v\left(\dfrac{z+\bar{z}_0}{2},\dfrac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)+\overline{f(z_0)}$, де $\overline{f(z_0)}$ – число, спряжене з $f(z_0)$, маємо

$$f(z)=2i\cdot v\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2},\frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)+\overline{f(z_0)}=2ie^{\frac{z}{2}}\cos\frac{z}{2i}+1-i=\left\{\cos\frac{z}{2i}=\cos\left(-\frac{iz}{2}\right)=\right.$$

$$\left.= ch\frac{z}{2} = \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{2}\right\} = 2ie^{\frac{z}{2}}\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{2} + 1 - i = ie^{z} + i + 1 - i = 1 + ie^{z}.$$

<u>**Приклад 7.9.**</u> Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо відома її дійсна частина $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ і значення $f(i) = -1 + 2i$.

Розв'язання. В даному випадку $z_0 = i$, $f(z_0) = -1 + 2i$, тому $\bar{z}_0 = -i$, $\overline{f(z_0)} = -1 - 2i$. Тоді за формулою $f(z) = 2 \cdot u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - \overline{f(z_0)}$ маємо

$$f(z) = 2\left[\left(\frac{z - i}{2}\right)^2 - \left(\frac{z + i}{2i}\right)^2 + 2\frac{z - i}{2}\right] + 1 - 2i = z^2 + 2z.$$

<u>**Приклад 7.10.**</u> Обчислити інтеграл $\int\limits_L (2 - i + z\,\mathrm{Im}\,z)dz$, де L:

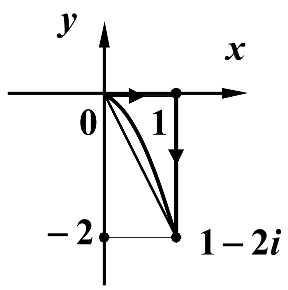

Рис. 7.1

а) відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 - 2i$;

б) дуга параболи $y = -2x^2$, що з'єднує ті ж самі точки;

в) ламана $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = 1$ (рис. 7.1).

Розв'язання. З урахуванням того, що $z = x + iy$, перепишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$2 - i + z\,\mathrm{Im}\,z = u + iv = 2 - i + (x + iy)y = xy + 2 + i(y^2 - 1).$$

Тут $u(x, y) = xy + 2$, $v(x, y) = y^2 - 1$. Тоді за формулою

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L (u + iv)(dx + idy) = \int\limits_L udx - vdy + i\int\limits_L vdx + udy$$

отримаємо

$$\int\limits_L (2 - i + z\,\mathrm{Im}\,z)dz = \int\limits_L (xy + 2)dx - (y^2 - 1)dy + i\int\limits_L (y^2 - 1)dx + (xy + 2)dy.$$

а) Рівняння прямої, що проходить через точки $z_1 = 0$ й $z_2 = 1 - 2i$ є $y = -2x$, а x зростає від 0 до 1, отже, $dy = -2dx$ і тоді

$$\int\limits_L (2 - i + z\,\mathrm{Im}\,z)dz = \int\limits_0^1 [(-2x^2 + 2) - (4x^2 - 1)(-2)]dx +$$

$$+i\int_0^1 [(4x^2-1)+(-2x^2+2)(-2)]dx = \int_0^1 6x^2 dx + i\int_0^1 (8x^2-5)dx = 2 - i\frac{7}{3}.$$

б) Для параболи $y = -2x^2$ маємо $dy = -4xdx$, а x зростає від 0 до 1. Отже,

$$\int_L (2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz = \int_0^1 [(-2x^3+2)-(4x^4-1)(-4x)]dx + i\int_0^1 [(4x^4-1)+$$

$$+(-2x^3+2)(-4x)]dx = 2\int_0^1 (8x^5-x^3-2x+1)dx + i\int_0^1 (12x^4-8x-1)dx = \frac{13}{6} - i\frac{13}{5}.$$

в) На відрізку $z_1 z_3$ маємо $y=0$, $dy=0$, а x зростає від 0 до 1. На відрізку $z_3 z_2$ маємо $x=1$, $dx=0$, а y спадає від 0 до -2. Отже, за властивістю лінійності криволінійного інтеграла отримуємо

$$\int_{z_1 z_3 z_2} (2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz = \int_{z_1 z_3} (2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz + \int_{z_3 z_2} (2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz =$$

$$= \int_0^1 2\,dx - i\int_0^1 dx + \int_0^{-2} (1-y^2)dy + i\int_0^{-2} (y+2)dy = 2 - i + \frac{2}{3} - 2i = \frac{8}{3} - 3i.$$

Зауваження. Порівнюючи між собою усі отримані значення заданого інтеграла, можемо зробити висновок, що *цей* інтеграл *залежить* від лінії L (шляху інтегрування).

<u>Приклад 7.11.</u> Обчислити інтеграл $\oint_C \frac{e^{z^3}}{z^2+2z}dz$, де C:

а) коло $|z-3|=1$; **б)** коло $|z-i|=2$; **в)** коло $|z+1|=2$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(z) = \frac{e^{z^3}}{z^2+2z}$ аналітична всюди, окрім точок $z_1 = 0$ й $z_2 = -2$, в яких знаменник перетворюється на нуль (особливі точки).

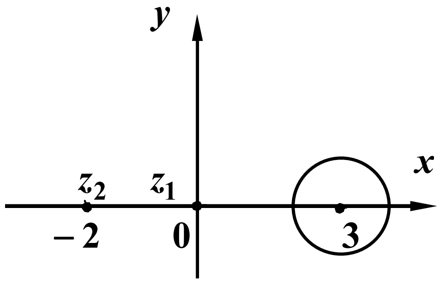

Рис. 7.2

а) В замкненому крузі $|z-3| \le 1$ (рис. 7.2) функція $f(z)$ аналітична, тому за інтегральною теоремою Коші $\oint_{|z-3|=1} \frac{e^{z^3}}{z^2+2z}dz = 0$.

б) В замкненому крузі $|z-i| \le 2$ (рис. 7.3) міститься одна особлива точка $z_1 = 0$. Запишемо інтеграл у вигляді $\oint\limits_C \frac{e^{z^3}}{z^2+2z}dz = \oint\limits_{|z-i|=2} \frac{\frac{e^{z^3}}{z+2}}{z}dz$. Функція $f(z) = \frac{e^{z^3}}{z+2}$ є аналітичною в крузі $|z-i| \le 2$. Тому за інтегральною формулою

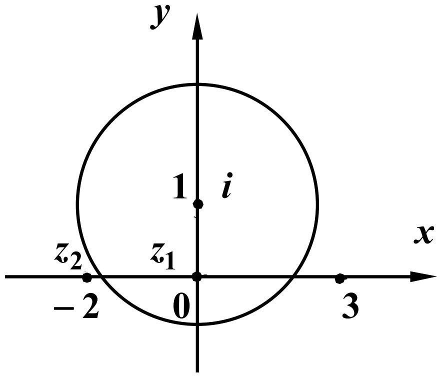

Рис. 7.3

Коші $\oint\limits_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i \cdot f(z)$ при $z = 0$ отримуємо

$$\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{e^{z^3}}{z^2+2z}dz = 2\pi i \left.\frac{e^{z^3}}{z+2}\right|_{z=0} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i .$$

в) В замкненому крузі $|z+1| \le 2$ (рис. 7.4) містяться обидві особливі точки $z_1 = 0$ й $z_2 = -2$. Розкладемо дріб $\frac{1}{z^2+2z}$ в суму найпростіших дробів:

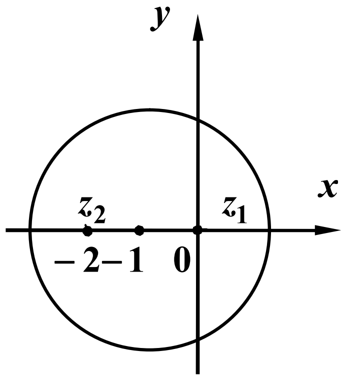

Рис. 7.4

$$\frac{1}{z^2+2z} = \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}\right).$$

Підставивши отриманий розклад в інтеграл, за інтегральною формулою Коші отримаємо

$$\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{e^{z^3}}{z^2+2z}dz = \frac{1}{2}\left(\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{e^{z^3}}{z}dz - \oint\limits_{|z+1|=2} \frac{e^{z^3}}{z+2}dz\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\pi i e^{z^3}\Big|_{z=0} - 2\pi i e^{z^3}\Big|_{z=-2}\right) = \pi i(1 - e^{-8}).$$

<u>**Приклад 7.12.**</u> Розвинути функцію $f(z) = z^4 \sin(3z^2)$ в ряд Маклорена та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв'язання. Скористаємось відомим розвиненням в ряд Маклорена функції $\sin z$ (див. додаток 1)

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

в якому замінимо z на $3z^2$, і отриманий ряд почленно помножимо на z^4:

$$\sin(3z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3z^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}z^{4n+2}}{(2n+1)!},$$

$$f(z)=z^4\sin(3z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}z^{4n+6}}{(2n+1)!}=3z^6-\frac{9}{2}z^{10}+\frac{81}{40}z^{14}-\ldots.$$

Отримане розвинення справедливе в усій комплексній площині.

В деяких випадках розвинення функції в степеневий ряд можна отримати, просумувавши табличні розвинення або раніше знайдені. При цьому іноді треба тотожно перетворити функцію таким чином, щоб подати її у вигляді зручної комбінації функцій, розвинення яких відомі.

Приклад 7.13. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(z)=\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$ та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв'язання. Задана функція є правильним раціональним дробом. У відповідності із розкладом знаменника на множники $z^2-5z+6=(z-2)(z-3)$ подамо її у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=\frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-3},\quad \text{звідки}\quad 2z-5=A(z-3)+B(z-2).$$

Невідомі коефіцієнти A і B знайдемо з системи рівнянь $\begin{array}{l|l} z=2 & -1=-A, \\ z=3 & 1=B. \end{array}$

Отже, $A=B=1$ й $f(z)=\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}=\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{z-3}$. Кожен з отриманих найпростіших дробів після нескладного тотожного перетворення розвинемо в ряд Маклорена за допомогою відомого розвинення (додаток 1)

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

Отримаємо

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\quad\left(\left|\frac{z}{2}\right|<1\Rightarrow|z|<2\right),$$

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n\quad\left(\left|\frac{z}{3}\right|<1\Rightarrow|z|<3\right).$$

Отже,

$$\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n=-\frac{5}{6}-\frac{13}{36}z-\frac{35}{216}z^2-\dots.$$

Найближчою до точки $z=0$ особливою точкою функції $f(z)$ є точка $z=2$, тому $R=2$. Отже, отримане розвинення справедливе в крузі $|z|<2$ (він, як неважко бачити, є спільним кругом збіжності обох рядів.

<u>Приклад 7.14.</u> Розвинути функцію $f(z)=\dfrac{1}{4-3z}$ в ряд Тейлора в околі точки $z=2$.

Розв'язання. Перетворимо функцію наступним чином:

$$f(z)=\frac{1}{4-3(2+z-2)}=\frac{1}{-2-3(z-2)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3}{2}(z-2)}.$$

Скористаємось відомим розвиненням функції $\dfrac{1}{1+z}$ в ряд Маклорена

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\dots+(-1)^n z^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

і отримаємо $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\dots+(-1)^n z^n+\dots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, у якому формально замінимо z на $\dfrac{3}{2}(z-2)$. Отримаємо:

$f(z)=\dfrac{1}{4-3z}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{3}{2}(z-2)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{2^{n+1}}(z-2)^n$. Цей ряд збігається, якщо $\left|\dfrac{3}{2}(z-2)\right|<1$ або $|z-2|<\dfrac{2}{3}$, тобто радіус збіжності ряду $R=\dfrac{2}{3}$.

<u>Приклад 7.15.</u> Розвинути в ряд Тейлора в околі точки $z_0=4$ (за степенями різниці $z-4$) функцію $f(z)=\ln(z^2+4z-5)$ та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв'язання. Перетворимо тотожно задану функцію, виділяючи різницю $z-4$:

$$f(z)=\ln(z^2+4z-5)=\ln[(z-1)(z+5)]=\ln\{[3+(z-4)][9+(z-4)]\}=$$
$$=\ln\left[27\left(1+\frac{z-4}{3}\right)\left(1+\frac{z-4}{9}\right)\right]=\ln 27+\ln\left(1+\frac{z-4}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{z-4}{9}\right).$$

Скористаємось відомим розвиненням (додаток 1)

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n},$$

в якому замінимо z на $\frac{z-4}{3}$ й на $\frac{z-4}{9}$. Отримаємо

$$\ln\left(1+\frac{z-4}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-4)^n}{n3^n}\qquad\left(\left|\frac{z-4}{3}\right|<1\Rightarrow|z-4|<3\right),$$
$$\ln\left(1+\frac{z-4}{9}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-4)^n}{n9^n}\qquad\left(\left|\frac{z-4}{9}\right|<1\Rightarrow|z-4|<9\right).$$

Отже,

$$f(z)=\ln(z^2+4z-5)=\ln 27+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1+3^n}{n9^n}(z-4)^n=$$
$$=\ln 27+\frac{4}{9}(z-4)-\frac{5}{9^2}(z-4)^2+\frac{28}{3\cdot 9^3}(z-4)^3-....$$

Найближчою до точки $z_0=4$ особливою точкою функції $f(z)$ є точка $z=1$, тому $R=3$. Отже, отримане розвинення справедливе в крузі $|z|<3$, який є спільним кругом збіжності рядів $\ln\left(1+\frac{z-4}{3}\right)$ й $\ln\left(1+\frac{z-4}{9}\right)$.

<u>Приклад 7.16.</u> Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=3}\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}dz$.

Розв'язання. В області $|z|<3$ функція $f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}$ аналітична всюди, окрім точок $z=-1$ й $z=2$. За основною теоремою Коші про лишки

$$\oint\limits_{\Gamma}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res}\,f(z)$$

маємо $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}dz = 2\pi i\left[\underset{z=-1}{res} f(z) + \underset{z=2}{res} f(z)\right]$.

Точка $z=-1$ є полюсом другого порядку, отже, за формулою

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

маємо

$$\underset{z=-1}{res}\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}\right] = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z-2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2} = -\frac{4}{9e}.$$

Точка $z=2$ є *простим полюсом,* отже, за формулою

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$$

отримуємо

$$\underset{z=2}{res}\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} = \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}\right] = \lim_{z\to 2}\left[\frac{e^z}{(z+1)^2}\right] = \frac{e^2}{9}.$$

Тоді $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}dz = 2\pi i\left(\dfrac{e^2}{9} - \dfrac{4}{9e}\right) = \dfrac{2}{9}\pi\dfrac{e^3-4}{e}i$.

<u>Приклад 7.17.</u> Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z-i|=3}\dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$.

Розв'язання. В крузі $|z-i|<3$ підінтегральна функція $f(z) = \dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}$ аналітична всюди, окрім точок $z_1=0$ й $z_2=i$. За основною теоремою Коші про лишки

$$\oint\limits_{|z-i|=3}\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz = 2\pi i\left[\underset{z=0}{res} f(z) + \underset{z=i}{res} f(z)\right].$$

Точка $z=0$ є *усувною* особливою точкою функції $f(z)$, оскільки

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2ze^{z^2}}{3z^2-2iz} = 2\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{z^2}}{3z-2i} = i$ (границя скінченна).

Тому $\underset{z=0}{res}\, f(z) = 0$.

Точка $z_2 = i$ є *простим полюсом* (полюсом першого порядку) функції $f(z)$, оскільки $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{e^{z^2}-1}{z^3 - iz^2} = \infty$. Обчислимо лишок в цій точці:

$$\underset{z=i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}\right] = \frac{e^{-1}-1}{-1} = 1 - \frac{1}{e}.$$

Отже, $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3 - iz^2}dz = 2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

<u>**Приклад 7.18.**</u> Обчислити інтеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz$.

Розв'язання. В крузі $|z| < 4$ підінтегральна функція $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+2z-3}$ аналітична всюди, окрім точок $z_1 = -3$ й $z_2 = 1$, які є *простими полюсами*. За основною теоремою Коші про лишки

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz = 2\pi i\left[\underset{z=-3}{res}\, f(z) + \underset{z=1}{res}\, f(z)\right].$$

Якщо в околі *простого* полюса z_0 функція $f(z)$ може бути подана у вигляді частки двох аналітичних в z_0 функцій

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причому $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z_0) = 0$ й $\psi'(z_0) \neq 0$ (тобто точка z_0 є нулем *першого* порядку функції $\psi(z)$), то лишок функції $f(z)$ в точці z_0 може бути обчислений за формулою

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Отже, $\displaystyle\underset{z=-3}{res}\, f(z) = \left.\frac{z+1}{(z^2+2z-3)'}\right|_{z=-3} = \left.\frac{z+1}{2z+2}\right|_{z=-3} = \frac{1}{2}$,

$$\underset{z=1}{res}\, f(z)=\left.\frac{z+1}{(z^2+2z-3)'}\right|_{z=1}=\left.\frac{z+1}{2z+2}\right|_{z=1}=\frac{1}{2}.$$ Отже, $\oint\limits_{|z|=4}\frac{z+1}{z^2+2z-3}dz=2\pi i$.

Зауваження. За цією формулою у попередньому прикладі

$$\underset{z=i}{res}\, f(z)=\left.\frac{\dfrac{e^{z^2}-1}{z^2}}{(z-i)'}\right|_{z=i}=\left.\frac{e^{z^2}-1}{z^2}\right|_{z=i}=1-\frac{1}{e}.$$

__Приклад 7.19.__ Знайти зображення функції $f(t)=te^{3t}\eta(t-2)$.

Розв'язання. Розглянемо два способи.

Перший спосіб. Перетворимо тотожно задану функцію:

$$f(t)=te^{3t}\eta(t-2)=te^{3(t-2+2)}\eta(t-2)=e^6te^{3(t-2)}\eta(t-2).$$

Оскільки $e^{3t}\to\frac{1}{p-3}$, то за теоремою запізнювання $e^{3(t-2)}\eta(t-2)\to\frac{1}{p-3}e^{-2p}$,

а за теоремою про диференціювання зображення

$$te^{3(t-2)}\eta(t-2)\to-\left(\frac{1}{p-3}e^{-2p}\right)'=-\left[-\frac{1}{(p-3)^2}e^{-2p}-2\frac{1}{p-3}e^{-2p}\right]=$$

$$=e^{-2p}\left[\frac{1}{(p-3)^2}+\frac{2}{p-3}\right].$$ З урахуванням лінійності перетворення Лапласа

остаточно маємо $F(p)=e^{-2p+6}\left[\frac{1}{(p-3)^2}+\frac{2}{p-3}\right]$.

Другий спосіб. Перетворимо тотожно задану функцію дещо по іншому:

$$f(t)=te^{3t}\eta(t-2)=(t-2+2)e^{3t}\eta(t-2)=e^{3t}(t-2)\eta(t-2)+2e^{3t}\eta(t-2)=$$

$$=e^{3t}\left[(t-2)\eta(t-2)+2\eta(t-2)\right].$$

Оскільки $t\to\frac{1}{p^2}$, $1\to\frac{1}{p}$, то за теоремою запізнювання $(t-2)\eta(t-2)\to\frac{1}{p^2}e^{-2p}$, $\eta(t-2)\to\frac{1}{p}e^{-2p}$. Тоді за теоремою зміщення з урахуванням лінійності перетворення Лапласа одержуємо

$$F(p)=\frac{1}{(p-3)^2}e^{-2(p-3)}+\frac{2}{p-3}e^{-2(p-3)}.$$

Приклад 7.20. Знайти зображення функції $f(t)=\dfrac{e^{-2t}\sin^2 3t}{t}$.

Розв'язання. Оскільки $\sin^2 3t=\dfrac{1-\cos 6t}{2}$, то за теоремою зміщення та властивістю лінійності перетворення Лапласа маємо

$$e^{-2t}\sin^2 3t\to\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+2}-\frac{p+2}{(p+2)^2+36}\right].$$

Тоді за теоремою про інтегрування зображення

$$f(t)=\frac{e^{-2t}\sin^2 3t}{t}\to\int_p^{+\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{q+2}-\frac{q+2}{(q+2)^2+36}\right]dq=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\Big[\ln|q+2|-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left[(q+2)^2+36\right]\Big]\Bigg|_p^B=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\ln\frac{B+2}{\sqrt{(B+2)^2+36}}-\frac{1}{2}\ln\frac{p+2}{\sqrt{(p+2)^2+36}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(p+2)^2+36}{(p+2)^2}$$ (тут враховано, що $\lim\limits_{B\to+\infty}\ln\dfrac{B+2}{\sqrt{(B+2)^2+36}}=$

$=\ln\lim\limits_{B\to+\infty}\dfrac{B+2}{\sqrt{(B+2)^2+36}}=\ln 1=0$).

Приклад 7.21. Знайти зображення функції $f(t)=\int\limits_0^t\tau^3e^{\tau}d\tau$.

Розв'язання.

Оскільки $t^3\to\dfrac{3!}{p^4}$, то за теоремою зміщення $t^3e^t\to\dfrac{3!}{(p-1)^4}$ (інакше: оскільки $e^t\to\dfrac{1}{p-1}$, то за теоремою про диференціювання зображення $t^3e^t\to(-1)^3\left(\dfrac{1}{p-1}\right)'''=\dfrac{6}{(p-1)^4}$). Тоді за теоремою про інтегрування оригіналу

$$f(t)=\int_0^t\tau^3e^{\tau}d\tau\to\frac{6}{p\,(p-1)^4}.$$

<u>Приклад 7.22.</u> Знайти зображення імпульсної функції

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<3, \\ h, & 3\le t<5, \\ 0, & t\ge 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Графік функції наведений на рис. 7.5.

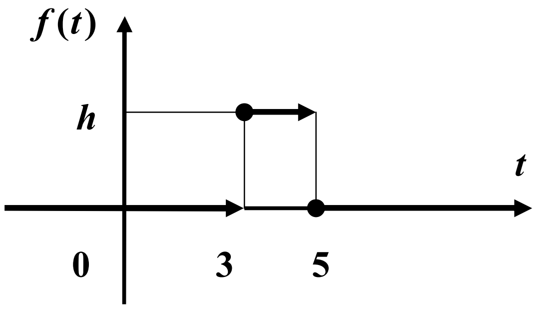

Рис. 7.5

Кусково-неперервна функція $f(t)=\begin{cases} 0, & t<a, \quad t>b, \\ \varphi(t)\ne 0 & \forall t\in(a,b) \end{cases}$ (рис. 7.6)

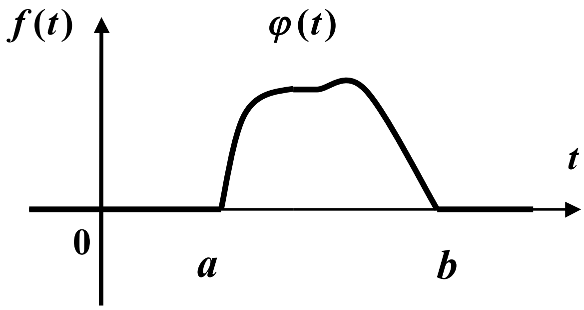

Рис. 7.6

подається формулою

$$f(t)=\varphi(t)\cdot\left[\,\eta(t-a)-\eta(t-b)\right],$$

отже, задана функція може бути зображена у вигляді

$$f(t)=h\cdot\eta(t-3)-h\cdot\eta(t-5)=h\left[\eta(t-3)-\eta(t-5)\right].$$

Тоді за властивістю лінійності і теоремою запізнювання маємо

$$f(t)\to h\left(e^{-3t}\,\frac{1}{p}-e^{-5t}\,\frac{1}{p}\right)=h\frac{e^{-3t}}{p}\left(1-e^{-2t}\right).$$

<u>Приклад 7.23.</u> Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p)=\frac{p+1}{(p-1)(p+3)}.$$

*Розв'язання***.** Розкладемо дріб $\dfrac{p+1}{(p-1)(p+3)}$ у суму найпростіших дробів:

$$F(p)=\frac{p+1}{(p-1)(p+3)}=\frac{1}{2(p-1)}+\frac{1}{2(p+3)}.$$

За таблицею оригіналів і зображень з урахуванням лінійності знаходимо:

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

<u>Приклад 7.24.</u> Відновити оригінал за зображенням

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}.$$

*Розв'язання***.** Розкладемо дріб $\dfrac{1}{(p-1)(p+1)^3}$ у суму найпростіших дробів:

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}=-\frac{1}{2(p+1)^3}-\frac{1}{4(p+1)^2}-\frac{1}{8(p+1)}+\frac{1}{8(p-1)}.$$

За таблицею оригіналів і зображень з урахуванням лінійності знаходимо:

$$f(t)=-\frac{1}{4}t^2e^{-t}-\frac{1}{4}te^{-t}-\frac{1}{8}e^{-t}+\frac{1}{8}e^{t}=\frac{1}{8}\Big[e^{t}-e^{-t}\big(2t^2+2t+1\big)\Big].$$

<u>Приклад 7.25.</u> Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p)=\frac{pe^{-3p}}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}.$$

Розв'язання. Розкладемо дріб $\dfrac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}$ у суму найпростіших дробів:

$$\frac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}=\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{3}{20}\cdot\frac{p+\frac{8}{3}}{p^2+4p+8}.$$

За таблицею основних зображень (додаток 2) і за теоремою зміщення з урахуванням лінійності маємо

$$\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+2}\leftarrow\frac{1}{40}e^{2t}+\frac{1}{8}e^{-2t},$$

$$-\frac{3}{20}\cdot\frac{p+\frac{8}{3}}{p^2+4p+8}=-\frac{3}{20}\cdot\frac{p+2+\frac{2}{3}}{p^2+4p+8}\leftarrow-\frac{3}{20}\cdot e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{20}\cdot e^{-2t}\sin 2t,$$

отже,

$$\frac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}\leftarrow\frac{1}{40}e^{2t}+\frac{1}{8}e^{-2t}-\frac{3}{20}\cdot e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{20}\cdot e^{-2t}\sin 2t.$$

Тоді за теоремою запізнювання остаточно маємо

$$f(t)=\left[\frac{1}{40}e^{2t-6}+\frac{1}{8}e^{-2t+6}-\frac{1}{20}\cdot e^{-2t+6}[3\cos(2t-6)+\sin(2t-6)]\right]\cdot\eta(t-3).$$

Приклад 7.26. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x''+4x'+4x=e^{-2t}(\cos t+2\sin t),$$

що задовольняє початковим умовам $x(0) = -1,\ x'(0) = 1.$

Розв'язання. Нехай $x(t)\to X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу з урахуванням початкових умов маємо

$$x'(t)\to pX(p)+1,\ x''(t)\to p^2X(p)+p-1.$$

За таблицею оригіналів і зображень (додаток 2) з урахуванням лінійності знаходимо

$$\cos t+2\sin t\to\frac{p}{p^2+1}+2\cdot\frac{1}{p^2+1}=\frac{p+2}{p^2+1}.$$

Тоді за теоремою зміщення

$$e^{-2t}(\cos t+2\sin t)\to\frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Підставивши усі отримані вирази до заданого рівняння, отримаємо операторне рівняння у вигляді

$$p^2X(p)+p-1+4pX(p)+4+4X(p)=\frac{p+4}{(p+2)^2+1}$$

або, після перетворень,

$$(p^2+4p+4)X(p)+p+3=\frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Знайдемо звідси зображення розв’язку:

$$X(p)=-\frac{p^3+7p^2+16p+11}{[(p+2)^2+1]\,(p+2)^2}.$$

Розклавши дріб у суму найпростіших дробів, отримаємо:

$$X(p)=-\frac{p+4}{(p+2)^2+1}+\frac{1}{(p+2)^2}=-\frac{p+2}{(p+2)^2+1}-2\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1}+\frac{1}{(p+2)^2}.$$

Оскільки $\frac{p}{p^2+1}\leftarrow\cos t,\ \frac{1}{p^2+1}\leftarrow\sin t,\ \frac{1}{p^2}\leftarrow t$, то за теоремою зміщення і властивістю лінійності остаточно маємо розв’язок задачі Коші у вигляді

$$\tilde{x}(t)=e^{-2t}(t-\cos t-2\sin t).$$

Приклад 7.27. Знайти розв’язок задачі Коші $x''-2x'+x=f(t)$,

$x(0)=0, x'(0)=0$, де $f(t)=\begin{cases}0, & t<1,\\ -1, & 1<t<3,\\ 2, & t>3.\end{cases}$

Розв’язання. Права частина рівняння є кусково-неперервною функцією. За формулою $f(t)=\varphi(t)\cdot\left[\eta(t-a)-\eta(t-b)\right]$ зобразимо її у вигляді

$$f(t)=-\left[\eta(t-1)-\eta(t-3)\right]+2\eta(t-3)$$

або

$$f(t)=-\eta(t-1)+3\eta(t-3).$$

Нехай $x(t)\to X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу маємо $x'(t)\to pX(p)$, $x''(t)\to p^2X(p)$. За таблицею оригіналів і зображень (додаток 2) і теоремою лінійності

$$f(t)=-\eta(t-1)+3\eta(t-3)\to-\frac{e^{-p}}{p}+3\cdot\frac{e^{-3p}}{p}.$$

Підставивши усі отримані вирази до заданого рівняння, отримаємо операторне рівняння у вигляді

$$(p^2-2p+1)X(p)=\frac{3e^{-3p}-e^{-p}}{p},$$

звідки зображення розв’язку

$$X(p)=\frac{3e^{-3p}-e^{-p}}{p(p-1)^2}.$$

Розклавши дріб $\dfrac{1}{p(p-1)^2}$ у суму найпростіших дробів, отримаємо:

$$\frac{1}{p(p-1)^2}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{(p-1)^2}.$$

Оскільки $\dfrac{1}{p}\leftarrow 1,\quad \dfrac{1}{p^2}\leftarrow t$, то за теоремою зміщення з урахуванням лінійності

$$\frac{1}{p(p-1)^2}\leftarrow 1-e^t+te^t.$$

Тоді за теоремою запізнювання з урахуванням лінійності остаточно маємо розв’язок задачі Коші у вигляді

$$\tilde{x}(t)=3\Big(1-e^{t-3}+(t-3)e^{t-3}\Big)\eta(t-3)-\Big(1-e^{t-1}+(t-1)e^{t-1}\Big)\eta(t-1).$$

<u>Приклад 7.28.</u> Знайти розв’язок задачі Коші

$$\begin{cases}\dot{x}-x-2y+9t=0\\ \dot{y}-2x-y=4e^t\end{cases},\quad x(0)=1,\ y(0)=2.$$

Розв’язання. Позначимо $x(t)\to X(p)$, $y(t)\to Y(p)$. Оскільки $t\to\dfrac{1}{p^2}$, $e^t\to\dfrac{1}{p-1}$, то за теоремою про диференціювання оригіналу і властивістю лінійності отримуємо наступну систему операторних рівнянь відносно зображень $X(p)$ й $Y(p)$:

$$\begin{cases} (p-1)X(p)-2Y(p)=1-\dfrac{9}{p^2}, \\ -2X(p)+(p-1)Y(p)=2+\dfrac{4}{p-1}. \end{cases}$$

Знайдемо $X(p)$ й $Y(p)$ за формулами Крамера: $X(p)=\dfrac{\Delta_X}{\Delta}$, $Y(p)=\dfrac{\Delta_Y}{\Delta}$,

де $\Delta=\begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix}=p^2-2p-3=(p-3)(p+1)$,

$$\Delta_X=\begin{vmatrix} \dfrac{p^2-9}{p^2} & -2 \\ \dfrac{2p+2}{p-1} & p-1 \end{vmatrix}=\frac{p^4+2p^3-4p^2+18p-9}{p^2(p-1)},$$

$$\Delta_Y=\begin{vmatrix} p-1 & \dfrac{p^2-9}{p^2} \\ -2 & \dfrac{2p+2}{p-1} \end{vmatrix}=\frac{2p^3+4p^2-18}{p^2}.$$

Отже, $X(p)=\dfrac{p^4+2p^3-4p^2+18p-9}{p^2(p-1)(p-3)(p+1)}$, $Y(p)=\dfrac{2p^3+4p^2-18}{p^2(p-3)(p+1)}$.

Розкладемо зображення у суму найпростіших дробів:

$$X(p)=\frac{5}{p}-\frac{3}{p^2}-\frac{2}{p-1}+\frac{2}{p-3}-\frac{4}{p+1},\quad Y(p)=-\frac{4}{p}+\frac{6}{p^2}+\frac{2}{p-3}+\frac{4}{p+1}.$$

Відновимо оригінали, застосувавши таблицю і властивість лінійності. Отже, розв’язок задачі має вигляд:

$$\tilde{x}(t)=5-3t-2e^{t}+2e^{3t}-4e^{-t},\quad \tilde{y}(t)=-4+6t+2e^{3t}+4e^{-t}.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Знайти швидкість зміни скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в точці M_0 за напрямком до точки M_1. Визначити напрямок та величину найбільшої швидкості зростання поля в точці M_0.

1. $u(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 x$, $M_0(1, -1, 2)$, $M_1(3, 4, -1)$.
2. $u(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M_0(-1, 2, 1)$, $M_1(3, 1, -1)$.
3. $u(x, y, z) = ze^{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(0, 0, 0)$, $M_1(3, -4, 2)$.
4. $u(x, y, z) = \ln(xy + yz + zx)$, $M_0(-2, 3, -1)$, $M_1(2, 1, -3)$.
5. $u(x, y, z) = xe^y + ye^x - z^2$, $M_0(3, 0, 2)$, $M_1(4, 1, 3)$.
6. $u(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1, 2, 2)$, $M_1(-3, 2, -1)$.
7. $u(x, y, z) = e^{x-yz}$, $M_0(1, 0, 3)$, $M_1(2, -4, 5)$.
8. $u(x, y, z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} - \dfrac{z}{x}$, $M_0(-1, 1, 1)$, $M_1(2, 3, 4)$.
9. $u(x, y, z) = (x - y)^z$, $M_0(1, 5, 0)$, $M_1(3, 7, -2)$.
10. $u(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 + z + 1)$, $M_0(1, 3, 0)$, $M_1(-4, 1, 3)$.

Завдання 2. З'ясувати, чи буде задане векторне поле соленоїдним.

1. $\vec{a} = x^2 y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$.
2. $\vec{a} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$.
3. $\vec{a} = (x^2 - z^2)\vec{i} - 3xy\vec{j} + (y^2 + z^2)\vec{k}$.
4. $\vec{a} = 2xyz\vec{i} - y(yz + 1)\vec{j} + z\vec{k}$.
5. $\vec{a} = (2x - 3y)\vec{i} + 2xy\vec{j} - z^2\vec{k}$.
6. $\vec{a} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (y^2 - z^2)\vec{j} + (z^2 - x^2)\vec{k}$.
7. $\vec{a} = yz\vec{i} + (x - y)\vec{j} + z^2\vec{k}$.
8. $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$.

9. $\vec{a} = 3x^2y\,\vec{i} - 2xy^2\,\vec{j} - 2xyz\,\vec{k}$.

10. $\vec{a} = (x+y)\,\vec{i} - 2(y+z)\,\vec{j} + (z-x)\,\vec{k}$.

Завдання 3. З’ясувати, чи буде задане векторне поле потенціальним.

1. $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.
2. $\vec{a} = 6xy\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + z\vec{k}$.
3. $\vec{a} = (2x - yz)\,\vec{i} + (2x - xy)\vec{j} + yz\vec{k}$.
4. $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + 3xyz\,\vec{j} + (z - x)\vec{k}$.
5. $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}$.
6. $\vec{a} = (x + y)\,\vec{i} - 2xz\vec{j} - 3(y + z)\vec{k}$.
7. $\vec{a} = z^2\,\vec{i} + (xz + y)\vec{j} + x^2y\vec{k}$.
8. $\vec{a} = xy(3x - 4y)\,\vec{i} + x^2(x - 4y)\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$.
9. $\vec{a} = 3(x - z)\,\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j} + 3z\vec{k}$.
10. $\vec{a} = (2x - yz)\,\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + 2xyz\vec{k}$.

Завдання 4. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за заданими умовами.

1. $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3, \quad f(0) = i$.
2. $u(x, y) = x\sin x\,chy - y\,shy\cos x, \quad f(0) = 0$.
3. $v(x, y) = y\cos x\,chy - x\sin x\;shy, \quad f(0) = 2$.
4. $v(x, y) = 4xy + y, \quad f(0) = 3$.
5. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x, \quad f(0) = 0$.
6. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1, \quad f(0) = 1$.
7. $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y, \quad f(1) = i - 2$.
8. $v(x, y) = 2xy + 2x, \quad f(0) = 0$.

9. $v(x,y)=3x^2y-y^3, \quad f(0)=1$.

10. $u(x,y)=e^{-y}\sin x+y, \quad f(0)=1$.

Завдання 5. Обчислити інтеграл.

1. $\int\limits_L |z|^2 dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+2i$.

2. $\int\limits_L (z^2-z)dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1=0$ до точки $z_2=i$.

3. $\int\limits_L (2i-z)dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$.

4. $\int\limits_L (iz^2+2z)dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$.

5. $\int\limits_L (z^2-3iz)dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1=1$ до точки $z_2=i$.

6. $\int\limits_L \mathrm{Re}\, z\, dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1=0$ до точки $z_2=i$.

7. $\int\limits_L \mathrm{Im}\, z\, dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$.

8. $\int\limits_L (iz+3)dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1=0$ до точки $z_2=2+2i$.

9. $\int\limits_L |z-\bar{z}|^2 dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$.

10. $\int\limits_L (2z+\bar{z})\, dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1=i$ до точки $z_2=1$.

Завдання 6. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші.

1. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z\, dz}{(z^2-1)^2}$.

2. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{(2+\sin z)\, dz}{(z+2i)z}$.

3. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2-1}$.

4. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos z dz}{z^2-\pi^2}$.

5. $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\cos z dz}{(z-i)^2}$.

6. $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z dz}{z(1-z)}$.

7. $\oint\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z}$.

8. $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-3|=1} \frac{e^z dz}{(z-1)(3-z)}$.

9. $\oint\limits_{|z-1|=4} \frac{\sin \frac{\pi z}{2} dz}{z^2-1}$.

10. $\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{(e^z+2)dz}{(z^2+4)^2}$.

Завдання 7. Розвинути функцію $f(z)$ в степеневий ряд в околі точки z_0.

1. $f(z)=(z+2)e^z$, $z_0=-2$.

2. $f(z)=\cos^2\frac{z}{4}$, $z_0=0$.

3. $f(z)=\sin^2 z$, $z_0=\frac{\pi}{4}$.

4. $f(z)=\frac{2z-1}{z^2+z-12}$, $z_0=0$.

5. $f(z)=(z-2)e^z$, $z_0=2$.

6. $f(z)=\frac{z+11}{z^2+z-2}$, $z_0=0$.

7. $f(z)=\ln(z+2)$, $z_0=-1$.

8. $f(z)=\frac{2z-5}{z^2-5z+6}$, $z_0=0$.

9. $f(z)=\frac{z}{z^2-2z+5}$, $z_0=1$.

10. $f(z)=\frac{z^2+2z}{(z+1)^3}$, $z_0=1$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл за допомогою лишків.

1. $\oint\limits_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{z+5}{(z-4)(z-3)^2} dz$.

2. $\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{z^4+1}{z^2(z^2+9)} dz$.

3. $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{z^4}{(z^2-9)(z-i)}\,dz$.

4. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^8}{(z^2-1)^2}\,dz$.

5. $\oint\limits_{|z|=5} \frac{e^z}{z^2(z-i\pi)}\,dz$.

6. $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}\,dz$.

7. $\oint\limits_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\,dz$.

8. $\oint\limits_{|z|=\pi} \frac{\cos z}{z\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}\,dz$.

9. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}\,dz$.

10. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{(z-3)(z^4-1)}\,dz$.

Завдання 9. Знайти зображення оригіналу.

1. а) $f(t)=t^2e^{t-3}\eta(t-3)$; б) $f(t)=\frac{\sin^3 t}{t}e^{-2t}$.

2. а) $f(t)=(t-3)e^{5t-5}\eta(t-1)$; б) $f(t)=\int\limits_0^t \frac{e^{\tau}-1}{\tau}\,d\tau$.

3. а) $f(t)=te^{2t}\cos 3t$; б) $f(t)=\frac{\sin 7t\cdot\sin 3t}{te^{3t}}$.

4. а) $f(t)=e^{4t}\cos^2 t$; б) $f(t)=\int\limits_0^t \frac{\sin 3\tau-\sin\tau}{\tau}\,d\tau$.

5. а) $f(t)=t\sin^2(t-4)\eta(t-4)$; б) $f(t)=\frac{\cos t-\cos 2t}{t}e^{2t}$.

6. а) $f(t)=e^{-t}(t-2)^3$; б) $f(t)=\int\limits_0^t \frac{\sin 5\tau\sin 3\tau}{\tau}\,d\tau$.

7. а) $f(t)=e^{-t}\cos(4t-8)\eta(t-2)$; б) $f(t)=\int\limits_0^t \frac{e^{3\tau}-e^{2\tau}}{\tau}\,d\tau$.

8. а) $f(t)=t^2\cos\frac{t}{2}$; б) $f(t)=e^{-2t}\frac{1-\cos t}{t}$.

9. а) $f(t)=e^t\sin 2t\cos 4t$; б) $f(t)=\int\limits_0^t \frac{\cos 3\tau-\cos\tau}{\tau}\,d\tau$.

10. а) $f(t)=e^{-2t+10}\sin^2(t-5)\eta(t-5)$; б) $f(t)=\frac{\sin^2 t}{t}$.

Завдання 10. Відновити оригінал за зображенням.

1. а) $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$; б) $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2-2p+5}e^{-p}$.

2. а) $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)(p+3)^3}$; б) $F(p)=\dfrac{2-3p}{p^2+4p+8}e^{-3p}$.

3. а) $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$; б) $F(p)=\dfrac{2p-1}{p^2+2p+7}e^{-p/2}$.

4. а) $F(p)=\dfrac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$; б) $F(p)=\dfrac{3p-2}{p^2+4p+6}e^{-p}$.

5. а) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$; б) $F(p)=\dfrac{2-p}{p^2+6p+10}e^{-p/3}$.

6. а) $F(p)=\dfrac{p+4}{(p-2)(p^2+2p+2)}$; б) $F(p)=\dfrac{2+p}{p^2+4p+5}e^{-5p}$.

7. а) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$; б) $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^2-2p+3}e^{-p}$.

8. а) $F(p)=\dfrac{p+10}{p^3-6p^2+10p}$; б) $F(p)=\dfrac{4-p}{p^2+6p+11}e^{-p}$.

9. а) $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p+2)(p-1)^2}$; б) $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2+8p+17}e^{-4p}$.

10. а) $F(p)=\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2+4)}$; б) $F(p)=\dfrac{3p-2}{p^2-4p+10}e^{-3p}$.

Завдання 11. За допомогою перетворення Лапласа розв’язати задачу Коші.

1. а) $\ddot{x}+x=2\cos t,\quad x(0)=-1,\quad \dot{x}(0)=1$;

б) $\ddot{x}-4x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}2, & t>3,\\ 1, & 1<t<3,\\ 0, & t<1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}-4x+3y=\sin t,\\ \dot{y}-2x+y=-2\cos t,\end{cases}\quad x(0)=1,\quad y(0)=1.$

2. а) $\ddot{x}+4x=2\sin 2t,\quad x(0)=-1,\quad \dot{x}(0)=0;$

б) $\ddot{x}+x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=2,\quad f(t)=\begin{cases}0, & t<1,\\ -2, & 1<t<2,\\ 1, & t>2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}-x-2y=t,\\ \dot{y}-2x-y=t,\end{cases}\quad x(0)=2,\quad y(0)=4.$

3. а) $\ddot{x}+2\dot{x}+10x=\sin 3t+6\cos 3t,\quad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=1;$

б) $\ddot{x}-2\dot{x}+x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}1, & t>4,\\ 2, & 2<t<4,\\ 0, & t<2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}+5x-2y=e^t,\\ \dot{y}-x+6y=0,\end{cases}\quad x(0)=1,\quad y(0)=0.$

4. а) $\ddot{x}+2\dot{x}+x=te^t,\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1;$

б) $\ddot{x}+49x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}3, & t>4,\\ -1, & 2<t<4,\\ 0, & t<2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}-3x-4y=6e^{2t},\\ \dot{y}+2x+3y=3e^{2t},\end{cases}\quad x(0)=2,\quad y(0)=0.$

5. а) $\ddot{x}+x=6e^{-t},\quad x(0)=3,\quad \dot{x}(0)=1;$

б) $\ddot{x}+\dot{x}-2x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1,\quad f(t)=\begin{cases}3, & 0<t<4,\\ 2, & 4<t<7,\\ 0, & t<0,\quad t>7;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}-x-4y=0,\\ \dot{y}-2x+y=9,\end{cases}\quad x(0)=1,\quad y(0)=0.$

6. а) $\ddot{x}-2\dot{x}-3x=2t,\quad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=1;$

б) $\ddot{x}+x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}2, & 0<t<1,\\ 4, & t>1,\\ 0, & t<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}-2x-5y=0,\\ \dot{y}-x+2y=2,\end{cases}\quad x(0)=1,\quad y(0)=1.$

7. а) $\ddot{x}-9x=\sin t-\cos t,\quad x(0)=-3,\quad \dot{x}(0)=2;$

б) $\ddot{x}-2\dot{x}-3x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}1, & t>4,\\ 2, & 2<t<4,\\ 0, & t<2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}+2x-5y=1,\\ \dot{y}-x-2y=1,\end{cases}\quad x(0)=0,\quad y(0)=2.$

8. а) $\ddot{x}+\dot{x}+x=t^2+2t,\quad x(0)=4,\quad \dot{x}(0)=-2;$

б) $\ddot{x}-4x=f(t),\quad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=1,\quad f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<1,\\ -1, & 1<t<2,\\ 0, & t<0,\quad t>2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}-3x-y=0,\\ \dot{y}+5x+3y=2,\end{cases}\quad x(0)=2,\quad y(0)=0.$

9. а) $\ddot{x}-3\dot{x}+2x=2e^t\cos\frac{t}{2},\quad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=0;$

б) $\ddot{x}-2\dot{x}+x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}2, & t>3,\\ -1, & 1<t<3,\\ 0, & t<1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}-x-y=0,\\ \dot{y}-4x-y=1,\end{cases}\quad x(0)=1,\quad y(0)=0.$

10. а) $\ddot{x}+4x=4e^{2t}+4t^2,\quad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=2;$

б) $\ddot{x}-x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}-1, & t>2,\\ 2, & 0<t<2,\\ 0, & t<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}-x+y=0,\\ \dot{y}-x-y=e^t,\end{cases}\quad x(0)=3,\quad y(0)=2.$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 8

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

Рекомендується (скориставшись одним або двома з наведених нижче джерел)

- вивчити теоретичні положення за **[1]**, гл. 1, 2, 3 (§§ 3.1-3.4), 4, 5, 6 (§§ 6.1-6.3); **[3]**, гл. 1-7, 8 (§§ 1-7), 11, 12 (§§ 1-7), 13, 15, 16 (§§ 1-9, 13-16, 18), 18 (§§ 1-9), 19 (§§ 1-7, 23, 24); **[7]**, гл. 1-2, 7-8;
- розібрати розв'язання задач у **[4]**, гл. V, §§ 1-6, 8-11, 14, 16; **[8]**, гл. 2, 6 (§§ 6.1-6.15), гл. 7 (§§ 7.1-7.10, 7.15-7.19);
- самостійно розв'язати задачі: **[4]**, №№ 812-814, 832, 834, 837, 843, 846, 859, 866, 870, 871, 874, 883, 886, 898, 906, 912, 932; **[10]**, №№ 5, 21, 28, 45, 51, 57, 82, 85, 93, 94, 99, 101, 112, 121, 126, 133, 146, 171, 173, 180, 193, 211, 220, 257, 260, 269, 272, 276, 296, 309, 329, 351, 357, 368, 369, 440, 442, 444, 449, 451, 456, 502, 505, 513, 519, 536-а, 636; **[11]**, №№ <u>6.1.</u>4, 6, 12, 18, 23, 24, <u>6.3.</u>4, 5, 6, 18, <u>6.4.</u>4, 14, 16, 24, 35, <u>6.5.</u>3, 5, 10, <u>6.6.</u>5, <u>6.7.</u>4, 10, 16, <u>6.8.</u>4, 9, <u>6.9.</u>4, 8, <u>6.10.</u>3, 4, <u>6.11.</u>2, 3, 4, 8, 59; **[13]**, гл. 18, №№ 66, 68, 78, 84, 87, 164, 191, 196, 226, 244, 258-260, 271, 312, 352, 361, 364, гл. 19, №№ 5, 7, 73, 157, 166, 225, 293.

<u>Приклад 8.1.</u> Куб, усі грані якого пофарбовані, розпилили на **1000** кубиків однакового розміру і ретельно їх перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання витягнутий кубик має рівно одну пофарбовану грань.

Розв'язання. При розпилюванні вихідного куба, який має 6 граней, на $n = 1000$ кубічних частин (загальне число можливих наслідків) утворюється $m = 6 \times 8 \times 8 = 384$ кубика з однією пофарбованою гранню (число сприятливих наслідків). Тому за класичною формулою $P(A) = \dfrac{m}{n}$ маємо

$$P(A) = \frac{384}{1000} = \frac{96}{250} = 0{,}384 .$$

<u>Приклад 8.2.</u> Колоду з **36** гральних карт ретельно перемішують і навмання витягують одразу **3** карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б одна "дама".

Розв'язання. Знайдемо ймовірність *протилежної* події, а саме: серед узятих карт немає жодної "дами". За класичною формулою маємо

$$q = \frac{C_4^0 \cdot C_{32}^3}{C_{36}^3}.$$

Тоді шукана ймовірність $p = 1 - q = 1 - \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = 0{,}3053$.

Приклад 8.3. Та ж сама задача, але карти витягують *по черзі*, одну за одною.

Розв'язання. У даному випадку, на відміну від попереднього, маємо не одну, а три *залежні* події. Тому за теоремою множення ймовірностей залежних подій

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$$

маємо $q = \frac{32}{36} \cdot \frac{31}{35} \cdot \frac{30}{34} = \frac{248}{357}$. Тоді $p = 1 - q = \frac{114}{357} = 0{,}3053$.

Приклад 8.4. У крузі радіуса R розміщений малий круг радіуса $r < R$. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута у великий круг, влучить також і в малий круг.

Розв'язання. За «геометричним» означенням ймовірності $P(A) = \frac{\Omega_A}{\Omega}$ маємо

$$p = \frac{S_r}{S_R} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}.$$

Приклад 8.5. Розрив електричної мережі може відбутися внаслідок відмови елемента E_1 або одночасно двох елементів E_2 й E_3, які відмовляють незалежно один від одного відповідно з ймовірностями $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = p_3 = 0{,}2$. Визначити ймовірність розриву електричної мережі.

Розв'язання. Мережа буде працювати (подія A), якщо жоден з елементів не відмовить. Тому за теоремою множення ймовірностей незалежних подій $P(A) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2 p_3) = 0{,}672$. Отже, ймовірність розриву мережі (подія $\overline{A}$)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}328.$$

<u>Приклад 8.6.</u> Стрілець робить один постріл по мішені, яка складається з круга й двох концентричних кілець. Ймовірності попадання в круг і кільця відповідно дорівнюють $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,2,$ $p_3 = 0,1$. Визначити ймовірність промаху.

Розв'язання. Мішень буде уражена (подія A), якщо відбудеться влучання або в круг, або в одне з кілець. Оскільки стрілець робить тільки один постріл, то ці події несумісні. За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$ маємо

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_3 = 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,6.$$

Отже, ймовірність промаху (подія $\overline{A}$) є $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,4$.

<u>Приклад 8.7.</u> Технічний пристрій містить три блоки, надійності яких відповідно дорівнюють $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,5,$ $p_3 = 0,3$. При відмові за проміжок часу t усіх трьох блоків пристрій напевно виходить з ладу, при відмові лише одного блока ймовірність виходу з ладу $0,2$, а при відмові двох блоків вона складає $0,6$. Знайти ймовірність того, що за проміжок часу t пристрій вийде з ладу.

Розв'язання. Нехай подія A – вихід пристрою з ладу за проміжок часу t – відбувається за умови появи однієї з несумісних подій: B_1 – усі три блоки за час t працювали безвідмовно, B_2 – за час t відмовив тільки один блок, B_3 – за час t відмовили два блоки, B_4 – за час t відмовили усі три блоки.
Ймовірності відмов кожного з блоків: $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,6 = 0,4$,
$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,5 = 0,5$, $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,3 = 0,7$. За теоремами додавання і множення ймовірностей знайдемо ймовірності появ подій B_i $(i = \overline{1, 4})$:

$$P(B_1) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,09,$$

$$P(B_2) = q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 +$$
$$+ 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36,$$

$$P(B_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 +$$
$$+ 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,41,$$

$$P(B_4) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{4} P(B_i) = 0{,}09 + 0{,}36 + 0{,}41 + 0{,}14 = 1$, то події B_i $(i = \overline{1,4})$ утворюють повну групу. Відповідні умовні ймовірності події A дорівнюють: $P_{B_1}(A) = 0$, $P_{B_2}(A) = 0{,}2$, $P_{B_3}(A) = 0{,}6$, $P_{B_4}(A) = 1$. За формулою повної ймовірності $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$ маємо

$$P(A) = 0{,}09 \cdot 0 + 0{,}36 \cdot 0{,}2 + 0{,}41 \cdot 0{,}6 + 0{,}14 \cdot 1 = 0{,}458.$$

Приклад 8.8. По каналу зв'язку передається один з двох можливих сигналів x_1 або x_2, причому сигнал x_2 передається вдвічі частіше, ніж сигнал x_1. Через перешкоди можливі викривлення: замість одного сигналу може бути прийнятий інший і навпаки. Властивості каналу зв'язку такі, що сигнал x_1 зазнає викривлень приблизно у **10 %** випадків, а сигнал x_2 - у **20 %**. Нехай був отриманий сигнал x_1. Яка ймовірність того, що був переданий саме цей сигнал?

Розв'язання. Нехай подія A - був отриманий сигнал x_1.

Висунемо гіпотези: H_1 - був переданий сигнал x_1; H_2 - був переданий сигнал x_2. Тоді $P(H_1) = \frac{1}{3}$, $P(H_2) = \frac{2}{3}$, $P_{H_1}(A) = \frac{9}{10}$, $P_{H_2}(A) = \frac{4}{5}$. Ймовірність отримати за даних умов сигнал x_1 за формулою повної ймовірності є

$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$. За відповідною формулою Байєса $P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}$ ймовірність того, що був переданий саме сигнал x_1 (апостеріорна ймовірність гіпотези H_1) є

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{5}{6}} = \frac{9}{25} = 0{,}36.$$

Таким чином, отримання сигналу x_1 дещо збільшує ймовірність гіпотези H_1 у порівнянні з її апріорним значенням $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

Приклад 8.9. Ймовірність того, що витрата електроенергії протягом однієї доби не перевищить установленої норми, дорівнює $p = 0{,}75$. Знайти ймовірність того, що у найближчі 6 діб витрата електроенергії протягом **4** діб не перевищить норми.

Розв'язання. Ймовірність перевитрати електроенергії протягом кожної доби стала і дорівнює $q = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$. Оскільки число спроб $n = 6$ невелике, а ймовірність $p = 0{,}75$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за формулою Бернуллі $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, де $k = 4$:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{4!\,2!} \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^2 = 0{,}297.$$

Приклад 8.10. Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно **70** разів у **243** спробах, якщо ймовірність появи цієї події у кожній спробі стала і дорівнює **0,25**.

Розв'язання. Оскільки число спроб $n = 243$ велике, а ймовірність $p = 0{,}25$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за локальною формулою Лапласа $P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$: $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = 1{,}37$, значення $\varphi(x) = \varphi(1{,}37) = 0{,}1561$ обчислюємо на калькуляторі за формулою $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ або знаходимо за таблицею у додатку 5,

$$P_{243}(70) = \frac{1}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} \cdot 0{,}1561 = 0{,}0231.$$

Приклад 8.11. Ймовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює $p = 0{,}2$. Визначити ймовірність того, що зі **100** конденсаторів за час T вийдуть з ладу від **14** до **26** конденсаторів.

Розв'язання. Скористаємось інтегральною формулою Лапласа $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, у якій покладемо $n = 100$, $k_1 = 14$, $k_2 = 26$,

$p = 0{,}2, \quad q = 1 - p = 0{,}8$. Обчисливши $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{14 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}5$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{26 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 1{,}5$, за таблицею у додатку 6 знаходимо $\Phi\,(1{,}5) = 0{,}4332$. Оскільки функція $\Phi\,(x)$ непарна, то $\Phi\,(-1{,}5) = -\,0{,}4332$. Тоді $P_{100}(14{,}26) = \Phi\,(1{,}5) - \Phi\,(-1{,}5) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664$.

Приклад 8.12. Знайти ймовірність того, що серед **30** навмання відібраних людей знайдеться хоча б одна людина, що народилася 1 січня. Якою повинна бути мінімальна чисельність групи людей, щоб з імовірністю не менше **50%** можна було стверджувати, що серед них знайдеться хоча б одна людина, що народилася 1 серпня? Прийняти, що дні народження *розподілені рівномірно*, тобто немає високосних років, близнюків, народжуваність не залежить від дня тижня, місяця, пори року, країни проживання та інших факторів.

Розв'язання. Ймовірність окремої особи народитися у певний день року складає $p = \dfrac{1}{365}$ і є доволі малою. Тому шукану ймовірність обчислимо за допомогою формули Пуассона $P_n(k) \sim \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ при $\lambda = np = 30 \cdot \dfrac{1}{365} = 0{,}08219$:

$P(A) = 1 - P_{30}(0) = 1 - \dfrac{e^{-\,0{,}08219}}{0!} \approx 1 - 0{,}9211 = 0{,}0789$. З іншого боку маємо $P(A) = 1 - (1-p)^n = 1 - \left(\dfrac{364}{365}\right)^{300} \approx 0{,}0790$. Отже, як бачимо, результати практично співпадають. При $n = 400$ ймовірність зростає до **0,6658**, а при $n = 600$ вона складає вже **0,807**, тобто приблизно **81**%. Мінімальну чисельність людей, при якій ймовірність збігу з певною датою принаймні одного дня народження складає **50**%, знайдемо з нерівності $1 - \left(\dfrac{364}{365}\right)^n \geq 0{,}5$:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^n \leq 0{,}5 \Rightarrow n \ln\left(\frac{364}{365}\right) \geq \ln 0{,}5 \Rightarrow n \geq \left[\frac{-\,0{,}6931}{-\,0{,}002743}\right] = 253\,.$$

Отже, $n = 253$. Це число помітно більше, ніж половина днів у році (**365/2 = 182.5**); так відбувається через те, що у решти членів групи дні народження можуть збігатися між собою, і це зменшує ймовірність збігу одного з них із заданим днем народження.

<u>Приклад 8.13.</u> Ймовірність прийому радіосигналу за певних умов дорівнює **0,75**. Скільки сигналів повинно бути передано, щоб ймовірність відхилення частоти прийнятих сигналів від ймовірності прийому не більш, ніж на **0,035**, дорівнювала **0,95**?

Розв'язання. Ймовірність того, що модуль відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ від сталої ймовірності p не перевищує *заданого* числа $\varepsilon > 0$, є

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \le \varepsilon \right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right).$$

Покладемо $p = 0{,}75, \quad q = 1 - p = 0{,}25, \quad \varepsilon = 0{,}035, \quad P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \le \varepsilon \right) = 0{,}95$.

Отримаємо рівняння $0{,}95 = 2\Phi\left(0{,}035 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}75 \cdot 0{,}25}} \right)$ або, після невеликого перетворення, $\Phi\left(0{,}035 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}1875}} \right) = 0{,}475$. За таблицею у додатку 6 знаходимо $0{,}475 = \Phi(1{,}96)$, звідки маємо $0{,}035 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}1875}} = 1{,}96$.

Отже, $n = 0{,}1875 \cdot \left(\frac{1{,}96}{0{,}035} \right)^2 = 588$.

<u>Приклад 8.14.</u> Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x_i	13	18	19	x_4	25
p_i	0,18	p_2	0,22	0,20	0,15

Знайти x_4, p_2, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо $M(X) = 18{,}77$.

Розв'язання. Для відшукання p_2 використаємо умову $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, тобто

$0{,}18 + p_2 + 0{,}22 + 0{,}2 + 0{,}15 = 1$, звідки знаходимо $p_2 = 0{,}25$.

Тоді маємо рівняння

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 13 \cdot 0{,}18 + 18 \cdot 0{,}25 + 19 \cdot 0{,}22 + x_4 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}15 = 18{,}77$$

або $14{,}77 + 0{,}2 \cdot x_4 = 18{,}77$, звідки знаходимо $x_4 = \dfrac{4}{0{,}2} = 20$.

Отже, закон розподілу дискретної величини має вигляд

x_i	13	18	19	20	25
p_i	0,18	0,25	0,22	0,2	0,15

Тоді

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - [M(X)]^2 = = 13^2 \cdot 0{,}18 + 18^2 \cdot 0{,}25 + 19^2 \cdot 0{,}22 + 20^2 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ 25^2 \cdot 0{,}15 - (18{,}77)^2 = 364{,}59 - 352{,}3129 = 12{,}28,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 3{,}50.$$

Приклад 8.15. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 8; \\ (x-8)^3, & 8 < x \le 9; \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$; в) ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $[8{,}25;\ 8{,}75]$.

Розв'язання.

а) Щільність розподілу $f(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 8, \\ 3(x-8)^2, & 8 < x \le 9, \\ 0, & x > 9; \end{cases}$$

б) оскільки $f(x)$ ненульова лише на проміжку $(8,9]$, то користуємось формулами $M(X)=\int\limits_a^b x\,f(x)dx$, $D(X)=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$. Отже, маємо

$$M(X)=\int\limits_8^9 x\cdot 3(x-8)^2dx=3\int\limits_8^9 x(x-8)^2dx=\left|\begin{array}{lll} x-8=t & & \\ x=t+8 & & \\ x & 8 & 9 \\ t & 0 & 1 \end{array}\right|=$$

$$=3\int\limits_0^1 (t+8)\,t^2dt=3\int\limits_0^1\left(t^3+8t^2\right)dt=3\left(\frac{t^4}{4}+8\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=3\left(\frac{1}{4}+\frac{8}{3}\right)=8{,}75,$$

$$D(X)=\int\limits_8^9 x^2\cdot 3(x-8)^2dx-[M(X)]^2=3\int\limits_8^9\left(x^4-16x^3+64x^2\right)dx-8{,}75^2=$$

$$=3\left(\frac{x^5}{5}-4x^4+\frac{64}{3}x^3\right)\Bigg|_8^9-76{,}56=\frac{383}{5}-76{,}56=0{,}04,$$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=0{,}2$;

в) Ймовірність попадання неперервної випадкової величини X в заданий інтервал $(a;b)$ обчислюється за формулою $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$. Отже, в даному випадку

$$P(8{,}25<X<8{,}75)=F(8{,}75)-F(8{,}25)=0{,}75^3-0{,}25^3=0{,}406.$$

Приклад 8.16. Гармата робить **4** постріли по мішені з однієї і тієї ж позиції. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює **0,8**. Скласти закон розподілу кількості влучень, знайти середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення кількості влучень.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X – кількість влучень у мішень. Її можливі значення: $x_1=0,\quad x_2=1,\ x_3=2,\quad x_4=3,\quad x_5=4$.

Результати пострілів не залежать один від одного, ймовірність влучення при одному пострілі є сталою величиною. Це означає, що випадкова величина X розподілена за біномним законом.

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $n=4,\quad k=0,1,2,3,4;\quad p=0{,}8;\quad q=1-p=0{,}2.$

Обчислимо

$$P(0)=C_4^0 p^0 q^4=(0,2)^4=0,0016;$$

$$P(1)=C_4^1 pq^3=4\cdot 0,8\cdot 0,2^3=0,0256;$$

$$P(2)=C_4^2 p^2 q^2=6\cdot 0,8^2\cdot 0,2^2=0,1536;$$

$$P(3)=C_4^3\cdot p^3\cdot q=4\cdot 0,8^3\cdot 0,2=0,4096;$$

$$P(4)=C_4^4 p^4 q^0=0,8^4=0,4096.$$

Перевіримо вірність обчислень:

$$P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)=0,0016+0,0256+0,1536+0,4096+0,4096=1.$$

Шуканий закон розподілу має вигляд:

x	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Математичне сподівання (середнє значення) кількості влучень $M(X)=np=4\cdot 0,8=3,2$, дисперсія $D(X)=npq=4\cdot 0,8\cdot 0,2=0,64$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,64}=0,8$.

<u>Приклад 8.17.</u> Електронний пристрій складається з **1000** елементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови будь-якого елемента протягом одного року дорівнює **0,002**. Знайти імовірність того, що за рік відмовлять не менше трьох елементів.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X - число елементів, які відмовили. За законом Пуассона $P_n(k)=\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$.

Вважаючи $n=1000,\ p=0,002$, одержимо $\lambda=np=1000\cdot 0,002=2$.

Ймовірність відмови не менш трьох елементів

$$P(X\ge 3)=\sum_{k=3}^{\infty}P(X=k)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2).$$

$P(X=0)=P_{1000}(0)=\dfrac{2^0\cdot e^{-2}}{0!}=0,13534$, $P(X=1)=P_{1000}(1)=\dfrac{2^1\cdot e^{-2}}{1!}=0,27068$,

$P(X=2)=P_{1000}(2)=\dfrac{2^2\cdot e^{-2}}{2!}=0,27068$.

Тоді $P(X \geq 3) = 1 - 0{,}13534 - 2 \cdot 0{,}27068 = 0{,}3233$.

<u>Приклад 8.18.</u> Автобуси деякого маршруту рухаються точно за розкладом. Проміжок руху **15** хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме черговий автобус менше **10** хвилин.

Розв'язання. Пасажир може підійти до зупинки у будь-який момент. Тому час очікування можна вважати випадковою величиною X, яка рівномірно розподілена у інтервалі руху автобусів.

Щільність розподілу $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, де $(b-a)$ - довжина інтервалу, у якому знаходяться ймовірні значення X. У даному випадку $b - a = 15$, тому $f(x) = \dfrac{1}{15}$. Оскільки автобуси йдуть точно за розкладом (тобто наступний прийде не раніше означеного часу), то пасажир чекатиме його менше 10 хвилин, якщо $5 < X < 15$.

Ймовірність попадання випадкової величини в деякий інтервал обчислюється за формулою $P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, отже,

$$P(5 < X < 15) = \int\limits_{5}^{15} \frac{1}{15}dx = \frac{x}{15}\Bigg|_{5}^{15} = \frac{2}{3}.$$

<u>Приклад 8.19.</u> Середній час безвідмовної роботи радіоелектронного обладнання літака за статистичними даними складає **200** годин. Знайти ймовірність відмови обладнання протягом **10** годин польоту.

Розв'язання. Час T безвідмовної роботи обладнання є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом $F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0, \end{cases}$

де $\lambda -$інтенсивність відмов (кількість відмов за одиницю часу). У даному випадку $t = 10,\ \ \lambda = \dfrac{1}{200}$ і ймовірність відмови за час t буде складати

$P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{10}{200}} = 0{,}049$.

Приклад 8.20. Найбільший поперечний діаметр заготовок деталей, що поступають в обробку, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з середнім значенням **5** см і середнім квадратичним відхиленням **0,3** см. Написати диференціальну функцію розподілу, побудувати її схематичний графік, вказавши його характерні точки, і знайти ймовірність того, що: а) діаметр взятої навмання заготовки буде знаходитись в межах від **4,7** до **6,2** см; б) відхилення діаметра заготовки від середнього не перевищить за абсолютною величиною **0,6** см.

Розв'язання. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ – найбільший поперечний діаметр заготовки. Оскільки вона розподілена нормально, то диференціальна функція розподілу виражається формулою $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}$, де $\boldsymbol{a}$ – математичне сподівання (середнє значення), $\boldsymbol{\sigma}$ – середнє квадратичне відхилення. Функція

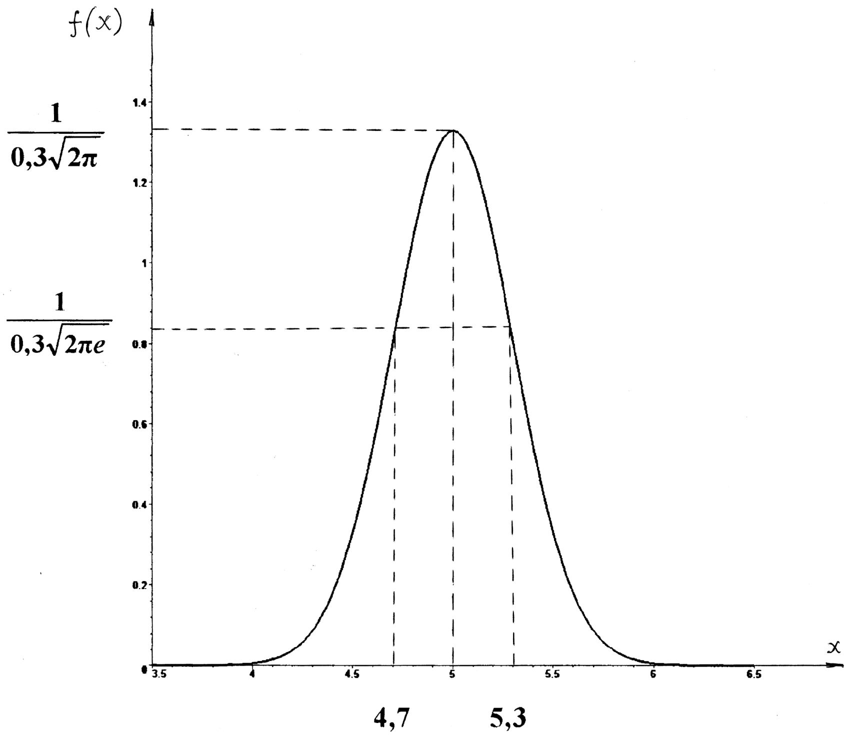

Рис. 8.1

досягає максимуму $\boldsymbol{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}}$ в точці $\boldsymbol{x=a}$, її графік має дві точки перегину $\boldsymbol{\left(a\pm\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)}$. В даному випадку $\boldsymbol{a=5}$, $\boldsymbol{\sigma=0,3}$. Тому

$f(x)=\dfrac{1}{0{,}3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{0{,}18}}$, максимум $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\approx 1{,}33$ в точці $x=5$, точки перегину $(4{,}7;\,0{,}81)$ й $(5{,}3;\,0{,}81)$. Графік функції показаний на рис. 8.1.

а) Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (α,β)

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – інтегральна функція Лапласа (її значення наведені у додатку 6).

Оскільки $\alpha=4{,}7,\quad \beta=6{,}2$, то маємо

$$P(4{,}7<X<6{,}2)=\Phi\left(\frac{6{,}2-5}{0{,}3}\right)-\Phi\left(\frac{4{,}7-5}{0{,}3}\right)=\Phi(4)+\Phi(1)=0{,}3413+0{,}5=0{,}8413;$$

б) ймовірність того, що модуль відхилення X від її математичного сподівання a не перевищить заданого числа $\delta>0$, $P(\,|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$.

У даному випадку $\delta=0{,}6$, отже

$$P(|X-5|<0{,}6)=2\Phi\left(\frac{0{,}6}{0{,}3}\right)=2\Phi(2)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544\,.$$

<u>Приклад 8.21.</u> З великої кількості результатів випробувань випадковим чином відібрані наступні: 2; 3; 2; 4; 5; 2; 3; 3; 6; 4; 5; 4; 6; 5; 3; 4; 2; 4; 3; 3; 5; 4; 6; 4; 5; 3; 4; 3; 2; 4. Потрібно:

а) скласти дискретний статистичний розподіл вибірки;

б) знайти обсяг вибірки;

в) скласти розподіл відносних частот;

г) побудувати полігон частот;

д) скласти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік;

е) знайти незміщені оцінки числових характеристик генеральної сукупності.

Розв'язання. а) Розташуємо різні значення ознаки в порядку їх зростання і під кожним з них запишемо їх частоти. Отримаємо дискретний статистичний розподіл вибірки:

x_i	2	3	4	5	6
n_i	5	8	9	5	3

де x_i - варіанти, n_i - частоти варіант x_i;

б) сума частот усіх варіант повинна дорівнювати обсягу вибірки. В даному прикладі об’єм вибірки дорівнює $n = 5+8+9+5+3 = 30$;

в) знайдемо відносні частоти:

$$W_1 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};\ W_2 = \frac{8}{30} = \frac{4}{15};\ W_3 = \frac{9}{30} = \frac{3}{10};\ W_4 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};\ W_5 = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}.$$

Запишемо шуканий розподіл відносних частот:

x_i	2	3	4	5	6
W_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$

Контроль: $\frac{1}{6} + \frac{4}{15} + \frac{3}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = 1$;

г) точки з координатами (x_i, n_i) з’єднаємо послідовними відрізками. Отримаємо ламану лінію, яка називається *полігоном частот* (рис. 8.2);

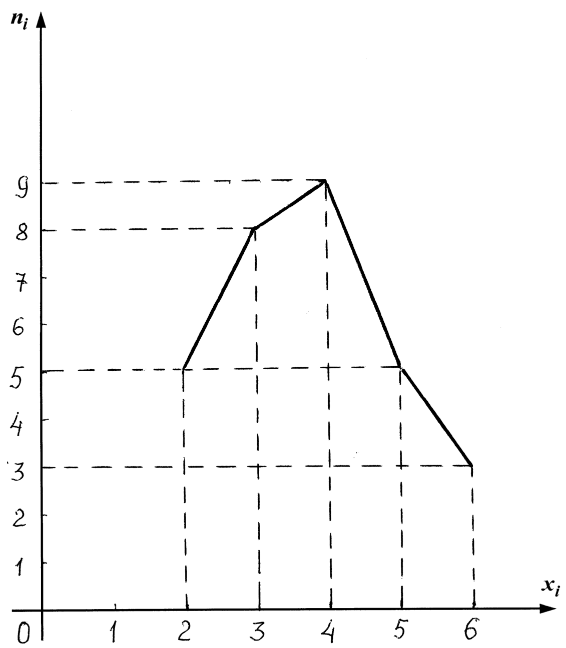

Рис. 8.2

д) згідно з означенням емпіричною функцією розподілу називається функція виду $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де n – обсяг вибірки, n_x– сума частот варіант, менших ніж x.

Емпірична функція є оцінкою функції розподілу генеральної сукупності. Найменша з варіант дорівнює 2, тому при $x \le 2,$ $n_x = 0$ й $F^*(x) = 0$. Значення $X < 3$, а саме, $X = x_1 = 2$ спостерігалося 5 разів. Тоді для $2 < x \le 3$ $n_x = 5$ й $F^*(x) = \frac{5}{30}$. Значення $X < 4$, а саме, $X = 2$, $X = 3$ спостерігалося $5 + 8 = 13$ разів. Тому для $3 < x \le 4$ $n_x = 13$ й $F^*(x) = \frac{13}{30}$. Аналогічно міркуючи, отримуємо: для $5 < x \le 6$ $n_x = 5 + 8 + 9 + 5 = 27$ й $F^*(x) = \frac{27}{30}$,

для $x > 6$ $n_x = 5 + 8 + 9 + 5 + 3 = 30$ й $F^*(x) = \frac{30}{30} = 1$.

Таким чином, шукана емпірична функція розподілу має вигляд

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ \frac{5}{30} & \text{при } 2 < x \le 3, \\ \frac{13}{30} & \text{при } 3 < x \le 4, \\ \frac{22}{30} & \text{при } 4 < x \le 5, \\ \frac{27}{30} & \text{при } 5 < x \le 6, \\ 1 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

Її графік наведений на рис. 8.3.

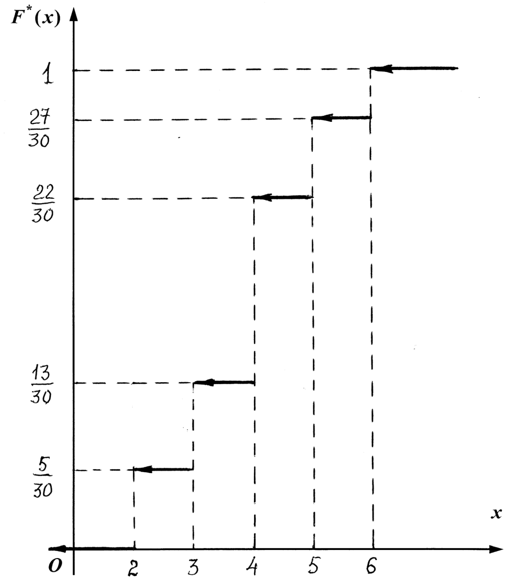

Рис. 8.3

е) незміщеною оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності є вибіркова середня

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{2\cdot 5 + 3\cdot 8 + 4\cdot 9 + 5\cdot 5 + 6\cdot 3}{30} = \frac{113}{30} \approx 3{,}77,$$

а незміщеною оцінкою дисперсії – виправлена вибіркова дисперсія $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$, де D_B – вибіркова дисперсія (зміщена оцінка дисперсії).

Оскільки $D_B = \overline{x_B^2} - \left(\overline{x}_B\right)^2 = \frac{2^2\cdot 5 + 3^2\cdot 8 + 4^2\cdot 9 + 5^2\cdot 5 + 6^2\cdot 3}{30} - \left(\frac{113}{30}\right)^2 \approx 1{,}456$,

то виправлена вибіркова дисперсія є $s^2 = \frac{30}{29}\cdot 1{,}456 \approx 1{,}495$, а виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = \sqrt{1{,}495} \approx 1{,}223$.

<u>Приклад 8.22.</u> Надані вибіркові значення контрольованого параметра деякого технологічного процесу:

18,0; 12,0; 11,9; 1,9; 5,5; 14,6; 4,8; 5,6; 4,8; 10,9; 9,7; 7,2; 12,4; 7,6; 9,7; 11,2; 4,2; 4,9; 9,6; 3,2; 8,6; 4,6; 6,7; 8,4; 6,8; 6,9; 17,9; 9,6; 14,8; 15,8. Потрібно:

а) Скласти групований (інтервальний) розподіл вибірки з початком $x_0 = 1$ і довжиною часткового інтервалу $h = 3$;

б) побудувати гістограму частот.

Розв'язання.

а) Для складання інтервального розподілу складемо таблицю, у першому рядку якої розташуємо в порядку зростання інтервали, довжина кожного з яких $h = 3$. У другому рядку запишемо кількість значень ознаки у вибірці, що потрапили в цей інтервал (тобто суму частот варіант, які потрапили у відповідний інтервал):

$(x_i; x_{i+1})$	**1-4**	**4-7**	**7-10**	**10-13**	**13-16**	**16-19**
n_i	**2**	**10**	**8**	**5**	**3**	**2**

Обсяг вибірки $n = 2 + 10 + 8 + 5 + 3 + 2 = 30$;

б) для побудови гістограми частот на осі абсцис відкладаємо часткові інтервали, на кожному з них будуємо прямокутники висотою $\frac{n_i}{h}$, де n_i – сума частот варіант i-го часткового інтервалу, h – крок (довжина інтервалу). Таким чином, гістограма частот має вигляд

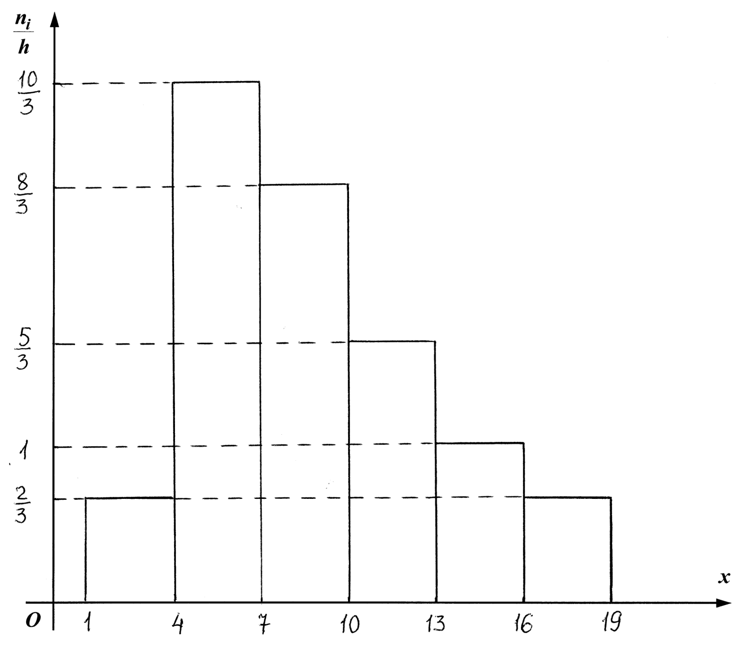

Рис. 8.4

Зауваження. Для побудови емпіричної функції розподілу і відшукання точкових оцінок ряду необхідно перетворити його до дискретного вигляду за формулою $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Отримаємо

x_i^*	2,5	5,5	8,5	11,5	14,5	17,5
n_i	2	10	8	5	3	2

<u>Приклад 8.23.</u> З результатів вимірювань границі текучості великої партії зразків деякого сорту сталі з різних плавок випадковим чином відібрані **100**. Середнє значення границі текучості у вибірці виявилося рівним $\mathbf{31{,}33\ кГ/мм^2}$. Вважаючи границю текучості випадковою величиною X, розподіленою за нормальним законом, знайти з надійністю $\gamma = 0{,}95$ довірчий інтервал для середнього значення $a_Г$ границі текучості зразків усієї партії, якщо середнє квадратичне відхилення границі текучості для всієї партії відоме і складає $\mathbf{3{,}19\ кГ/мм^2}$.

Розв'язання.

За умовою задачі $n = 100,\ \overline{x}_B = 31{,}33,\ \gamma = 0{,}95,\ \sigma_Г = 3{,}19$. Довірчий інтервал для математичного сподівання $a_Г$ нормально розподіленої кількісної ознаки X генеральної сукупності при відомому середньоквадратичному відхиленні $\sigma_Г$ визначається нерівністю

$$\overline{x}_B - t\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}},$$

де t заходиться з умови $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$. За таблицею у додатку 6 знаходимо $t = 1{,}96$, якому відповідає значення функції Лапласа $\frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. Тоді шуканий довірчий інтервал є

$$31{,}33 - \frac{1{,}96 \cdot 3{,}19}{\sqrt{100}} < a < 31{,}33 + \frac{1{,}96 \cdot 3{,}19}{\sqrt{100}} \quad \text{або} \quad 30{,}70 < a < 31{,}96.$$

<u>Приклад 8.24.</u> З генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом, витягнута вибірка:

$(x_i; x_{i+1})$	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240	240-260	260-280
n_i	1	4	10	14	12	6	2	1

Знайти з надійністю γ довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання, середньоквадратичного відхилення і дисперсії ознаки X генеральної сукупності.

Розв'язання. Якщо генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma_Г$ невідоме, але відомі вибіркова середня $\overline{x}_B$ і виправлене вибіркове значення s, то довірчий інтервал для математичного сподівання ознаки X генеральної сукупності відшукується за допомогою розподілу Стьюдента і має вигляд

$$\overline{x}_B - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

де значення t_γ знаходиться з таблиці у додатку 7.

Перетворимо заданий інтервальний розподіл до дискретного вигляду за формулою $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Отримаємо

x_i^*	130	150	170	190	210	230	250	270
n_i	1	4	10	14	12	6	2	1

Об'єм вибірки $n = 50$. Обчислимо вибіркову середню:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i}{n} = \frac{1}{50}\big(130\cdot 1 + 150\cdot 4 + 170\cdot 10 + 190\cdot 14 + 210\cdot 12 + 230\cdot 6 + 250\cdot 2 +$$
$$+ 270\cdot 1\big) = 195{,}2.$$

Оскільки вибіркова дисперсія є

$$D_B = \overline{x_B^2} - \left(\overline{x}_B\right)^2 = \frac{1}{50}\big(130^2\cdot 1 + 150^2\cdot 4 + 170^2\cdot 10 + 190^2\cdot 14 + 210^2\cdot 12 + 230^2\cdot 6 +$$

$+ 250^2\cdot 2 + 270^2\cdot 1\big) - 195{,}2^2 = 812{,}96$, то вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_B = \sqrt{D_B} = 28{,}5$, виправлена вибіркова дисперсія $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{50}{49}\cdot 813 \approx 829{,}6$, а виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $s=\sqrt{829{,}6}\approx 28{,}8$. Значення t_γ знаходимо з таблиці у додатку 7 при $n=50$ й $\gamma=0{,}95$: $t_\gamma=2{,}009$. Отже, отримуємо

$$195{,}2-\frac{2{,}009\cdot 28{,}8}{\sqrt{50}}<a_\Gamma<195{,}2+\frac{2{,}009\cdot 28{,}8}{\sqrt{50}} \quad \text{або} \quad 187{,}0<a_\Gamma<203{,}4;$$

На практиці довірчі інтервали для середньоквадратичного відхилення або дисперсії доводиться будувати або при оцінюванні точності вимірювальної методики і апаратури або, наприклад, при оцінюванні технологічного розкиду деякого параметра промислової продукції.

Довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення σ_Γ ознаки X генеральної сукупності визначається нерівністю

$$s(1-q)<\sigma_\Gamma<s(1+q),$$

де значення q знаходиться з таблиці у додатку 8. При $n=50$ й $\gamma=0{,}95$ з вказаної таблиці знаходимо $q=0{,}21$. Отже, отримуємо

$$28{,}8\cdot(1-0{,}21)<\sigma_\Gamma<28{,}8\cdot(1+0{,}21) \quad \text{або} \quad 22{,}75<\sigma_\Gamma<34{,}85.$$

Зауваження. Якщо $q>1$, то довірчий інтервал $0<\sigma_\Gamma<s(1+q)$;

Довірчий інтервал для дисперсії може бути отриманий на підставі наступного міркування. Оскільки дисперсія є квадрат середнього квадратичного відхилення ($D_\Gamma=\sigma_\Gamma^2$), то довірчий інтервал, який покриває генеральну дисперсію з заданою надійністю γ, має вигляд

$$s^2(1-q)^2<D_\Gamma<s^2(1+q)^2, \text{ якщо } q<1 \text{ й } 0<D_\Gamma<s^2(1+q)^2, \text{ якщо } q>1.$$

В нашому випадку $22{,}75^2<D_\Gamma<34{,}85^2$ або $517{,}6<D_\Gamma<1214{,}5$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Розв’язати задачу.

1. При дослідженні **12** зразків деякого сплаву було виявлено, що **3** зразка містять 0,3% сторонньої домішки, **4** зразка – 0,2% і 5 зразків – 0,1%. Навмання вибрали **2** зразка. Знайти ймовірність того, що вони будуть містити один і той самий відсоток домішки.

2. У першій урні **5** білих і **3** чорних кулі, у другій – **6** білих і **9** чорних. З другої урни випадковим чином перекладають у першу дві кулі, після чого з першої урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля – біла?

3. Абонент забув останню цифру номера телефону і набирає її навмання. Яка ймовірність того, що він додзвониться не більше, ніж за три спроби?

4. Випадковим чином відібрані **30** людей. Яка ймовірність того, що хоча б у двох будь-яких з них дні народження співпадають? Прийняти, що дні народження розподілені рівномірно. *Вказівка:* при обчисленні факторіалів застосувати формулу Стірлінга $\ln n! \approx n(\ln n - 1) + \frac{1}{2}\ln(2\pi n)$.

5. Є три однакових за видом ящика. У першому ящику **23** білих кулі, у другому – **9** білих і **14** чорних куль, у третьому – **23** чорних кулі. З вибраного навмання ящика вийняли білу кулю. Знайдіть ймовірність того, що куля вийнята з другого ящика.

6. Ймовірність влучення в мішень для першого стрільця дорівнює **0,7**, а для другого - **0,8**. Кожен зі стрільців робить по одному пострілу і у випадку промаху стріляє ще раз. Знайти ймовірність того, що в результаті в мішені буде дві пробоїни.

7. У урну, яка містить **3** кулі, кинули білу кулю, після чого навмання витягли одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля – біла, якщо всі припущення про початковий склад куль (за кольором) рівноможливі.

8. Пасажир підходить до зупинки автобусів двох маршрутів. Інтервал руху автобусів 1-го маршруту складає **19** хвилин, а 2-го маршруту – **21** хвилину. Вважаючи, що пасажира влаштує автобус будь-якого з маршрутів, знайдіть ймовірність того, що він виїде з зупинки не пізніше, ніж через **6** хвилин.

9. Є **13** монет, з яких **3** штуки браковані: внаслідок заводського браку на цих монетах з обох сторін викарбуваний герб. Навмання обрану монету кидають **9**

разів, причому при всіх киданнях вона лягає гербом вгору. Знайдіть ймовірність того, що була обрана монета з двома гербами.

10. Причиною розриву електричного ланцюга служить вихід з ладу елемента $\boldsymbol{R_1}$ або одночасний вихід з ладу елементів $\boldsymbol{R_2}$ і $\boldsymbol{R_3}$. Елементи можуть вийти з ладу незалежно один від одного з вірогідністями відповідно **0,1**, **0,2** і **0,3**. Знайти ймовірність розриву електричного ланцюга.

Завдання 2. Розв’язати задачу.

1. Змішали лимони з трьох контейнерів. У першому містилося **25%** всіх лимонів, у другому – **30%**, в третьому – **45%**. Знайти ймовірність того, що серед **200** навмання взятих лимонів не менше **90** стиглих, якщо в першому контейнері таких лимонів було **60%**, у другому – **65%**, в третьому – **40%**.

2. По каналу зв'язку передається **6** повідомлень. Кожне повідомлення може бути спотворено завадами з імовірністю **0.2** незалежно від інших. Знайти ймовірність того, що не менше **3** з **6** повідомлень передані спотвореними.

3. Число дзвінків із замовленнями, які надходять до фірми протягом однієї години, розподілено за законом Пуассона з параметром $\boldsymbol{\lambda = 2}$. Знайти ймовірність того, що за першу годину роботи фірми замовлень буде менше двох, а за другу – не менше двох.

4. Імовірність того, що хоча б один з **4** комп'ютерів в інтернет-кафе зайнятий, становить **0,9984**. Яка ймовірність того, що в даний момент буде зайнято **82** комп'ютера зі **100**?

5. Тест складається з **10** запитань, на кожне з яких пропонується **4** варіанта відповіді. Яка ймовірність того, що студенту вдасться вгадати правильні відповіді щонайменше на **6** запитань?

6. Імовірність того, що частинка, яка вилетіла з радіоактивного джерела, буде зареєстрована лічильником, дорівнює **0,0001**. За час спостереження з джерела вилетіло **30 000** частинок. Знайти ймовірність того, що лічильник зареєстрував не менше **4** частинок.

7. Імовірність настання події A в кожному з незалежних випробувань постійна і дорівнює **0,3**. Відомо, що ймовірність настання події A не менше **600** й не більше m разів, при **2 100** випробуваннях дорівнює **0,8469**. Знайти m.

8. Ймовірність промаху при одному пострілі становить **0,2**. При якому мінімальному числі пострілів ймовірність того, що буде зроблено не менше **2** промахів, становитиме не менше **0,9**?

9. Знайти ймовірність того, що з **600** мешканців села хоча б троє народилися 20 травня. Прийняти, що дні народження розподілені рівномірно.

10. Імовірність прихованого дефекту виробу, не виявленого технічним контролем, дорівнює **0,02**. Вироби укладаються в коробки по **100** штук. Яка ймовірність того, що в окремо взятій коробці буде не більше двох дефектних виробів?

Завдання 3. Скласти ряд розподілу вказаної випадкової величини X і знайти її функцію розподілу $F(x)$, обчислити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

1. На шляху вершника **4** перешкоди, які він може подолати з імовірностями відповідно $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,4$, $p_4 = 0,5$. Випадкова величина X – число подоланих перешкод.

2. Імовірність безвідмовної роботи впродовж гарантійного терміну для приладів першого типу дорівнює **0,9**, для приладів другого типу – **0,7**, для приладів третього типу – **0,8**. Випадкова величина X – число приладів, які безвідмовно пропрацювали гарантійний термін, серед трьох приладів різних типів.

3. В урні міститься **6** куль, **4** з яких – білі. Навмання взято одразу **3** кулі. Випадкова величина X – число білих куль серед узятих.

4. При усталеному технологічному процесі підприємство випускає **2/3** виробів вищого гатунку і **1/3** першого гатунку. Випадкова величина X – число виробів вищого гатунку з чотирьох, взятих навмання.

5. З **20** деталей, серед яких **5** нестандартних, для перевірки якості навмання відібрані **4** деталі. Випадкова величина X – число нестандартних деталей серед відібраних.

6. За статистичними даними хоча б одна пожежа, яка потребує виїзду пожежної команди, за даний період часу може виникнути у трьох районах міста відповідно з імовірностями $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$. Випадкова величина X – число районів, у які за даний період пожежна команда виїжджала хоча б один раз (хибні виклики не враховуються).

7. Гра полягає в накиданні кілець на кілочок. Два гравці отримують по **4** кільця і одночасно кидають по одному з цих кілець до першого влучення на кілочок. Ймовірність влучення при одному кидку для першого гравця складає **0,2**, а для другого – **0,3**. Випадкова величина X – кількість зроблених кидків.

8. Прилад комплектується з двох вузлів, імовірності браку яких становлять відповідно **0,1** та **0,05**. Прилад вважається бракованим, якщо бракований хоча б один з його вузлів. Навмання відібрані **4** прилади. Випадкова величина X – число бракованих приладів серед відібраних.

9. Гральну кістку кидають **3** рази. Випадкова величина X – число випадінь шістки.

10. На спортивних змаганнях за жеребом з **10** юнаків та **5** дівчат відбирають **3** членів суддівської бригади. Випадкова величина X – число дівчат серед відібраних.

Завдання 4. Дана щільність розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини X. Знайти C, функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ та ймовірність попадання випадкової величини X у відрізок $[M(X)-\sigma(X),\ M(X)+\sigma(X)]$.

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{1+x^2}, & x\in\left[0,\sqrt{3}\right]; \\ 0, & x\notin\left[0,\sqrt{3}\right]. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}, & x\in\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]; \\ 0, & x\notin\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{x}, & x\in\left[\dfrac{1}{e},e\right]; \\ 0, & x\notin\left[\dfrac{1}{e},e\right]. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} C(2x-x^2), & x\in[0,1]; \\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} Cx(1-x), & x\in[0,1]; \\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} C\sqrt[3]{1-x}, & x\in[0,1]; \\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} C\ln x, & x\in[1,e]; \\ 0, & x\notin[1,e]. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{(1+x)^2}, & x\in[0,1]; \\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} C\sqrt{1-x}, & x\in[0,1]; \\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} C\left(1-\dfrac{x}{3}\right), & x\in[0,3]; \\ 0, & x\notin[0,3]. \end{cases}$

Завдання 5. Розв’язати задачу.

1. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X дорівнюють відповідно **30** і **4**. Знайти ймовірність того, що X у п'яти випробуваннях три рази прийме значення з інтервалу $(29, 31)$.

2. Встановлено, що тривалість безвідмовної роботи двох верстатів, що працюють незалежно один від одного, є випадковими величинами, розподіленими за показниковим законом з параметрами $\lambda_1 = 0{,}001$, $\lambda_2 = 0{,}002$. Відомо також, що ймовірність безвідмовної роботи обох верстатів протягом не менше t годин складає **0,1225**. Знайти час t.

3. Світлофор, встановлений на деякому перехресті, дозволяє рух транспорту (зелене світло) протягом 1 хвилини і забороняє (червоне світло) протягом 45 секунд. Знайти ймовірність того, що автомобіль, який під'їхав до перехрестя у випадковий момент часу, проїде на зелене світло.

4. Вимірювання дальності до об'єкта супроводжується систематичними і випадковими помилками. Систематична помилка складає **50** м у бік заниження дальності, випадкові ж помилки підпорядковуються нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 100$ м. Знайти ймовірність вимірювання дальності з помилкою, що за абсолютною величиною не перевищує **150** м.

5. Три робота на автоматичній лінії по зварюванню кузовів автомобілів працюють незалежно один від одного. Тривалості їх безвідмовної роботи є випадковими величинами, розподіленими за показниковим законом з параметрами $\lambda_1 = 0{,}01$, $\lambda_2 = 0{,}02$, $\lambda_3 = 0{,}03$. Знайти ймовірність того, що протягом **8** годин з моменту увімкнення лінія зупиниться через одночасну відмову двох роботів.

6. Час виготовлення деталі – випадкова величина, що рівномірно розподілена на відрізку $[4, 6]$ хв. Виготовлено **4** деталі. Знайти ймовірність того, що час виготовлення кожної з деталей відхиляється від середнього не більше ніж на **40** сек.

7. Кулька, яку виготовляє автомат, вважається стандартною, якщо відхилення її диаметра від проектного не перевищує **2** мм. Випадкові відхилення диаметрів кульок підпорядковуються нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням **1,6** мм і математичним сподіванням, що дорівнює нулю. Який відсоток стандартних кульок виготовляє автомат?

8. Час безвідмовної роботи кожного з двох пристроїв, що працюють незалежно один від одного, є випадковими величинами, розподіленими за показниковим законом з параметрами $\boldsymbol{\lambda_1 = 0{,}002}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = \lambda}$. Визначити середній час безвідмовної роботи другого пристрою, якщо ймовірність того, що обидва пристрої спільно пропрацюють без відмов не менше **600** годин, складає **0,2231**.

9. Процентний вміст домішки, що міститься в деякому продукті, є випадковою величиною, розподіленою рівномірно на відрізку **[1.8, 4.0]**. Знайти ймовірність того, що продукт містить від **2** до **3%** домішки.

10. Відомо, що дисперсія нормально розподіленої випадкової величини $\boldsymbol{X}$ дорівнює **81**, а $\boldsymbol{P(X < 37) = 0.97128}$. Знайдіть середнє значення цієї величини.

Завдання 6. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ розподілена за нормальним законом. Треба:

а) написати диференціальну функцію розподілу, побудувати її схематичний графік, вказавши його характерні точки;

б) знайти ймовірність того, що випадкова величина в результаті випробування прийме значення, що належить інтервалу $\boldsymbol{(\alpha;\beta)}$;

в) знайти ймовірність того, що абсолютна величина відхилення значень випадкової величини від її математичного сподівання не перевищить $\boldsymbol{\delta}$.

1. $\boldsymbol{M(X) = 375;\ \sigma(X) = 25;\ \alpha = 300;\ \beta = 425;\ \delta = 0{,}1.}$

2. $\boldsymbol{M(X) = 10;\ \sigma(X) = 2;\ \alpha = 5;\ \beta = 12;\ \delta = 5.}$

3. $\boldsymbol{M(X) = 164;\ \sigma(X) = 5{,}5;\ \alpha = 153;\ \beta = 170;\ \delta = 0{,}1.}$

4. $\boldsymbol{M(X) = 5;\ \sigma(X) = 0{,}81;\ \alpha = 4;\ \beta = 7;\ \delta = 2.}$

5. $\boldsymbol{M(X) = 20;\ \sigma(X) = 0{,}5;\ \alpha = 19;\ \beta = 25;\ \delta = 1{,}5.}$

6. $\boldsymbol{M(X) = 10;\ \sigma(X) = 4;\ \alpha = 12;\ \beta = 14;\ \delta = 0{,}1.}$

7. $M(X)=25;\ \sigma(X)=4;\ \alpha=13;\ \beta=30;\ \delta=0{,}1.$

8. $M(X)=4{,}5;\ \sigma(X)=0{,}05;\ \alpha=3{,}5;\ \beta=4{,}35;\ \delta=0{,}1.$

9. $M(X)=16;\ \sigma(X)=0{,}3;\ \alpha=15{,}75;\ \beta=16{,}3;\ \delta=0{,}6.$

10. $M(X)=12;\ \sigma(X)=4;\ \alpha=10;\ \beta=14;\ \delta=5.$

Завдання 7. З генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом, витягнута вибірка. Треба:

а) скласти інтервальний розподіл вибірки з кроком h, взявши за початок першого інтервалу x_0;

б) побудувати полігон абсолютних частот і гістограму відносних частот;

в) знайти вибіркову середню $\overline{x}_B$ та вибіркову дисперсію D_B, виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення s;

г) знайти з надійністю $\gamma=0{,}95$ довірчі інтервали для математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення ознаки X генеральної сукупності.

1.

42,5 60,0 63,5 70,5 82,0 83,5 92,0 95,5 100,0 101,0 105,0
108,5 110,0 115,5 120,0 120,5 122,0 130,0 138,5 140,0 142,0 150,5
160,0 162,1 180,5

$$h=20;\ x_0=42{,}5.$$

2.

187,6 228,6 242,3 252,7 271,2 293,7 311,8 358,1 331,7 350,8
387,5 359,2 361,1 372,4 384,5 391,6 407,7 417,6 442,7 476,2

$$h=50;\ x_0=185.$$

3.

104,0 103,1 102,0 98,0 99,0 94,0 119,0 114,8 109,5 103,1 92,0
97,1 95,2 91,7 104,0 104,5 92,8 95,8 104,9 77,5 93,1 94,9 99,5
99,7 103,0

$$h=10;\ x_0=75.$$

4.

90,0 96,0 98,0 98,1 98,5 99,0 101,5 102,0 102,2 102,5 103,0 103,5 104,0 104,3 104,4 104,5 105,5 106,0 108,0 108,2 108,7 109,0 112,0 113,5

$$h = 5;\ x_0 = 90.$$

5.

773 802 815 827 843 854 861 869 877 886 889 892 885 901 903 905 911 918 919 923 929 937 941 955 962 974 981

$$h = 40;\ x_0 = 760.$$

6.

42,5 60,0 63,5 70,5 82,0 83,5 92,0 95,5 100,0 101,0 105,0 108,5 110,0 115,5 120,0 130,0 138,5 140,0 142,0 150,5 160,0 162,1 180,5

$$h = 30;\ x_0 = 40.$$

7.

266 278 315 336 347 354 368 369 391 408 411 416 427 444 448 457 462 481 483 495 512 536 576

$$h = 50;\ x_0 = 250.$$

8.

1360 1550 1600 1690 1750 1750 1800 1880 1890 1920 1950 2000 2020 2050 2050 2050 2080 2120 2150 2200 2250 2340 2420 2450 2600

$$h = 200;\ x_0 = 1300.$$

9.

1250 1450 1550 1700 1760 1820 1880 1960 2100 2175 2190 2200 2220 2275 2280 2310 2400 2550 2580 2600 2670 2800 2950 3000 3075

$$h = 400;\ x_0 = 1100.$$

10.

750 2100 3500 3500 4000 5200 5400 5600 5900 6800 7000 7000 7200 7500 7800 7900 8100 8500 8750 8900 9000 10000 11000 12000 12500

$$h = 2000;\ x_0 = 500.$$

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ, ЇЇ ПОДАННЯ І ПЕРЕВІРКА

Номер варіанта контрольної роботи, що виконується, повинен співпадати з останньою цифрою номера залікової книжки. Цифра 0 визначає варіант 10. З кожного завдання контрольної роботи вибирається задача з відповідним номером. Виконана контрольна робота переписується в окремий зошит. Розв'язки задач наводяться зі збереженням номерів задач, у порядку зростання цих номерів. Перед розв'язком кожної задачі треба повністю виписати її умову. На обкладинку зошита слід наклеїти заповнений реєстраційний бланк (вказати номер контрольної роботи, назву дисципліни, групу і факультет, прізвище, ім'я та по батькові, номер залікової книжки, домашню адресу). Оформлена належним чином робота реєструється у деканаті. Її необхідно подати на кафедру вищої математики завчасно, але не пізніше як за 10 днів до початку екзаменаційної сесії. Після перевірки викладач робить висновок про те, вірно чи невірно виконана робота, з відповідним надписом на обкладинці. Якщо робота виконана не повністю або невірно, то викладач вказує номери відсутніх або невірно розв'язаних задач і, якщо необхідно, робить свої зауваження у вигляді короткої рецензії. Роботи з не усіма задачами, або ж з такими, що повністю або частково не відповідають даному варіанту, вважаються виконаними невірно. Студент повинен виправити *усі* помилки у тому ж зошиті *після* рецензії викладача у розділі "Робота над помилками" і повернути роботу у найкоротший термін. Виправлення у перевіреній роботі поверх позначок викладача не допускаються. Студент може бути допущений до захисту контрольної роботи, порядок якого визначається викладачем, тільки після повторної перевірки виправлених помилок. На екзамен (залік) допускаються тільки студенти з захищеною роботою.

ДОДАТКИ

Додаток 1

ТАБЛИЦЯ НАЙПРОСТІШИХ РОЗВИНЕНЬ

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ ,$$

$$a^z = e^{z \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} z^n ,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ ,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ ,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ ,$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

(***збігаються в усій комплексній площині***);

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \ ,$$

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1)}{n!} z^n ,$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n ,$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n ,$$

$$\sqrt{1+z}=1+\frac{z}{2}-\frac{1}{2\cdot 4}z^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}z^3-\ldots=1+\frac{z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}z^{n+1},$$

$$\arcsin z=z+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7}+\ldots=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{z^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\operatorname{arctg} z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\operatorname{arsh} z=z-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7}+\ldots=z+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{z^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\operatorname{arth} z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1},$$

(*збігаються в крузі* $|z|<1$).

Додаток 2

ЗОБРАЖЕННЯ ОСНОВНИХ ОРИГІНАЛІВ

ОРИГІНАЛ	ЗОБРАЖЕННЯ
Одинична функція Хевісайда $\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$	$\frac{1}{p}$
e^t	$\frac{1}{p-1}$
$\sin t$	$\frac{1}{p^2+1}$
$\cos t$	$\frac{p}{p^2+1}$
$sh\,t$	$\frac{1}{p^2-1}$
$ch\,t$	$\frac{p}{p^2-1}$

Додаток 3

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

ОРИГІНАЛ	ЗОБРАЖЕННЯ
Лінійність	
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(p)$
Подібність	
$f(\alpha t) \quad (\forall \alpha > 0)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (\forall \alpha > 0)$
Зокрема, e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$sh(at)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$ch(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
Зміщення	
$e^{-\alpha t} f(t) \quad (\forall \alpha)$	$F(p+\alpha) \quad (\forall \alpha)$
Зокрема, $e^{-bt} \sin t$	$\frac{1}{(p+b)^2+1}$
$e^{-bt} \cos t$	$\frac{p+b}{(p+b)^2+1}$

Запізнювання	
$f(t-t_0)\cdot\eta(t-t_0)\quad \left(\forall t_0>0\right)$	$e^{-t_0 p}F(p)\quad \left(\forall t_0>0\right)$
Зокрема, $\eta(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0,\\ 1, & t\ge t_0\end{cases}$ ***(узагальнена одинична функція)***	$e^{-t_0 p}\cdot\dfrac{1}{p}$
Диференціювання оригіналу	
$f(t)$	$F(p)$
$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
$f''(t)$	$p^2F(p)-p\,f(0)-f'(0)$
$f'''(t)$	$p^3F(p)-p^2f(0)-p\,f'(0)-f''(0)$
…………………………………….. $f^{(n)}(t)$	……………………………………….. $p^nF(p)-\sum\limits_{k=1}^{n}p^{n-k}f^{(k-1)}(0)$, $f^{(i)}(0)=\lim\limits_{t\to 0+0}f^{(i)}(t)\quad (i=0,1,...,n-1)$
Інтегрування оригіналу	
$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{F(p)}{p}$
Диференціювання зображення	
$f(t)$	$F(p)$
$t\cdot f(t)$	$-F'(p)$
$t^2f(t)$	$F''(p)$
$t^3f(t)$	$-F'''(p)$
…………………………………….. $t^nf(t)$	……………………………………….. $(-1)^nF^{(n)}(p)$

Зокрема, t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
Інтегрування зображення	
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int\limits_p^{\infty} F(q)dq$
Зокрема, $\dfrac{\sin t}{t}$	$\dfrac{\pi}{2} - arctg\ p$
Згортка	
$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int\limits_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$	
Теорема Бореля	
$f(t) * g(t)$	$F(p)\cdot G(p)$
Інтеграли Дюамеля	
$\int\limits_0^t f(\tau)\cdot g'(t-\tau)d\tau + f(t)\cdot g(0)$ $\int\limits_0^t g'(\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau + f(t)\cdot g(0)$ $\int\limits_0^t g(\tau)\cdot f'(t-\tau)d\tau + f(0)\cdot g(t)$ $\int\limits_0^t f'(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau + f(0)\cdot g(t)$	$p\cdot F(p)\cdot G(p)$

Додаток 4

ОРИГІНАЛИ ДЕЯКИХ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

ЗОБРАЖЕННЯ	ОРИГІНАЛ
$\dfrac{1}{p(p+a)}$	$\dfrac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$
$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{a-b}\left(ae^{-at}-be^{-bt}\right)$
$\dfrac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
$\dfrac{p}{(p+a)^2}$	$(1-at)\,e^{-at}$
$\dfrac{1}{p^2(p+a)}$	$\dfrac{1}{a^2}\left(e^{-at}+at-1\right)$
$\dfrac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{ab(a-b)}\left(a-b+be^{-at}-ae^{-bt}\right)$
$\dfrac{1}{p(p+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}\left[1-e^{-at}(1+at)\right]$
$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2}\left[e^{-at}-e^{-bt}-(b-a)te^{-bt}\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2}\left[-ae^{-at}+a+b(b-a)te^{-bt}\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)^3}$	$te^{-at}\left(1+\dfrac{a}{2}t\right)$
$\dfrac{p^2}{(p+a)^3}$	$e^{-at}\left(1-2at+\dfrac{a^2}{2}t^2\right)$
$\dfrac{1}{p[(p+b)^2+a^2]}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[1-e^{-bt}\left(\cos(at)+\dfrac{b}{a}\sin(at)\right)\right]$
$\dfrac{1}{p(p^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}[1-\cos(at)]$
$\dfrac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$\sin^2(at)$

$\dfrac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$\cos^2(at)$
$\dfrac{1}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[e^{-at}+\dfrac{a}{b}\sin(bt)-\cos(bt)\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[-ae^{-at}+a\cos(bt)+b\sin(bt)\right]$
$\dfrac{p^2}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[a^2e^{-at}-ab\sin(bt)+b^2\cos(bt)\right]$
$\dfrac{1}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\Big[e^{-at}-e^{-bt}\cos(ct)+$ $+\dfrac{a-b}{c}e^{-bt}\sin(ct)\Big]$
$\dfrac{p}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\Big[-ae^{-at}+ae^{-bt}\cos(ct)-$ $-\dfrac{ab-b^2-c^2}{c}e^{-bt}\sin(ct)\Big]$
$\dfrac{p^2}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\Big[a^2e^{-at}+[(a-b)^2+c^2-a^2]\,e^{-bt}\cdot$ $\cdot\cos(ct)-\left\{ac+b\left(c-\dfrac{(a-b)b}{c}\right)\right\}e^{-bt}\sin(ct)\Big]$
$\dfrac{1}{p^3(p+a)}$	$\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{a^2}t+\dfrac{1}{2a}t^2-\dfrac{1}{a^3}e^{-at}$
$\dfrac{1}{p^2(p+a)(p+b)}$	$-\dfrac{a+b}{a^2b^2}+\dfrac{1}{ab}t+\dfrac{1}{a^2(b-a)}e^{-at}+\dfrac{1}{b^2(a-b)}e^{-bt}$
$\dfrac{1}{p^2(p+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}t\left(1+e^{-at}\right)+\dfrac{2}{a^3}\left(e^{-at}-1\right)$
$\dfrac{1}{(p+a)^2(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(a-b)^2}\left[e^{-at}\left(t+\dfrac{2}{a-b}\right)+e^{-bt}\left(t-\dfrac{2}{a-b}\right)\right]$
$\dfrac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[\dfrac{1}{a}\sin(at)-\dfrac{1}{b}\sin(bt)\right]$
$\dfrac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[\cos(at)-\cos(bt)\right]$
$\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[-a\sin(at)+b\sin(bt)\right]$

$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[-a^2\cos(at)+b^2\cos(bt)\right]$
$\dfrac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^2}\left[\dfrac{1}{a}\sin(at)-t\cos(at)\right]$
$\dfrac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a}t\sin(at)$
$\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a}\left[\sin(at)+at\cos(at)\right]$
$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cdot\cos(at)$
$\dfrac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$	$t\cdot sh(at)$
$\dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$	$t\cdot ch(at)$
$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2}\left[2\cos(at)-at\sin(at)\right]$
$\dfrac{1}{[(p+b)^2+a^2]^2}$	$\dfrac{1}{2a^2}e^{-bt}\left[\dfrac{1}{a}\sin(at)-t\cos(at)\right]$
$\dfrac{1}{p^2(p^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}\left[t-\dfrac{1}{a}\sin(at)\right]$
$\dfrac{a(p^2+a^2-b^2)}{[p^2+(a-b)^2][p^2+(a+b)^2]}$	$\sin(at)\cdot\cos(bt)$

Додаток 5

Таблиця значень функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,3989**	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	**0,2420**	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	**0,0540**	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	**0,0044**	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0008	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 6

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,00000**	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	**0,34134**	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	**0,47725**	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	**0,49865**									
3,1	49903									
3,2	49931									
3,3	49952									
3,4	49966									
3,5	**0,49977**									
3,6	49984									
3,7	49989									
3,8	49993									
3,9	49995									
4,0	**0,499968**									
4,5	**0,499997**									
5,0	**0,49999997**									

Додаток 7

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ розподілу Стьюдента

n	γ			*n*	γ		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,78	460	861	**20**	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	**25**	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	**30**	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	**35**	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	**40**	2,023	2,708	3,555
10	2,26	3,25	4,78	**45**	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	**50**	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	**60**	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	**70**	1,996	2,646	3,439
14	2,16	3,01	4,22	**80**	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	**90**	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	**100**	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	**120**	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 8

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$ розподілу χ^2

n	γ			*n*	γ		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	**20**	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	**25**	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	**30**	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	**35**	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	**40**	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	**45**	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	**50**	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	**60**	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	**70**	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	**80**	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	**90**	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	**100**	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	**150**	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	**200**	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	**250**	0,089	0,120	0,162