МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

РОБОЧА ПРОГРАМА,

методичні вказівки та контрольні завдання до вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей та випадкові процеси» для студентів спеціальності 7.092501 – автоматизоване управління технологічними процесами і виробництвом заочної форми навчання

Дніпропетровськ НМетАУ 2008

УДК 517(07)

Робоча програма, методичні вказівки та контрольні завдання до вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей та випадкові процеси» для студентів спеціальності 7.092501 – автоматизоване управління технологічними процесами і виробництвом заочної форми навчання. / Укл.: А.В. Павленко, Л.В. Маринчук, А.Г. Моня та ін. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2008. – 117 с.

Наведені рекомендації до вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей та випадкові процеси»; мета та завдання дисципліни; необхідний обсяг знань і умінь студентів у результаті її вивчення; методичні вказівки до вивчення кожного із розділів; література, що рекомендується; варіанти контрольних завдань, які виконуються студентами в процесі вивчення дисципліни.

Призначена для студентів спеціальності 7.092501 – автоматизоване управління технологічними процесами і виробництвом заочної форми навчання.

Укладачі: А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Л.В. Маринчук, ст. викл.
А.Г. Моня, канд. техн. наук, доц.
І.В. Пасічник, канд. техн. наук, доц.
В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.
Л.В. Моссаковська, ст. викл.
Л.І. Галій, асистент

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент Л.П. Кагадій, канд. фіз.-мат. наук, проф. (НМетАУ)

Підписано до друку . Формат 60x84 $_{1/16}$. Папір друк. Друк плоский. Облік.-вид. арк. . Умов. друк. арк. . Тираж пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО РОБОТІ НАД ДИСЦИПЛІНОЮ «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ»

Основна форма навчання студента-заочника – самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з таких елементів: вивчення матеріалу по підручнику, розв’язання задач, виконання контрольних робіт. На допомогу студентам академія організує лекції та практичні заняття. Крім того, студент може розраховувати на усну консультацію викладача. Вказівки студенту також робляться в процесі рецензування контрольних робіт. Але студент повинен пам’ятати, що тільки при систематичній самостійній роботі допомога академії буде носить ефективний характер. Завершальний етап вивчення дисципліни з теорії ймовірностей та випадкових процесів – це здача заліку або іспиту у відповідності до навчального плану.

Вивчаючи матеріал по підручнику, треба переходити до наступного питання тільки після повного засвоєння попереднього, виконуючи на папері усі обчислення (в тому числі і ті, що опущені у підручнику).

Треба приділяти особливу увагу визначенню основних понять. Студент повинен розбирати приклади, які пояснюють такі визначення, та наводити аналогічні приклади самостійно.

При вивченні матеріалу за підручником корисно вести конспект, до якого записувати визначення, формулювання теорем, формули, рівняння тощо. На полях конспекту відмічають питання, з якими треба звернутися до викладача.

Читання підручника повинно супроводжуватися розв’язанням задач, для чого рекомендується завести спеціальний зошит. Креслення можна виконувати від руки, але акуратно та відповідно даним умовам.

Якщо в процесі роботи по вивченню теоретичного матеріалу або при розв’язанні задач у студента виникають питання, відповіді на які він самостійно не може знайти (неясність термінів, формулювання теорем, розв’язок окремих задач), то він може звернутися до викладача за усною консультацією. В своїх запитаннях студент повинен точно вказати, в чому він зазнає утруднення. Якщо це теоретичне питання, то треба вказати підручник, де розглянуто це питання та що його утруднює. Якщо склалося скрутне становище при розв'язанні задачі, то треба вказати характер цього утруднення, навести припущення відносно плану розв'язку.

У процесі вивчення курсу вищої математики студент повинен виконати контрольні роботи, головна мета яких надати студенту допомогу в його роботі. Рецензії на ці роботи дозволяють студенту судити про ступінь засвоєння матеріалу.

З кожної контрольної роботи студент виконує ті завдання, які мають відношення до його варіанту. Номер варіанту збігається з останньою цифрою номера залікової книжки або студентського квитка. Наприклад, номер залікової книжки – 007239, отже треба виконати задачі варіанту № 9. Якщо остання цифра "0", то виконується варіант №10.

Не треба починати виконувати контрольне завдання, не розв'язавши достатньої кількості задач по матеріалу, що відповідає цьому завданню.

Виконувати контрольні завдання студент повинен самостійно, інакше він не придбає необхідних знань і буде непідготовленим до заліків або іспитів.

Кожну контрольну роботу треба присилати (приносити) в академію у заочний деканат в окремому зошиті, на обкладинці якого обов'язково позначено номер контрольної роботи, назва дисципліни, прізвище та ініціали студента, його шифр (номер залікової книжки), факультет та групу, де навчається даний студент, домашня адреса.

Контрольні роботи за даний семестр повинні подаватися на кафедру не пізніше як за 10 діб до початку екзаменаційної сесії.

Після перевірки контрольних робіт треба зробити усі виправлення і доповнення, на які вказав рецензент.

Без прорецензованих та захищених контрольних робіт, де зроблені усі виправлення і доповнення, студент не допускається до заліків або іспитів.

1. Програма дисципліни «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ» (5 семестр)

1.1. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1. Стохастичний експеримент та елементарні події. Види подій. Алгебра подій. Елементи комбінаторики.
2. Ймовірність випадкової події. Класичне означення ймовірності. Геометричне означення ймовірності. Відносна частота події. Статистична ймовірність. Безпосереднє обчислення ймовірностей подій.
3. Теореми додавання і множення ймовірностей. Ймовірність появи хоча б однієї з подій. Незалежність подій. Умовна ймовірність. Формули повної ймовірності та Байєса.
4. Послідовні незалежні випробування. Схема Бернуллі. Формула Пуассона. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа.
5. Означення випадкової величини. Функція розподілу випадкової величини та її властивості. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закони розподілу дискретних випадкових величин: біномний, пуассонівський. Приклади розподілів неперервних величин: рівномірний, експоненціальний (показниковий), нормальний (закон Ґаусса).
6. Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія, моменти та інші, їхні властивості. Закон великих чисел. Нерівність Чебишева. Теорема Чебишева.

1.2. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

1. Вибірки. Статистична оцінка параметрів розподілу. Незміщена, ефективна і спроможна оцінки. Поняття довірчого інтервалу. Статистичні перевірки гіпотез.
2. Системи випадкових величин. Закон розподілу. Числові характеристики. Коефіцієнт кореляції.

3. Лінійна регресія. Метод Стьюдента перевірки гіпотез. Багатовимірна лінійна регресія.

1.3. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

1. Випадкова функція. Автокореляційна функція випадкової функції. Стаціонарні функції. Загальні властивості стаціонарних функцій.
2. Випадкові процеси. Види нестаціонарності. Тренд випадкового процесу. Закони розподілу і основні характеристики випадкових процесів.
3. Автокореляційна функція і спектральна щільність.
4. Потоки подій. Їх властивості та класифікація. Випадкові процеси Маркова (ланцюги Маркова).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бугір М.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Тернопіль: Підручники та посібники, 1998. – 176 с.
2. Васильченко І.П. Вища математика для економістів (спеціальні розділи). – К.: Кондор, 2004. – 348 с.
3. Вища математика: Збірник задач. У двох частинах. Ч.2 / П.П.Овчинников, П.С.Кропив'янський та ін. – К.: Техніка, 2003. – 376 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая шк., 1999. – 399 с.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая шк., 1998. – 480 с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. – М.: Наука, 2000. – 416 с.
7. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика. Приклади і задачі. – К.: ВЦ "Академія", 2002. – 623 с.
8. Овчинников П.П. Вища математика. Ч.2. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
10. Самойленко В. М. Ймовірнісні математичні методи в геоекології. –К.: Ніка-Центр, 2002. – 404 с.

11. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 608 с.
12. Соколенко О.І. Вища математика. – К.: Видавничий центр “Академія”, 2002. – 430 с.
13. Пасічник І.В., Сясєв А.В., Маринчук Л.В. Теорія ймовірностей та випадкові процеси. Ч.1: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ, НМетАУ. – 2005.
14. Теорія ймовірностей та випадкові процеси. Частина ІІ: Конспект лекцій / Л.В. Маринчук, І.В. Пасічник, А.В. Сясєв, А.Г. Моня. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2006. – 48 с.
15. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей. – К.: Вища шк., 1994, – 192 с.

2. ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

2.1. КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика вивчає методи підрахунку кількості комбінацій, підкорених певним умовам, які можна утворити з елементів заданої скінченої множини будь-якого походження.

Групи елементів, які відрізняються порядком або складом елементів, називаються *сполуками*. Вони бувають трьох типів: розміщення, перестановки, комбінації.

Розміщення

Розміщеннями з $\boldsymbol{n}$ елементів по $\boldsymbol{k}$ називаються будь-які впорядковані $\boldsymbol{k}$ – елементні підмножини $\boldsymbol{n}$-елементної множини, що різняться одна від одної або своїми елементами, або їхнім порядком (якщо вибрані елементи не повторюються, то маємо розміщення без повторень, а якщо повторюються – розміщення з повтореннями).

Формули для числа розміщень $\boldsymbol{A_n^k}$

Без повторень	З повтореннями
$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!},\ 0 \le k \le n$	$\overline{A}_n^k = n^k$
Приклад. Кількість різних тризначних телефонних номерів, які можна скласти з цифр від 0 до 9 так, щоб у запису номера всі цифри були різні, $A_{10}^3 = \dfrac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$	*Приклад.* Кількість різних тризначних телефонних номерів, які можна скласти з цифр від 0 до 9, якщо цифри в числі можуть повторюватися, $\overline{A}_{10}^3 = 10^3$

Перестановками $\boldsymbol{k}$-елементної множини називаються її $\boldsymbol{k}$-елементні впорядковані підмножини, що відрізняються тільки порядком елементів (якщо всі елементи заданої множини різні – маємо перестановки без повторень, а якщо в заданій множині елементи можуть повторюватися, серед яких a_1 повторюється k_1 раз, $a_2 - k_2$ разів, …, a_l – k_l разів, то маємо перестановки з повтореннями).

Формули для числа перестановок P_k

Без повторень	З повтореннями
$P_k = k!$ $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ $1! = 0! = 1$	$\overline{P}_{k,k_1,k_2,\ldots,k_l} = \dfrac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_l!}$ де $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = k$
Приклад. Скільки різних шестизначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторюючи ці цифри в одному числі? $P_6 = 6! = 720$	*Приклад.* Скількома способами можна переставити букви у слові “математика”? $P_{10,2,3,2} = \dfrac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 151200$

Комбінації (сполучення)

Комбінаціями (сполученнями) без повторень з n елементів по k називаються будь-які k-елементні підмножини n-елементної множини, що різняться між собою принаймні одним елементом. Порядок елементів у сполученні не є істотним.

Комбінаціями (сполученнями) з повтореннями з n елементів (необов’язково різних) по k називаються набори цих елементів, до кожного з яких входять k елементів і які відрізняються хоча б одним елементом або тим, що принаймні один елемент входить в різні сполучення різне число разів.

Формули для числа комбінацій (сполучень) C_n^k

Без повторень	З повтореннями
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
Приклад. З групи, що складається з 25 студентів, можна виділити 5 осіб для чергування по академії C_{25}^5 способами, тобто $C_{25}^5 = \dfrac{25!}{5!(25-5)!} = \dfrac{25!}{5! \cdot 20!} = 53130$.	*Приклад.* Якщо у продажу є квіти чотирьох сортів, то різних букетів, що складаються з 7 квіток, можна скласти $\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \dfrac{10!}{7!(10-7)!} =$ $= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$

Деякі властивості числа сполучень (без повторень):

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ (зокрема, $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$).
2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.
3. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.

Зауваження. Розміщення, перестановки та сполучення пов'язані між собою рівністю

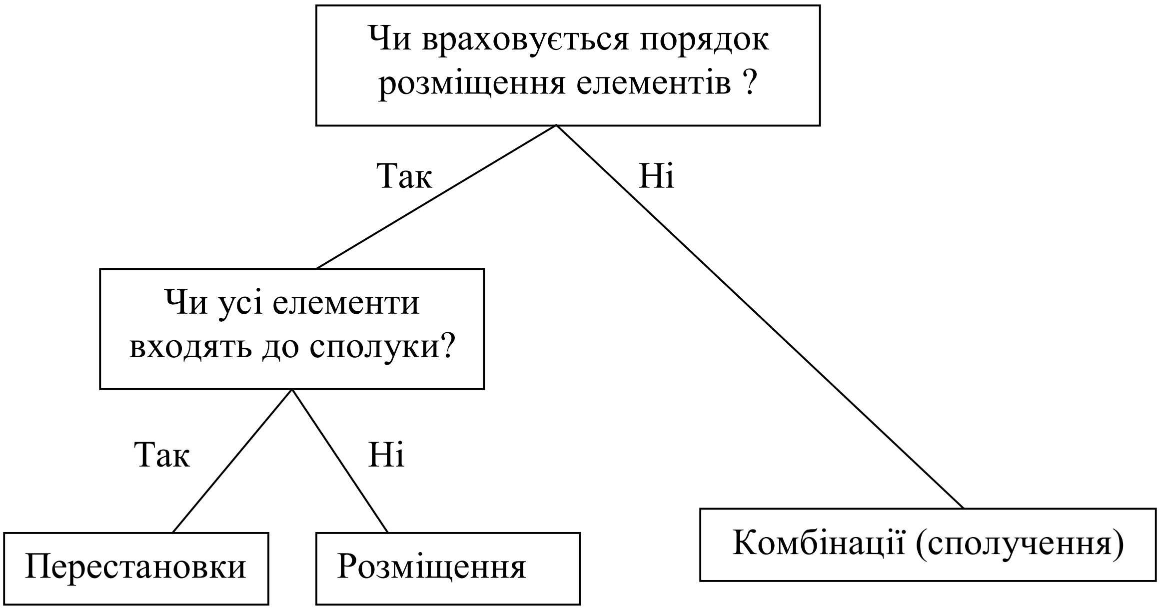
$$A_n^k = P_k \cdot C_n^k = k!\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Правило множення. Нехай необхідно виконати одну за одною k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 числом способів, другу - n_2 числом способів і так до k -ї дії, яку можна виконати n_k числом способів, то всі k дій разом можуть бути виконані $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ числом способів.

Схема розв'язування комбінаторних задач

Вибір правила	
Правило суми	Правило добутку
Якщо елемент $\boldsymbol{A}$ можна вибрати $\boldsymbol{n}$ способами, а після цього елемент $\boldsymbol{B}$ – $\boldsymbol{m}$ способами, то $\boldsymbol{A}$ або $\boldsymbol{B}$ можна вибрати $(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m})$ способами.	Якщо елемент $\boldsymbol{A}$ можна вибрати $\boldsymbol{n}$ способами, а елемент $\boldsymbol{B}$ – $\boldsymbol{m}$ способами, то $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ можна вибрати $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m})$ способами.

Вибір формули



2.2. ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Формула класичної ймовірності

Теорія ймовірностей має ряд основних первинних понять, на яких базуються всі теоретичні побудови і висновки. До них належать: стохастичний експеримент, випадкова подія, ймовірність, випадкова величина.

Стохастичним експериментом називається експеримент, який можна неодноразово повторювати за деяких незмінних умов і результат якого неможливо передбачити заздалегідь. *Подія* – це будь-який результат експерименту. *Елементарні події* – це єдино можливі результати експерименту, що є взаємно виключні. Події бувають випадкові, неможливі, достовірні. *Достовірною називають подію* $\boldsymbol{\Omega}$, що обов'язково відбудеться, якщо буде здійснена сукупність відповідних умов $\boldsymbol{S}$.

Неможливою називається подія $\boldsymbol{\varnothing}$, яка свідомо не відбудеться, якщо буде здійснена сукупність умов $\boldsymbol{S}$.

Подія називається *випадковою*, якщо реалізація сукупності відповідних умов може мати принаймні два наслідки.

Ймовірність в загальному випадку є кількісна міра можливості появи події в експерименті. Позначимо ймовірність події $\boldsymbol{A}$ буквою $\boldsymbol{P}$ (probability (англ.) – ймовірність).

Ймовірністю $\boldsymbol{P(A)}$ події $\boldsymbol{A}$ називають відношення кількості сприяючих події $\boldsymbol{A}$ результатів експерименту $\boldsymbol{m}$ до загальної кількості рівноможливих несумісних елементарних подій $\boldsymbol{n}$, тобто

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{m}{n}}, \quad \boldsymbol{0 \le P(A) \le 1}.$$

Відносна частота події обчислюється за формулою

$$\boldsymbol{W(A)=\frac{m*}{n*}}, \quad \boldsymbol{0 \le W(A) \le 1},$$

де $\boldsymbol{m*}$ – число експериментів, у яких відбулася подія $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{n*}$ – загальна кількість проведених експериментів. За *статистичним* означенням ймовірність події є відносна частота цієї події.

Геометрична ймовірність

Нехай простір елементарних подій $\boldsymbol{\Omega}$ інтерпретується як область на числовій осі (або на площині, або у просторі), яка має відповідно довжину, площу або об'єм. Тоді $\boldsymbol{P(A)=\frac{mesA}{mes\Omega}}$,

де $\boldsymbol{mes\,A}$ – вимір (довжина або площа, або об'єм) області $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{mes\Omega}$ – вимір області $\boldsymbol{\Omega}$. Ця формула називається формулою *геометричної* ймовірності.

Безсумнівно для кожної випадкової події A

$$0 \le P(A) \le 1 \quad \left(P(\Omega)=1; \quad P(\varnothing)=0\right).$$

2.3. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ І МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Об'єднання (сума) подій $A \bigcup B$ (або $A+B$) – це подія, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається хоча б одна з подій A або B.

Перетин (добуток) подій $A \bigcap B$ (або AB) – це подія, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли одночасно відбуваються і подія A, і подія B.

Різниця подій $B \setminus A$ – це подія, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія B, але не відбувається подія A.

Дві події називаються *несумісними,* якщо $A \bigcap B = \varnothing,$ тобто вони одночасно не можуть відбутися.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють *повну групу* подій, якщо: а) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$; б) $A_i \bigcap A_j = \varnothing, \quad i \ne j$ (тобто усі події попарно несумісні).

Кожній події A можна поставити у відповідність *протилежну подію* $\overline{A}$, яка відбувається тоді, коли A не відбувається. Очевидно, $A \bigcup \overline{A} = \Omega, \quad A \bigcap \overline{A} = \varnothing$.

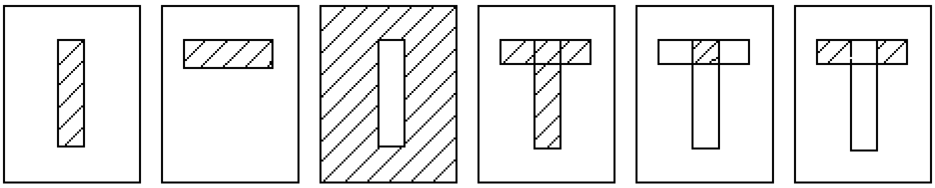
Приклад. Два шахісти грають одну партію. Сукупність всіх можливих результатів партії (A – виграє I шахіст, B – виграє II шахіст, C – нічийний результат) утворюють *повну групу подій* (в результаті експерименту (партії) з'явиться тільки одна з подій групи).

Приклад. Якщо стипендія нараховується тільки при отриманні на іспитах добрих та відмінних оцінок, то події “стипендія” та “незадовільна або задовільна оцінка” є протилежними подіями.

Події називаються *рівноможливими*, якщо є підстава вважати, що ніяка з них не є більш можливою, ніж інші.

Приклад. Поява “герба” або числа при підкиданні монети є рівноможливими подіями.

Приклад. Діаграми В’єнна. У квадрат навмання кидають точку. Якщо точка потрапила до “вертикального” прямокутника, то говоримо, що відбулася подія A, а якщо до “горизонтального” – подія B. Події $A, B, \overline{A}, A+B, AB, B/A$ відбуваються, коли точка потрапляє до відповідної області, заштрихованої на рисунку



A B $\overline{A}$ $A+B$ AB B/A

Теореми додавання ймовірностей

сумісних подій

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

несумісних подій

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Наслідок 1. Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, ..., A_n$, що складають повну групу, дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1.$$

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Подія A називається *незалежною* від події B, якщо ймовірність здійснення події A не залежить від того, відбулася або ні подія B (у протилежному випадку події *залежні*).

Ймовірність $P_A(B)$ або $P(B/A)$ називається *умовною ймовірністю* події B за умови A, тобто це ймовірність настання події B, обчислена в припущенні, що подія A вже відбулася.

Теорема множення ймовірностей
незалежних подій

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B);$$

залежних подій

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A).$$

Ймовірність появи хоча б однієї з незалежних в сукупності подій дорівнює різниці між одиницею та добутком ймовірностей протилежних подій, тобто

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot ...\cdot P(\overline{A}_n).$$

2.4. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Нехай події $H_1, H_2, ..., H_n$ утворюють повну групу подій, тобто вичерпують усі можливі результати даного експерименту. Подія A може відбутися за умовою появи однієї з гіпотез H_i з деякою ймовірністю $P_{H_i}(A)$. Тоді ймовірність події A обчислюється за *формулою повної ймовірності*

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A),$$

де $P(H_1)+P(H_2)+...+P(H_n)=1$, тобто дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з гіпотез H_i на відповідну умовну ймовірність події A.

Нехай тепер відомо, що результатом експерименту є подія A. Її поява зумовить переоцінку *апріорних* (a priori (лат.) – відомих до спроби) ймовірностей гіпотез, які можна обчислити у цьому випадку за *формулами Байєса*

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad i = 1,2,...,n,$$

де $P_A(H_i)$ – *апостеріорні* (a posteriori (лат.) – після експерименту) ймовірності гіпотез після випробування, коли стало відомо, що його результатом є подія A; $P_{H_i}(A)$ – ймовірність події A при умові H_i; $P(A)$ – ймовірність події A, знайдена за формулою повної ймовірності.

Формули Байєса дають можливість переоцінити ймовірності гіпотез з урахуванням результату досліду.

2.5. ПОСЛІДОВНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

Нехай ймовірність появи події A в кожному з n незалежних аналогічних дослідів $P(A) = p$ є однаковою і незалежною від результатів інших спроб тієї ж серії (ймовірність протилежної події $P(\overline{A}) = q = 1 - p$). Ймовірність того, що в n дослідах рівно k разів буде успіх, тобто поява події **A,** обчислюється за *формулою Бернуллі*

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad k = 0,1,...,n.$$

Ймовірність того, що подія A відбудеться не менш ніж m разів, дорівнює

$$P_n(k \geq m) = \sum_{k=m}^{n} P_n(k).$$

Ймовірність того, що подія A настане хоча б один раз, обчислюється за формулою

$$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n.$$

Якщо n достатньо велике, а p – достатньо мале числа, наприклад, $n > 100$, а $p < 0{,}1$ однак при цьому $0 < n \cdot p \leq 15$, то найчастіше використовують *асимптотичну формулу Пуассона*

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

де $\lambda = n \cdot p$ - середнє число появи події A в n випробуваннях.

Формулу Бернуллі практично застосовують при відносно невеликих значеннях числа незалежних випробувань n. Якщо n достатньо велике, то користування цією формулою стає досить складним, бо необхідно виконувати громіздкі дії над великими числами. У цьому випадку слід застосовувати наближені (асимптотичні) формули.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що у n незалежних випробуваннях, у кожному з яких подія A відбувається з однаковою ймовірністю p, подія A настане рівно k разів, наближено дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \varphi(x),$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних спробах, у кожній з яких ймовірність появи події A стала і дорівнює p, подія A наступить не менш k_1 разів і не більш k_2 разів, наближено дорівнює

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

де $x_1 = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, $x_2 = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$.

Інтеграл $\int e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz$ не виражається в елементарних функціях, тому для обчислення $P_n(k_1, k_2)$ користуються функцією $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ (інтегральна функція Лапласа). Тоді $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$.

Зауваження. Функції $\dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, $\varphi(x)$ та $\Phi(x)$ табульовані для практичних цілей ([4], [5], [6]). Слід пам'ятати, що $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x)=\varphi(x)$ і має максимум при $x=0$ $\varphi(0)=0{,}3989$, а $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. В таблицях значення функції $\Phi(x)$ наведені для $0 \le x \le 5$; деякі з її значень: $\Phi(0)=0$, $\Phi(1)=0{,}3414$, $\Phi(4)=0{,}49997$, $\Phi(x \ge 5)=0{,}5$.

2.6. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Випадковою величиною називається величина, яка в результаті випробування може прийняти те або інше значення, заздалегідь невідоме і таке, що залежить від випадкових обставин.

Якщо випадкова подія є якісною характеристикою випробування, то випадкова величина може розглядатись як його кількісна характеристика.

Випадкова величина X, що набуває скінченну або зчисленну множину значень $x_1, x_2, ..., x_n$, називається *дискретною*; випадкова величина називається *неперервною*, якщо всі її можливі значення належать неперервному (скінченному або безмежному) проміжку числової осі.

Основні *числові характеристики* випадкової величини.

Для *дискретної* величини: *математичне сподівання* (характеризує положення випадкової величини на числовій осі, визначає деяке "середнє" значення, навколо якого групуються всі можливі значення випадкової величини)

$$M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i;$$

дисперсія (характеризує розсіювання випадкової величини навколо її математичного сподівання)

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \quad \text{або} \quad D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - [M(X)]^2;$$

середнє квадратичне відхилення (або *стандартне відхилення*; вводиться для того, щоб розмірність характеристики розсіювання співпадала з розмірністю випадкової величини)

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\ .$$

Для *неперервної* величини математичне сподівання

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\ ;$$

дисперсія

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx \quad \text{або} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2,$$

де $f(x)$ – *щільність розподілу* ймовірностей.

Зауваження. За означенням $f(x) = F'(x)$, де $F(X)$ – *функція розподілу* неперервної випадкової величини.

Особливу увагу слід звернути на теореми ([10], гл. XX, § 12, 13), які дозволяють знайти ймовірність попадання випадкової величини в деякий заданий інтервал.

Деякі закони розподілу дискретних випадкових величин

Біномний розподіл. Цілочислова невід'ємна випадкова величина X (кількість появ події в n незалежних випробуваннях) розподілена за біноміальним законом, якщо подія $\{X = k\}$ має ймовірність

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad k = 0,1,2,...,n; \quad q = 1 - p\ .$$

Ймовірності можливих значень випадкової величини дорівнюють відповідним членам розкладу бінома $(p + q)^n$.

Функція розподілу випадкової величини X має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, & 0 < x \le m; \\ 1, & x > m,\ m = 1,2,...,n. \end{cases}$$

Числові характеристики біномного розподілу:

$$M(X) = n \cdot p; \quad D(X) = n \cdot p \cdot q; \quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}\,.$$

Розподіл Пуассона. Числова невід'ємна випадкова величина має розподіл Пуассона, якщо подія $\{X = k\}$ має ймовірність

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

де $\lambda = np > 0$ – параметр закону Пуассона (п.3.2), $k = 0,1,2,...$.

Функція розподілу величини X має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, & 0 < x \le n,\ n = 1,2,... \end{cases}$$

Числові характеристики розподілу Пуассона: $M(X) = D(X) = \lambda$.

Закони розподілу неперервних випадкових величин

Рівномірний розподіл. Неперервна випадкова величина має рівномірний розподіл на проміжку $[a,b]$, якщо її щільність розподілу є сталою величиною на цьому проміжку і дорівнює

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Функція розподілу рівномірного закону має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Числові характеристики рівномірного розподілу:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}; \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ймовірність попадання випадкової величини, яка має рівномірний розподіл, в інтервал $(\alpha;\beta)$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{b-a}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Рівномірний розподіл часто використовують для генерування випадкових чисел.

Експоненціальний (показниковий розподіл). Випадкова величина X має експоненціальний розподіл, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$$

де $\lambda>0$ – параметр закону.

Відповідно функцію розподілу записують так:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$$

Експоненціальний закон має числові характеристики:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(\alpha;\beta)$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{\alpha}^{\beta}=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

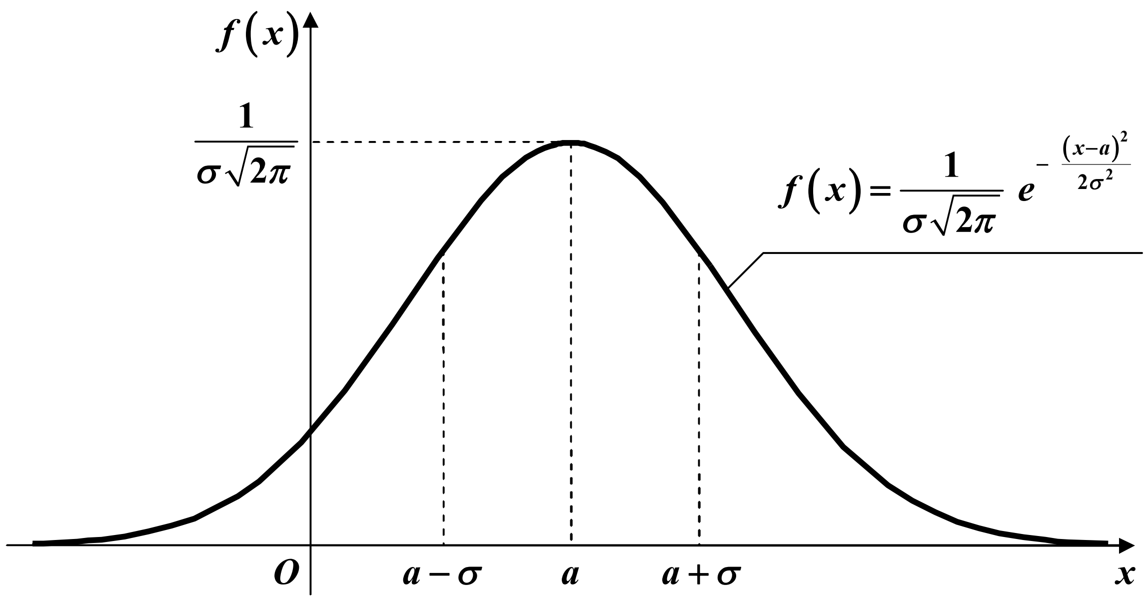
Експоненціальний закон застосовується для опису таких випадкових величин як час безвідмовної роботи пристроїв або їхніх окремих елементів.

Нормальний закон розподілу (закон Гаусса). Неперервна випадкова величина X розподілена за законом Гаусса, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де σ і a – параметри розподілу.

Графік функції $f(x)$ називається кривою нормального розподілу (кривою Ґаусса):



Ця крива симетрична відносно прямої $x=a$, має максимум при $x=a$; при $x\to\pm\infty$ крива необмежено наближується до осі Ox. Якщо σ зростає, то функція $f(x)$ спадає, і крива стає більш розтягнутою вздовж Ox.

Числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом Ґаусса, дорівнюють:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=a;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx-a^2=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx-a^2=\sigma^2.$$

Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(\alpha;\beta)$

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(X)$ – функція Лапласа.

Розподіл χ^2 *(хі квадрат).* Розподілом χ^2 з k – ступенями свободи називається розподіл суми квадратів k незалежних випадкових величин, розподілених за стандартним нормальним законом $N(a,\sigma)$ (де $a = 0; \sigma = 1$), тобто

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 ,$$

де $Z_i \left(i = 1,2,...,k\right)$ мають нормальний розподіл $N(0;1)$.

Розподіл Стьюдента (t – розподіл). Розподілом Стьюдента називається розподіл випадкової величини

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{k}}},$$

де Z – випадкова величина, розподілена за стандартним нормальним законом, тобто $N(0;1)$; χ^2 – незалежна від Z випадкова величина, що має χ^2-розподіл з k ступенями свободи. При $k \to \infty$ крива t-розподілу наближається до нормальної кривої $N(0;1)$.

2.7. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

1. Оцінка для математичного сподівання (вибіркова середня)

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i \cdot x_i}{n}.$$

2. Незміщена та зміщена оцінки дисперсії

$$\overline{D}_x = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{n-1}, \quad \overline{D}_x^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{n}.$$

3. Для нормального розподілу інтервал довіри для математичного сподівання (вибіркової середньої) при невідомому значенні середньоквадратичного відхилення σ та при відомому вибірковому $\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}_x}$ має вигляд: $\overline{x} - t_\gamma \cdot \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}} < a = m_x < \overline{x} + t_\gamma \cdot \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}}$, де число t_γ знаходимо за таблицями розподілу Стьюдента (дивись додатки) за заданою надійністю γ і числом ступенів свободи $k = n - 1$.
4. Для нормального розподілу справедлива формула для границь довірчого інтервалу для дисперсії при довірчій ймовірності (надійності) γ: $\frac{n \cdot \overline{D}_x}{\chi_2^2} < D_x < \frac{n \cdot \overline{D}_x}{\chi_1^2}$, де χ_1^2 – значення випадкової величини, що має розподіл χ^2 (хі квадрат Пірсона) з числом ступенів свободи $f_1 = n - 1$ при рівні значущості $\alpha_1 = 1 - \frac{\alpha}{2}$, де $\alpha = 1 - \gamma$; χ_2^2 - значення випадкової величини, що має розподіл χ^2 з числом ступенів свободи $f_2 = n - 1$ при рівні значущості $\alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$.

Основні закони розподілу

Розглянемо приклади випадкових величин, що найчастіше використовуються у дослідженнях:

1. Неперервна випадкова величина *розподілена нормально,* її диференціальна функція розподілу має вигляд $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$. Числа a, σ називають параметрами

розподілу, їхні вибіркові оцінки знаходять за формулами $\overline{a} = \overline{x}, \quad \overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D_x}} = \overline{s}$.

2. Випадкова величина, що має сталу диференціальну функцію $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, де $a \le x \le b$, та $f(x) = 0$, якщо $x < a$ і $x > b$, розподілена *рівномірно* і має параметри розподілу a, b. Їхні вибіркові оцінки обчислюються за формулами $\overline{a} = \overline{x} - \sqrt{3} \cdot \overline{\sigma}, \quad \overline{b} = \overline{x} + \sqrt{3} \cdot \overline{\sigma}$.

3. Випадкова величина, диференціальна функція якої $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ при $x \ge 0$ та $f(x) = 0$, при $x < 0$, має *експоненціальний (показниковий) розподіл.* Параметр розподілу λ має оцінку $\overline{\lambda} = \dfrac{1}{\overline{x}}$.

4. *Біноміальним є* закон розподілу випадкової величини X, ймовірності якої обчислюються за формулами Бернуллі $P_n(k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, де $q = 1 - p; \quad n, p$ – параметри.

   Параметр розподілу p має оцінку $p^* = \dfrac{\overline{x}}{m}$, де m – максимальне число появи події у випробуванні.

У випадку, коли p є дуже малим числом, а число n – достатньо великим, замість формули Бернуллі слід використовувати формулу $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ (*розподіл Пуассона).* Параметр розподілу $\lambda = np$ має оцінку $\overline{\lambda} = \overline{x}$.

2.8. СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Закон розподілу

Розглянемо спочатку двовимірну дискретну випадкову величину. Під законом розподілу такої величини будемо розуміти сукупність можливих значень цієї величини, тобто пар чисел (x_i, y_j) та їх ймовірностей $P(x_i, y_j)$

(***i*=1, ... , *n*; *j*=1, ..., *m***). Зазвичай закон розподілу такої випадкової величини задається таблицею

Таблиця 1

$Y \backslash X$	x_1	x_2	…	x_n	$P(y)$
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_n , y_1)$	$P(y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	…	$p(x_n , y_2)$	$P(y_2)$
…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$	$P(y_m)$
$P(x)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	…	$P(x_n)$	**1**

У таблиці 1 у комірках з координатами (x_i, y_j) знаходяться ймовірності події $\{X=x_i, Y=y_j\}$. Припускається, що всі можливі комбінації подій $\{X=x_i, Y=y_j\}$ утворюють повну групу подій. Знаючи закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини, можна знайти закони розподілу окремих її складових. Так, наприклад, події $\{X = x_1, Y = y_1\}$, $\{X = x_1, Y = y_2\}$, ... , $\{X = x_1, Y = y_m\}$ несумісні, тому ймовірність події $\{X = x_1\}$ за теоремою додавання несумісних подій

$$P(x_1) = p(x_1, y_1) + ... +p(x_1, y_m).$$

Отже, ймовірність того, що випадкова величина X матиме значення X_i дорівнює сумі ймовірностей стовпчика x_i. Ці ймовірності записані в останньому рядку таблиці. Аналогічно в останньому стовпчику цієї ж таблиці записані ймовірності можливих значень величини Y. Крім того,

$$\sum_{i,j} p\left(x_i, y_j\right) = 1.$$

Умовна ймовірність події $\{Y = y_j\}$, якщо спостерігалася подія $\{X = x_i\}$, розраховується за формулою

$$P_{\{X=x_i\}}\left\{Y = y_j\right\} = \frac{p\left(x_i, y_j\right)}{P\left(x_i\right)}.$$

Сукупність умовних ймовірностей $P_{x_i}\left(y_1\right), P_{x_i}\left(y_2\right)$, …, $P_{x_i}\left(y_m\right)$, що відповідають одному і тому ж значенню x_i, називають *умовним розподілом* ***Y*** *при* $X = x_i$.

$$P_{x_i}(y_1)+P_{x_i}(y_2)+\ldots+P_{x_i}(y_m)=\frac{\sum_j p(x_i, y_j)}{P(x_i)}=1.$$

Розглянемо двовимірну випадкову величину **(*X*, *Y*)** (*систему двох випадкових величин* ***X*, *Y***) і пару дійсних чисел **(*x*,*y*)**. Ймовірність події ***X***, що матиме значення менше ніж *x*, і при цьому ***Y*** прийме значення менше ніж ***y***, позначимо через ***F*(*x*,*y*)**.

Функцією розподілу двовимірної випадкової величини ***(X, Y)*** *називають ймовірність*

$$F(x,y)=P(X<x, Y<y).$$

Щільністю сумісного розподілу ймовірностей ***f(x,y)*** *двовимірної випадкової величини* ***(X, Y)*** *називають другу змішану похідну від функції розподілу* ***F(x,y)***

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dxdy.$$

З означення та властивостей функції ***F*(*x*, *y*)** випливають властивості щільності розподілу:

1) $f(x,y) \geq 0$;

2) $P\{(X,Y)\subset D\} \equiv \iint_D f(x,y)\,dxdy$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=1$.

Числові характеристики двовимірних випадкових величин

Умовне математичне сподівання позначається ***M*(*Y/x*)** *і обчислюється за формулою*

$$M(Y/x)=\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p(y_j, x).$$

Аналогічно за відомими формулами вводяться й інші числові характеристики: умовна дисперсія і умовні моменти більш високих порядків.

Для системи неперервних випадкових величин маємо формули:

$$M(X)=\iint_D x\cdot f(x,y)dxdy;\quad M(Y)=\iint_D y\cdot f(x,y)dxdy;$$

$$D(X)=\iint_D (x-M(x))^2\cdot f(x,y)dxdy=$$
$$=\iint_D x^2\cdot f(x,y)dxdy-(M(x))^2;$$

$$D(Y)=\iint_D (y-M(y))^2\cdot f(x,y)dxdy=$$
$$=\iint_D y^2\cdot f(x,y)dxdy-(M(y))^2;$$

$$\sigma_x=\sqrt{D(x)};\quad \sigma_y=\sqrt{D(y)}.$$

Для системи дискретних випадкових величин маємо формули:

$$M(X)=m_x=\sum_i\sum_j x_i\cdot p_{ij};\quad M(Y)=m_y=\sum_i\sum_j y_i\cdot p_{ij};$$

$$D(X)=\sum_i\sum_j p_{ij}\cdot(x_i-m_x)^2=\sum_i\sum_j p_{ij}\cdot x_i^2-(M(X))^2;$$

$$D(Y)=\sum_i\sum_j p_{ij}\cdot(y_i-m_y)^2=\sum_i\sum_j p_{ij}\cdot y_i^2-(M(Y))^2.$$

Характеристикою зв'язку між випадковими величинами X та Y служить математичне сподівання перетинів відхилень X та Y від їхніх центрів, яке називають *моментом кореляції* і обчислюють за формулами для неперервних та дискретних випадкових величин:

$$K(X,Y)=M\left[(X-M(X))\cdot(Y-M(Y))\right],$$

або

$$K(X,Y)=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y).$$

Отже

$$K_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(x))(y-M(y))f(x,y)dxdy=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy - M(x)M(y),$$

$$K(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i - M(X)) \cdot (y_j - M(Y)) \cdot p_{ij} =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} - M(X) \cdot M(Y).$$

Величина кореляційного моменту залежить від одиниць вимірювань випадкових величин. Тому для системи двох величин вводять нову числову характеристику – *коефіцієнт кореляції* за формулою

$$r_{xy} = \frac{K(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

2.9. ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ ТА ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Випадковою функцією називається випадкова величина, що залежить від деякого невипадкового параметра t: $X(t,\omega) = X(t)$, де ω – множина елементарних подій. Наприклад, якщо A – випадкова величина, то $X(t) = At^2$ й $Y(t) = B_0 \sin(\alpha t + A)$ – випадкові функції ($B_0 = const, \alpha = const$).

У більшості випадків *одно аргументну випадкову функцію часу* t називають *випадковим процесом* певного досліджуваного параметра.

Можна дати і інше *означення випадкової функції у широкому розумінні*. За ним *випадковою функцією аргументу* t називається функція $X(t,\omega)$, значення якої при кожному фіксованому значенні аргументу $t = t_j$ є випадковою величиною $X(t_j) = X(\omega)$.

Отже, *випадкова функція (випадковий процес) – це сукупність реалізацій (звичайних функцій, графіків) або сукупність випадкових величин, що знаходяться у перетинах реалізацій при фіксованих значеннях аргументу.*

Обирати будемо той підхід до поняття випадкової функції (випадкового процесу), що у даній ситуації зручніше й вигідніше.

Числові характеристики випадкових функцій

Математичне сподівання випадкової функції $X(t)$ – невипадкова функція $M\left[X(t)\right]$, яка при фіксованому $t = t_k$ дорівнює математичному сподіванню випадкової величини $X(t_k)$

$$M\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot f(x,t)\, dx = m_x(t).$$

Дисперсія одновимірної випадкової функції визначається так само, як і для випадкової величини

$$D\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M\left[X(t)\right]\right)^2 \cdot f(x,t)\, dt;$$

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D\left[X(t)\right]}.$$

Якщо тепер взяти дві різні випадкові величини $X(t')$ та $X(t'')$, то кореляційний момент випадкових величин є функцією двох аргументів t' та t''

$$K\left(X(t'), X(t'')\right) = K_X(t', t'') =$$
$$= M\left[\left(X(t') - M\left[X(t')\right]\right) \cdot \left(X(t'') - M\left[X(t'')\right]\right)\right].$$

Такий момент має назву *кореляційної (авто кореляційної) функції*. Автокореляційна функція розкриває зв'язок між різними випадковими величинами $X(t')$ та $X(t'')$ однієї функції $X(t)$.

Кореляційна функція випадкової функції (процесу) – це така невипадкова (звичайна) функція $K_x(t_1, t_2)$, що для будь-якої пари припустимих значень аргументів, наприклад при, $t_1 = t'$, $t_2 = t''$, дорівнює кореляційному моменту випадкових величин $X(t')$ та $X(t'')$

$$K_x(t',t'')=K_x\left(X(t'),X(t'')\right).$$

Математичне сподівання і дисперсія, а також кореляційна функція випадкового процесу мають властивості, аналогічні властивостям числових характеристик випадкових величин.

Зауваження. Якщо маємо дві різні випадкові функції $X(t)$ та $Y(t)$, то кореляційний момент випадкових величин $X(t')$, $Y(t'')$ має назву *взаємно кореляційна функція* і обчислюється за формулою

$$R\left(X(t'),Y(t'')\right)=R_{XY}(t',t'')=$$

$$=M\left[\left(X(t')-M\left[X(t')\right]\right)\cdot\left(Y(t'')-M\left[Y(t'')\right]\right)\right].$$

Дві випадкові величини X і Y називаються *корельованими*, якщо їхній коефіцієнт кореляції є відмінним від нуля, і *некорельованими*, якщо він дорівнює нулю.

Властивості математичного сподівання, дисперсії та кореляційної функції випадкового процесу

Якщо $\varphi(t)$ невипадкова функція, а $X(t)$ та $Y(t)$ – випадкові функції, то маємо формули:

1. $M\left[\varphi(t)\right]=\varphi(t)$;
2. $M\left[\varphi(t)X(t)\right]=\varphi(t)m_x(t)$
3. $M\left[X(t)+Y(t)\right]=m_x(t)+m_y(t)$;
4. $M\left[X(t)+\varphi(t)\right]=m_x(t)+\varphi(t)$
5. $D\left[\varphi(t)\right]=0$;
6. $D\left[\varphi(t)X(t)\right]=\left(\varphi(t)\right)^2D_x(t)$;
7. $D\left[X(t)+\varphi(t)\right]=D_x(t)$;
8. $K_{\varphi(t)X(t)}(t_1,t_2)=$ $=\varphi(t_1)\varphi(t_2)K_x(t_1,t_2)$;
9. $K_{x+\varphi(t)}(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)$;
10. $K_x(t_1,t_2)=K_x(t_2,t_1)$.

Для кореляційної функції вводять поняття унормованої кореляційної функції

$$r_X\left(t',t''\right)=\frac{K_X\left(t',t''\right)}{\sqrt{D_x\left(t'\right)D_x\left(t''\right)}},$$

що має властивості, аналогічні властивостям коефіцієнта кореляції.

Сума випадкових функцій

Якщо $\boldsymbol{Z(t) = X(t) + Y(t)}$, $\quad m_z = m_x + m_y$,

$$K_{X+Y}(t'',t')=K_X(t'',t') + K_Y(t'',t') + R_{XY}(t'',t') + R_{YX}(t'',t'),$$

де

$$R\Big(X\left(t'\right),Y\left(t''\right)\Big)=R_{XY}\left(t',t''\right)=$$
$$=M\Big[\Big(X\left(t'\right)-M\left[X\left(t'\right)\right]\Big)\cdot\Big(Y\left(t''\right)-M\left[Y\left(t''\right)\right]\Big)\Big].$$

Якщо $X(t)$, $Y(t)$ - *некорельовані*, $\quad K_{X+Y}(t'',t')=K_X(t'',t') + K_Y(t'',t')$, $D_{X+Y}=D_X+D_Y$.

Похідна та інтеграл випадкових функцій

Нехай $Z(t) = X'\left(t\right)$, $Y(t) = \int\limits_0^t X(t)dt$,

тоді

$$m_z=(m_x)',\ m_Y=\int\limits_0^t m_x dt,$$

$$K_Z(t',t'')=K_{X'}(t',t'')=\frac{\partial^2 K_X(t',t'')}{\partial t'\,\partial t''},\quad K_Y(t',t'')=\int\limits_0^{t''}\int\limits_0^{t'} K_X(t'',t')\,dt'dt''.$$

Стаціонарні функції

Стаціонарні випадкові функції у *широкому розумінні* – це функції, що задовольняють такі умови:

$$m_x(t) = const,$$

$$K_X(t',t'') = K_X(t'-t'') = K_X(\tau), \text{ де } \tau = t'-t''.$$

2.10. ПОТОКИ ПОДІЙ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ МАРКОВА (ЛАНЦЮГИ МАРКОВА)

Потоки подій, їх властивості та класифікація

Послідовність подій, що відбуваються одна за одною, називається *потоком подій*. Наприклад, на телефонній станції це може бути: вхідний потік викликів; черга; апарати, що забезпечують зв'язок з абонентами; вихідний потік абонентів, які вже були обслужені та ін. Таку саму картину можна спостерігати в магазині – вхідний потік, черга, вихідний потік.

Будь-який потік можна розглядати як випадковий процес. Тому дуже часто замість слова «потоки» користуються словами «випадкові процеси». Математичною моделлю вхідного потоку є випадкова цілочислова функція $X(t)$, що дорівнює числу умов (вимог, людей), які надійшли до потоку за час $(0,t)$.

Для потоків вводиться поняття щільності або інтенсивності потоку, яке аналогічне поняттю щільності розподілу випадкової величини.

Інтенсивністю потоку називається границя відношення середнього числа умов, що надійшли за час τ, до всього проміжку τ, коли $\tau \to 0$

$$I(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{m(t,t+\tau)}{\tau}.$$

Найпростіший або пуассонівський потік – це потік, що задовольняє умови стаціонарності, ординарності і відсутності наслідків. Це один з найпростіших випадкових процесів з неперервним часом. Цей процес особливо часто зустрічається в різноманітних практичних застосуваннях.

Наведемо без доведення дві теореми. Вони встановлюють закон розподілу випадкової величини $X(\tau)$, яка дорівнює числу умов, що надійшли до потоку за час τ, і випадкової величини T, що дорівнює тривалості проміжку часу між двома умовами, які послідовно надійшли до потоку.

Теорема 1. Якщо потік є найпростішим, то ймовірність надходження k умов до потоку за час τ обчислюється за формулою

$$P_k(\tau)=\frac{(\lambda\cdot\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau},$$

тобто випадкова величина $X(\tau)$ розподілена за законом Пуассона.

Теорема 2. У найпростішому потоці випадкова величина T розподілена за показниковим законом

$$F(t)=P(T<t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda\tau}, & t\geq 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Наслідок. Середня довжина проміжку часу між моментами надходження двох послідовних вимог до пуассонівського потоку дорівнює оберненій величині його ймовірності

$$M[T]=\frac{1}{I}=\frac{1}{\lambda}.$$

Характерна особливість пуассонівського потоку полягає в тому, що зміна умов відбувається стрибками.

Пуассонівський випадковий процес з великою точністю виконується в багатьох природних явищах і технічних процесах.

Випадкові процеси Маркова (ланцюги Маркова)

Розглянемо найпростіші з випадкових процесів – так звані ланцюги Маркова, які були запроваджені й систематично вивчені видатним російським математиком А. А. Марковим.

Поняття ланцюга Маркова. Матриця переходу. Нехай здійснюється послідовність випробувань, в кожному з яких може настати одна і тільки одна з k попарно несумісних подій A_1, A_2, ... , A_k. Позначимо через ξ_n номер події, яка настала при n-му випробуванні (наприклад, запис $\xi_n = i$ означає, що при n-му випробуванні настала подія A_i). Кажуть, що ця послідовність випробувань або послідовність випадкових величин ξ_1, ξ_2, ... , ξ_n, ... утворює *ланцюг Маркова*, якщо ймовірність того, що при $(n+1)$-му випробуванні $(n = 1, 2, \ldots)$ настане певна подія A_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, залежить лише від того, яка подія настала при n-му випробуванні, і не залежить від результатів попередніх випробувань.

Умовну ймовірність p_{ij} називають *ймовірністю переходу* системи (за один крок) із стану A_i до стану A_j. Це є умовна ймовірність настання події A_j при деякому випробуванні за умови, що при попередньому випробуванні настала подія A_i. Ймовірності p_{ij} утворюють квадратну матрицю

$$\pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix},$$

яку називають матрицею переходу. Ця матриця має такі властивості:

$$0 \le p_{ij} \le 1; \quad \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Перша властивість є очевидною, оскільки p_{ij} – ймовірності; друга випливає з того, що система зі стану A_i обов'язково переходить до одного зі станів A_1, A_2, ... , A_k.

Ймовірності переходу за *n* кроків

Позначимо через $p_{ij}(n)$ ймовірність переходу системи зі стану A_i до стану A_j через n кроків, тобто ймовірність того, що при $(s+n)$-му випробуванні настане подія A_j, якщо при s-му випробуванні настала A_i. Якщо $n>1$, $m<n$, то за формулою повної ймовірності

$$p_{ij}(n)=P\{\xi_{s+n}=j/\xi_s=i\}=\sum_{r=1}^{k}P\{\xi_{s+m}=r/\xi_s=i\}P\{\xi_{s+n}=j/\xi_{s+m}=r\},$$

тобто

$$p_{ij}(n)=\sum_{r=1}^{k}p_{ir}(m)\,p_{rj}(n-m).$$

Якщо матрицю ($p_{ij}(n)_{i,j=1}^{k}$) позначити через $\pi(n)$ (при цьому $\pi(1)=\pi$), то остання рівність, згідно з відомим з алгебри правилом множення матриць, означає, що коли $0<m<n$, то

$$\pi(n)=\pi(m)\cdot\pi(n-m).$$

Зокрема, при $m=1$ ця рівність дає

$$\pi(n)=\pi\cdot\pi(n-1),$$

звідки випливає, що

$$\pi(n)=\pi^n.$$

Зауваження. Теорія потоків (випадкових процесів) нині досить добре розроблена і має широке практичне застосування в багатьох економічних задачах (енергетики, меліорації, екології, геології, промисловості), у демографічних методах пересувки віків, у розробці військових стратегій і плануванні виробництва й реалізації однорідних товарів масового споживання, у теорії масового обслуговування.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1

Тема 1. Комбінаторика

Література : [3], гл. 6, § 6.1; [7], гл. 10, § 30; [12], розділ 2, § 2.1; [13].

При розв’язанні задач теорії ймовірностей часто доводиться підраховувати кількість усіх ймовірних способів розташування деяких елементів або здійснення деякої події. У таких випадках використовують поняття комбінаторики, основними з яких є перестановки, розміщення і комбінації (сполучення), а також комбінаторне правило множення.

Розглянемо деякі типові задачі.

Приклад 1. Скількома способами можна поставити на полку 5 різних книг ?

Розв’язання. Першою можна поставити будь-яку з 5 книг. Другою – будь-яку з 4, що залишилися, і т. д. Таким чином, кількість способів, якими можна поставити на полку 5 різних книг, дорівнює числу перестановок з 5 елементів, тобто

$$\boldsymbol{P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120}.$$

Приклад 2. Студент повинен скласти три іспити протягом семи днів (не більше, ніж один іспит у день). Скількома способами це можна зробити?

Розв’язання. Кількість способів дорівнює числу упорядкованих підмножин з трьох елементів (дні складання конкретних іспитів), що можна взяти з множини з семи елементів (дні, які відведені для складання іспитів), тобто

$$\boldsymbol{A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210}.$$

У додаток відзначимо, що у випадку, коли, припустимо, відомо, що останній іспит повинен бути складеним на сьомий день, кількість способів буде дорівнювати

$$\boldsymbol{3 \cdot A_6^2 = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90}.$$

Приклад 3. Скільки чоловік брало участь у шаховому турнірі, якщо відомо, що кожні два шахісти зустрічалися один раз, а всього було зіграно 210 партій?

Розв'язання. Кількість партій, які були зіграні, дорівнює числу невпорядкованих 2-елементних підмножин, що можна взяти з множини із n елементів, тобто

$$C_n^2 = 210,$$

де n – кількість шахістів, які брали участь у турнірі. Тоді

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = 210, \; n^2 - n - 420 = 0, \; n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 420}}{2} = \frac{1 \pm 41}{2}.$$

Оскільки $n > 0$, то $n = \frac{1+41}{2} = 21$.

Приклад 4. Скількома способами можна призначити варту з 9 солдатів, 2 сержантів та 1 офіцера, якщо в підрозділі 14 солдатів, 3 сержанти і 4 офіцери.

Розв'язання. Дев'ять солдатів можна вибрати

$$n_1 = C_{14}^9 = C_{14}^5 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2002 \text{ способами,}$$

два сержанти

$$n_2 = C_3^2 = C_3^1 = \frac{3}{1} = 3 \text{ способами,}$$

одного офіцера

$$n_3 = C_4^1 = \frac{4}{1} = 4 \text{ способами.}$$

Таким чином, за правилом множення варту можна призначити

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 2002 \cdot 3 \cdot 4 = 24024 \text{ способами.}$$

Тема 2. Безпосереднє обчислення ймовірностей подій

Література : [3], гл. 6, § 6.3; [4], гл. 1, § 1,2; [5], гл. 1; [6], гл. 5, § 1; [7], гл. 10, § 31, 32; [9], гл. 20, § 1, 2; [12], гл. 2, § 2.1; [13].

Наведемо приклади обчислення ймовірностей подій із застосуванням класичного означення ймовірностей та формул комбінаторики.

Приклад 1. Кидають два гральних кубика. Яка ймовірність того, що сума очок, що випали, буде парною?

Розв'язання. Позначимо через A подію, ймовірність якої треба знайти. За означенням, ймовірність $P(A)=\frac{m}{n}$. Кількість усіх можливих комбінацій, що взагалі можуть бути у цьому випадку $n=n_1\cdot n_2=6\cdot 6=36$. Події **А** будуть сприяти $m=18$ комбінацій, у яких сума очок буде парною, а саме: **1-1, 1-3, 1-5, 2-2, 2-4, 2-6, 3-1, 3-3, 3-5, 4-2, 4-4, 4-6, 5-1, 5-3, 5-5, 6-2, 6-4, 6-6.**

Таким чином,

$$P(A)=\frac{18}{36}=0{,}5.$$

Приклад 2. В урні містяться 6 білих і 4 чорних кульки. З урни виймають навмання одразу 5 кульок. Знайти ймовірність події: A – усі кульки білі; B – чотири кульки білі та одна чорна.

Розв'язання. Число рівноможливих незалежних подій дорівнює

$$n=C_{10}^5=\frac{10\,!}{5!\cdot 5!}=252.$$

Події A сприяють $m_1=C_6^5=\frac{6!}{5!\cdot 1!}=6$, а події B – $m_2=C_6^4\cdot C_4^1=$ $=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot 1!}=15\cdot 4=60$ наслідків експерименту. Тому

$$P(A)=\frac{6}{252}=\frac{1}{42}\approx 0{,}024,$$

$$P(B)=\frac{60}{252}=\frac{2}{7}\approx 0{,}24.$$

Приклад 3. У коробці містяться шість однакових, занумерованих кульок. Навмання по одній виймають усі кульки. Знайти ймовірність того, що номери вийнятих кульок розташуються за зростанням.

Розв'язання. Нехай A – подія, ймовірність якої треба знайти. Результатами експерименту є перестановки без повторень з 6 елементів. Число усіх результатів експерименту дорівнює P_6. Для події **A** сприятливим є лише один результат (номери зростатимуть). Отже,

$$P(A)=\frac{1}{P_6}=\frac{1}{6!}=\frac{1}{720}.$$

Приклад 4. Слово "інтеграл" складено з літер на картках розрізної азбуки. З них навмання виймають три картки і кладуть в ряд одну за однією в порядку появи. Яка ймовірність того, що при цьому складеться слово "гра"?

Розв'язання. При утворенні простору елементарних подій Ω розглядуються усі впорядковані 3-елементні підмножини 8-елементної множини (букви, що утворюють слово "інтеграл"). Тому $n=A_8^3=\frac{8!}{(8-3)!}=8\cdot 7\cdot 6=336$, а сприятливими для шуканої події **A** є лише один випадок $(m=1)$, коли підряд буде вийнято букви "г", "р" і "а". Отже,

$$P(A)=\frac{1}{336}\approx 0{,}003.$$

Тема 3. Теореми додавання і множення ймовірностей

Література: [3], гл. 6, § 6.4; [4], гл. 2, § 1,2; [5], гл. 2,3; [6], гл. 5, § 2; [7], гл. 10, § 32; [9], гл. 20, § 3,4,5; [12], гл. 2, § 2.1; [13].

При розв'язанні практичних задач часто необхідно визначати ймовірності досить складних подій, безпосереднє обчислення яких пов'язане зі значними труднощами або взагалі неможливе. У таких випадках складні події розглядають у вигляді комбінацій простіших подій. Для цього застосовують операції додавання та множення. Студент повинен вміти відрізняти сумісні та несумісні, залежні та незалежні події. Також важливим є поняття умовної ймовірності подій.

Приклад 1. У лотереї 1000 білетів, з них на один білет випадає виграш 500 грн., на 10 білетів – виграші по 100 грн., на 50 білетів – виграші по 20 грн., на 100 білетів – виграші по 5 грн. Решта білетів невиграшні. Знайти ймовірність виграшу на один білет не менш як 20 грн.

Розв'язання. Позначимо події: $\boldsymbol{A}$ – виграш не менш як 20 грн.; $\boldsymbol{A_1}$ – виграш 20 грн.; $\boldsymbol{A_2}$ - виграш 100 грн.; $\boldsymbol{A_3}$ – виграш 500 грн.

Подія $\boldsymbol{A}$ виражається через суму трьох несумісних подій $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, тобто $\boldsymbol{A=A_1+A_2+A_3}$. Застосовуючи теорему додавання, дістанемо

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3),$$

або

$$P(A)=0{,}050+0{,}010+0{,}001=0{,}061.$$

<u>*Зауваження.*</u> Зверніть увагу на те, що теорему додавання застосовують до розв'язування тих задач, в яких йдеться про появу або події $\boldsymbol{A_1}$, або події $\mathbf{A_2}$, ..., або події $\boldsymbol{A_n}$.

Приклад 2. Ймовірність попадання в мішень одним стрільцем становить 0,8, іншим – 0,7. Стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу. Яка ймовірність того, що принаймні один стрілець влучить в мішень?

Розв'язання. Нехай подія **А** – влучення першого стрільця в ціль, подія ***B*** – другого, а подія ***C*** – шукана подія. Тоді ***C=A+B***. Враховуючи, що події ***A*** і ***B*** – сумісні, проте незалежні, дістаємо:

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) =$$
$$= 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}94.$$

Приклад 3. У складальника є 3 конусних та 7 еліптичних валиків. Він бере один раз 2 валики, а потім ще 2. Яка ймовірність того, що взяті валики еліптичні?

Розв'язання. Нехай подія ***A*** полягає в тому, що перший раз взяті валики еліптичні, подія ***B*** – другий раз взяті теж еліптичні валики.

Оскільки події ***A*** й ***B*** залежні, то за теоремою добутку ймовірностей залежних подій

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} \cdot \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 4. Ймовірність у студента другого курсу перейти на третій дорівнює 0,9, а ймовірність закінчити академію – 0,8. З якою ймовірністю можна стверджувати, що студент третього курсу закінчить академію?

Розв'язання. Нехай подія ***A*** – перехід на третій курс, подія ***B*** – закінчення академії. Ймовірність цих подій, згідно з умовою, ***P(A)*=0,9**, ***P(B)*=0,8**. Події ***A*** і ***B*** залежні, оскільки для того, щоб закінчити академію, треба спочатку перейти на третій курс. Отже,

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = 0{,}9 \cdot P_A(B) = 0{,}8,$$

звідки

$$P_A(B) = \frac{0{,}8}{0{,}9} = 0{,}89.$$

Приклад 5. Стрілець A_1 влучає в ціль з ймовірністю $p_1 = 0{,}8$, стрілець A_2 – з ймовірністю $p_2 = 0{,}7$, стрілець A_3 – з ймовірністю

$p_3 = 0{,}9$. Знайти ймовірність хоча б одного попадання (подія A) при одному пострілі кожного зі стрільців.

Розв'язання. Обчислимо ймовірності протилежних подій, які полягають в тому, що кожен зі стрільців не влучить в ціль:

$$q_1 = 1 - p_1 = 0{,}2; \quad q_2 = 1 - p_2 = 0{,}3; \quad q_3 = 1 - p_3 = 0{,}1.$$

Ймовірність того, що жоден зі стрільців не влучить в ціль, тобто ймовірність події $\overline{A}$, дорівнює $P\left(\overline{A}\right) = q_1 q_2 q_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}006.$

Тоді ймовірність того, що хоча б один зі стрільців влучить в ціль

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

Тема 4. Формула повної ймовірності. Формули Байєса

Література: [3], глава 6, § 6.3; [4], глава 2, § 3,4; [5], глава 4, § 2,3; [6], глава 5, § 4; [7], глава 10, § 32; [9], глава 20, § 6; [12], глава 2, § 2.1.

Наслідками теорем додавання та множення ймовірностей є формули повної ймовірності та Байєса. Розглянемо приклад.

Приклад. У комп'ютерному магазині за рік продано 1000 моніторів, 300 принтерів і 100 сканерів. Протягом гарантійного терміну в сервісний центр надходять на ремонт у середньому 0,5% моніторів, 1% принтерів і 1,5% сканерів. 1) Визначити ймовірність того, що навмання вибрана з перерахованих за серійним номером одиниця товару надійде протягом гарантійного терміну на ремонт у сервісний центр. 2) Навмання вибрана з перерахованих за серійним номером одиниця товару надійшла протягом гарантійного терміну на ремонт у сервісний центр. Яка ймовірність того, що це монітор?

Розв'язання. 1) Нехай A – подія, яка полягає в тому, що навмання вибрана з перерахованих за серійним номером одиниця товару надійде протягом гарантійного терміну на ремонт у сервісний центр. Введемо гіпотези: H_1 – подія, яка полягає в тому, що навмання вибрана з перерахованих за серійним номером одиниця товару – монітор; H_2 – подія, яка полягає в тому, що навмання вибрана одиниця товару – принтер; H_3 – подія, яка полягає в тому, що навмання вибрана одиниця товару – сканер. Події H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу попарно несумісних подій. За умовою задачі

$$P(H_1)=\frac{1000}{1000+300+100}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7},\quad P(H_2)=\frac{300}{1400}=\frac{3}{14},\quad P(H_3)=\frac{100}{1400}=\frac{1}{14}.$$

Перевірка: $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=\frac{10}{14}+\frac{3}{14}+\frac{1}{14}=1$.

Крім того, маємо умовні ймовірності $P_{H_1}(A)=0{,}005$, $P_{H_2}(A)=0{,}01$, $P_{H_3}(A)=0{,}015$.

За формулою повної ймовірності

$$P(A)=P(H_1)\,P_{H_1}(A)+P(H_2)\,P_{H_2}(A)+P(H_3)\,P_{H_3}(A)=\frac{5}{7}\cdot 0{,}005+$$

$$+\frac{3}{14}\cdot 0{,}01+\frac{1}{14}\cdot 0{,}015=\frac{1}{280}+\frac{3}{1400}+\frac{3}{2800}=\frac{10+6+3}{2800}=\frac{19}{2800}\approx 0{,}007.$$

2) Нехай тепер A – подія, яка полягає в тому, що навмання вибрана з перерахованих за серійним номером одиниця товару надійшла протягом гарантійного терміну на ремонт у сервісний центр. Введемо ті ж самі гіпотези H_1, H_2, H_3, що й у першому пункті задачі. Тоді за формулою Байєса

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\,P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{7}\cdot 0{,}005}{\frac{5}{7}\cdot 0{,}005+\frac{3}{14}\cdot 0{,}01+\frac{1}{14}\cdot 0{,}015}=\frac{\frac{1}{280}}{\frac{19}{2800}}=$$

$$=\frac{10}{19}\approx 0{,}526.$$

Неважко бачити, що після того, як стало відомо, що подія A відбулася, оцінка гіпотези H_1 суттєво змінилася: тоді як її апріорна оцінка

$P(H_1)$ складала $\frac{5}{7} \approx 71{,}4\%$, апостеріорна оцінка $P_A(H_1)$ складає вже $\frac{10}{19} \approx 52{,}6\%$, тобто оцінка гіпотези H_1 зменшилася майже на 21%.

Тема 5. Послідовні незалежні випробування. Граничні теореми

Література: [3] , гл. 6, § 6.6; [4], гл. 3, § 1-4; [5], гл.5, § 1-4; [6], гл. 5, § 3,9; [7], гл. 10, § 33; [13], § 3.

Формули для схеми незалежних випробувань

№	Схема розрахунку	Біноміальний розподіл – формула Бернуллі (n – невелике)	Формули Муавра-Лапласа ($npq \le 9$)	Формула Пуассона (n – велике, $p < 0{,}1$ або $q < 0{,}1$)
1	**Ймовірність того, що подія A наступить рівно k разів**	$P_n(k)=C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, $p+q=1$	$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$ $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$	$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ $\lambda = n \cdot p$
2	**Ймовірність того, що подія A наступить не менш ніж k_1 і не більше k_2 разів**	$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$	$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

Зауваження. Локальна та інтегральна формули Муавра-Лапласа дають тим точніше наближення при даному n, чим ближче p до $0{,}5$.

Найімовірнішим числом появи події A *у* n *незалежних випробуваннях* називається число m_0, якщо імовірність того, що подія A появиться у цих n випробуваннях рівно m_0 раз не менше імовірності появи цієї події будь-яке інше можливе число раз $\left(P(m_0) \ge P(m)\right.$, де $\left.0 < m \le n\right)$.

Якщо $p \neq 0$ і $p \neq 1$, то число m_0 можна визначити з подвійної нерівності

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Різниця правого та лівого граничних значень у цій нерівності дорівнює одиниці ($p + q = 1$). Тому числа $np - q$ і $np + p$ або одночасно дробові, або одночасно цілі. Якщо ці числа дробові, то найімовірніше число m_0 має одне значення, якщо ж вони цілі, то найімовірніше число m_0 приймає два значення $m_0' = np - q$ і $m_0'' = np + p$. У випадку, якщо np – ціле число, то $m_0 = np$.

Розглянемо приклади, при розв'язанні яких будемо користуватись формулами та відомостями, наведеними у довідниковому матеріалі посібника.

Приклад 1. Два шахісти умовились зіграти десять результативних партій. Ймовірність виграшу кожної окремої партії першим гравцем дорівнює $\frac{2}{3}$, другим – $\frac{1}{3}$ (нічиї не враховуються). Чому дорівнює ймовірність: 1) виграшу всієї гри (потрібно виграти понад п'ять партій) а) першим гравцем, б) другим гравцем; 2) загального нічийного результату?

Розв'язання. Визначимо події A, B, C: A – виграє перший гравець, B – виграє другий гравець, C – нічийний результат. Для того щоб гру виграв перший гравець, йому необхідно виграти 6, 7, 8, 9 або 10 партій. Тому, за формулою Бернуллі і теоремою додавання ймовірностей

$$P(A) = P_{10}(6) + P_{10}(7) + P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) = C_{10}^{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{4} +$$

$$+C_{10}^{7}\left(\frac{2}{3}\right)^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{3} + C_{10}^{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{2} + C_{10}^{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{9}\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0,7869.$$

$$P(C) = P_{10}(5) = C_{10}^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5} = 0,1366.$$

Події A, B, C складають повну групу, тому

$$P(B)=1-P(A)-P(C)=1-0{,}7869-0{,}1366=0{,}0766.$$

<u>*Зауваження.*</u> Для наближеного обчислення $n!$ при великих значеннях n корисною є формула Стірлінга

$$n!\approx\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n}=\sqrt{2\pi n}\cdot n^{n}\cdot e^{-n}.$$

Приклад 2. За даними технічного контролю в середньому 2% виготовлених на заводі годинників потребують додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що зі 100 годинників, виготовлених на заводі, додатково відрегулювати потрібно буде не більш ніж три годинника.

Розв'язання. Оскільки $n = 100$ велике число, а $p = 0{,}02$ мале, то шукану ймовірність можна знайти за формулою Пуассона:

$$\lambda=n\,p=100\cdot 0{,}02=2;$$

$$P(A)=P_{100}(0)+P_{100}(1)+P_{100}(2)+P_{100}(3)=e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!}+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}\right)\approx 0{,}85.$$

Приклад 3. Ймовірність схожості насіння дорівнює 0,75. Визначити ймовірність того, що з 500 висіяних насінин не зійде 130.

Розв'язання. Оскільки $n = 500$ велике число, а $p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ не є близьким до нуля, то для обчислення $P_{500}(130)$ застосуємо локальну теорему Лапласа. Для цього обчислимо

$$\sqrt{n\,pq}=\sqrt{500\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}\approx 9{,}682; \qquad x=\frac{k-np}{\sqrt{n\,pq}}=\frac{130-500\cdot 0{,}25}{9{,}682}\approx 0{,}52.$$

Знаходимо $\varphi(0{,}52)$ за таблицею функції Гаусса ([4], [5], [6]) $\varphi(0{,}52)=0{,}3485$.

Тоді за формулою

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)$$

дістанемо

$$P_{500}(130)=\frac{\varphi(0{,}52)}{9{,}682}=\frac{0{,}3485}{9{,}682}\approx 0{,}036\,.$$

Приклад 4. При дослідженні впливу легування на схильність сталі до перегріву виявлено, що ймовірність зниження ударної в'язкості термічно обробленого металопрокату становить $p=0{,}2$. Знайти ймовірність того, що серед 225 зразків від 30 до 50 виробів матимуть знижену ударну в'язкість.

Розв'язання. Маємо $p=0{,}2;$ $q=1-p=0{,}8;$ $n=225;$ $k_1=30;$ $k_2=50$. Обчислимо

$$x_1=\frac{30-225\cdot 0{,}2}{\sqrt{225\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=-2{,}5; \qquad x_2=\frac{50-225\cdot 0{,}2}{\sqrt{225\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=0{,}833\,.$$

$$P_{225}(30;50)\approx \Phi(0{,}833)-\Phi(-2{,}5)=\Phi(0{,}833)+\Phi(2{,}5).$$

Користуючись таблицею $\Phi(x)$, знаходимо: $\Phi(0{,}833)=0{,}2976$; $\Phi(2{,}5)=0{,}4938$.

Таким чином, $P_{225}(30;50)\approx 0{,}2976+0{,}4938=0{,}7914$.

Тема 6. Випадкові величини

Література : [3], гл. 6, § 6.7. – 6.9, 6.11; [4], гл. 4, § 1-3; гл. 5, § 1-6; [5], гл. 6, § 1-6; гл. 7; гл. 8, § 1-7; гл. 9, § 2,3; гл. 10-13; [6], гл. 5, § 5,6, 8-11; [7], гл. 10, § 34; 35; [9], гл. 20, § 7,9,10, 12-14; § 15-17; [12], гл. 2, § 2.2.

6.1. Числові характеристики випадкових величин

Розв'язання типових прикладів

Приклад 1. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x_i	13	18	19	x_4	25
p_i	0,18	p_2	0,22	0,2	0,15

Знайти невідомі x_4 та p_2, якщо $M(X)=18{,}77$. Обчислити $D(X)$.

Розв'язання. Для знаходження невідомої p_2 використовуємо умову $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, тобто $0{,}18 + p_2 + 0{,}22 + 0{,}2 + 0{,}15 = 1$, звідки $p_2 = 0{,}25$.

Математичне сподівання обчислюємо за формулою

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i .$$

Маємо

$$13\cdot 0{,}18+18\cdot 0{,}25+19\cdot 0{,}22+x_4\cdot 0{,}2+25\cdot 0{,}15=18{,}77 .$$

Тоді $14{,}77+0{,}2\cdot x_4=18{,}77$, звідки $x_4=\dfrac{4}{0{,}2}=20$.

Отже, закон розподілу дискретної величини приймає вигляд

x_i	13	18	19	20	25
p_i	0,18	0,25	0,22	0,2	0,15

Дисперсію обчислюємо за формулою

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2\cdot p_i-[M(X)]^2=$$

$$=13^2\cdot 0{,}18+18^2\cdot 0{,}25+19^2\cdot 0{,}22+20^2\cdot 0{,}2+25^2\cdot 0{,}15-(18{,}77)^2=$$

$$=364{,}59-352{,}3129=12{,}2771.$$

Приклад 2. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x_i	1	2	x_3	6	7
p_i	0,2	0,3	0,15	p_4	0,1

Знайти невідомі x_3 та p_4, якщо $D(X)=4{,}74$.

Розв'язання. Знайдемо p_4 за умовою $\sum_{i=1}^{n} p_i=1,$ тобто $0{,}2+0{,}3+0{,}15+p_4+0{,}1=1,$ звідки $p_4=0{,}25.$

Дисперсію обчислюємо за формулою:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{k} x_i^2 p_i-\left(\sum_{i=1}^{k} x_i p_i\right)^2.$$

Отже,

$$1^2\cdot 0{,}2+2^2\cdot 0{,}3+x_3^2\cdot 0{,}15+6^2\cdot 0{,}25+7^2\cdot 0{,}1-$$

$$-(1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}3+x_3\cdot 0{,}15+6\cdot 0{,}25+7\cdot 0{,}1)^2=4{,}74;$$

$$17x_3^2-120x_3+208=0;$$

$$x_3=\frac{120\pm 16}{34};\qquad x_3^{(1)}=\frac{120+16}{34}=\frac{136}{34}=4;$$

$$x_3^{(2)}=\frac{120-16}{34}=\frac{104}{34}=\frac{52}{17}=3\frac{1}{17}.$$

З умови того, що x_i – ціла величина, маємо розв'язок $x_3=4$.

Закон розподілу приймає вигляд

x_i	1	2	4	6	7
p_i	0,2	0,3	0,15	0,25	0,1

Приклад 3. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 8; \\ (x-8)^3, & 8<x\le 9; \\ 1, & x>9. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку щільність розподілу ймовірностей $f(x)$. Оскільки $f(x)=F'(x)$, то

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 8; \\ 3(x-8)^2, & 8<x\le 9; \\ 0, & x>9. \end{cases}$$

Оскільки $f(x)$ задана на $(a;b)$, то $M(X)=\int\limits_a^b x\,f(x)dx$. Отже маємо

$$M(X)=\int\limits_8^9 x\cdot 3(x-8)^2\,dx=3\int\limits_8^9 x(x-8)^2\,dx=\left|\begin{array}{lll} x-8=t & & \\ x=t+8 & & \\ x & 8 & 9 \\ t & 0 & 1 \end{array}\right|=$$

$$=3\int\limits_0^1 (t+8)\,t^2dt=3\int\limits_0^1\left(t^3+8t^2\right)dt=3\left(\frac{t^4}{4}+8\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=3\left(\frac{1}{4}+\frac{8}{3}\right)=$$

$$= 3\frac{3+32}{12} = \frac{35}{4} = 8{,}75\,.$$

Оскільки $f(x)$ задана на $(a;b)$, то $D(X) = \int\limits_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$.

Отже

$$D(X) = \int\limits_8^9 x^2 \cdot 3(x-8)^2 dx - [M(X)]^2 = 3\int\limits_8^9 \left(x^4 - 16x^3 + 64x^2\right)dx - 8{,}75^2 =$$

$$= 3\left(\frac{x^5}{5} - 4x^4 + \frac{64}{3}x^3\right)\Bigg|_8^9 - 76{,}56 = \frac{383}{5} - 76{,}56 = 0{,}04\,.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}2\,.$$

Приклад 4. Неперервна випадкова величина задана щільністю розподілу ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \le 0; \\ \dfrac{a}{x^2+1}\,, & 0 < x \le 1; \\ 0\,, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти $D(X), M(X), \sigma(X)$.

Розв'язання. Виходячи з властивості $f(x)$, а саме з того, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, маємо $\int\limits_0^1 \frac{a\,dx}{x^2+1} = 1$. Тоді

$$a\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = a \cdot arctgx\ \Big|_0^1 = a(arctg1 - arctg0) = a\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{a\pi}{4} = 1, \qquad a = \frac{4}{\pi}\,.$$

Таким чином, маємо

$$f(x)=\begin{cases} 0\,, & x\le 0; \\ \dfrac{4}{\pi\left(x^2+1\right)}, & 0<x\le 1; \\ 0\,, & x>1. \end{cases}$$

Математичне сподівання

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_0^1 \frac{4x\,dx}{\pi\left(x^2+1\right)}=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^1\frac{xdx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}\cdot\left(ln(1+1)-ln1\right)=\frac{2}{\pi}ln2\approx 0{,}4413\,.$$

Дисперсія

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2=\int\limits_0^1 \frac{4x^2dx}{\pi\left(x^2+1\right)}-0{,}4413^2=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx-0{,}195=\frac{4}{\pi}\left(x-arctgx\right)\Big|_0^1-0{,}195=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-0{,}195=$$

$$=\frac{4}{\pi}-1-0{,}195=0{,}08\,.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=0{,}28\,.$$

6.2. Закони розподілу дискретних та неперервних випадкових величин

При вивченні матеріалу цього розділу та розв'язанні відповідних задач контрольної роботи студент повинен користуватися рекомендованою літературою та формулами, що наведені у п. 6.2, 6.3 довідкового матеріалу.

Приклад 1. Баскетболіст проводить 4 кидки по корзині з однієї й тієї ж позиції. Ймовірність попадання при одному кидку дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу кількості попадань у кошик, знайти середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення кількості попадань.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X (кількість попадань м'яча у корзину) приймає наступні ймовірні значення $x_1 = 0,\quad x_2 = 1,$ $x_3 = 2,\quad x_4 = 3,\quad x_5 = 4$.

Результати кидків не залежать один від одного, ймовірність попадання при одному кидку постійна. Це означає, що випадкова величина X розподілена за біноміальним законом.

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $n = 4,\quad k = 0,1,2,3,4;\quad p = 0,8;\quad q = 1 - p = 0,2.$

Обчислимо

$$P(0) = C_4^0 p^0 q^4 = (0,2)^4 = 0,0016;$$

$$P(1) = C_4^1 p q^3 = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,0256;$$

$$P(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536;$$

$$P(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q = 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096;$$

$$P(4) = C_4^4 p^4 q^0 = 0,8^4 = 0,4096.$$

Перевіримо вірність обчислень:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 + 0,4096 = 1.$$

Закон розподілу має вигляд:

x	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Математичне сподівання (середнє значення) кількості влучань $M(X) = np = 4 \cdot 0,8 = 3,2$, дисперсія $D(X) = npq = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,64$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,64} = 0,8$.

Приклад 2. Кількість викликів, що надходять на телефонну станцію протягом T хвилин є випадковою величиною, що розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = aT$, де $a = 2$ (середня кількість викликів протягом однієї хвилини). Знайти ймовірність того, що на станцію протягом півхвилини поступлять 2 виклики.

Розв'язання. За законом Пуассона

$$P_T(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}.$$

Вважаючи $T = 0,5$, $к = 2$, одержимо

$$\lambda = 2 \cdot 0,5 = 1,$$

$$P_{0,5}(2) = \frac{e^{-1}}{2!} = \frac{0,3679}{2} = 0,1839.$$

Приклад 3. Автобуси деякого маршруту рухаються точно за розкладом. Проміжок руху 5 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме черговий автобус менше, ніж 3 хвилини.

Розв'язання. Пасажир може підійти до зупинки у будь-який момент. Тому час очікування можна вважати випадковою величиною X, що рівномірно розподілена у інтервалі руху автобусів.

Щільність розподілу $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, де $(b-a)$ - довжина інтервалу, у якому знаходяться ймовірні значення X. У цій задачі $b - a = 5$, тому

$f(x)=\frac{1}{5}$. Оскільки автобуси йдуть точно за розкладом (тобто наступний прийде не раніше означеного часу), то пасажир чекатиме його менше ніж 3 хвилини, якщо $2 < x < 5$.

Ймовірність попадання випадкової величини в деякий інтервал обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Отже,

$$P(2 < X < 5)=\int_{2}^{5}\frac{1}{5}dx=\frac{x}{5}\Big|_{2}^{5}=\frac{3}{5}.$$

Приклад 4. Середній час безвідмовної роботи радіоелектронного обладнання літака за статистичними даними складає 200 годин. Знайти ймовірність відмови обладнання протягом 10 годин польоту.

Розв'язання. Час безвідмовної роботи обладнання є випадковою величиною T, розподіленою за показниковим законом

$$F(t)=\begin{cases}0, & t \le 0;\\ 1-e^{-\lambda t}, & t > 0,\end{cases}$$

де $\lambda -$ інтенсивність відмов (кількість відмов за одиницю часу).

У даному випадку $t=10,\quad \lambda=\frac{1}{200}$ і ймовірність відмови за час t

$$P(T < t)=1-e^{-\lambda t}=1-e^{-\frac{10}{200}}=0{,}049.$$

Приклад 5. Для дослідження продуктивності певної породи свійської птиці вимірюють діаметр яєць. Найбільший поперечний діаметр яєць є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з середнім значенням 5 см і середнім квадратичним відхиленням 0,3 см. Знайти ймовірність того, що: а) діаметр узятого навмання яйця буде знаходитись в межах від 4,7 до 6,2 см; б) відхилення діаметра яйця від середнього не перевершить за абсолютною величиною 0,6 см.

Розв'язання. Випадкова величина X – найбільший поперечний діаметр яйця, математичне сподівання (середнє значення) при нормальному законі розподілу $a = 5,$ середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0{,}3$. Ймовірність попадання випадкової величини X у інтервал (α, β)

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – інтегральна функція Лапласа (її значення наведені у відповідній таблиці).

Оскільки $\alpha = 4{,}7, \quad \beta = 6{,}2$, маємо

$$P(4{,}7 < x < 6{,}2) = \Phi\left(\frac{6{,}2 - 5}{0{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{4{,}7 - 5}{0{,}3}\right) = \Phi(4) + \Phi(1) = 0{,}3413 + 0{,}5 = 0{,}8413.$$

Ймовірність відхилення випадкової величини X від її середнього значення на величину $\delta = 0{,}6$

$$P(|x - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_x}\right),$$

тобто

$$P(|x - 5| < 0{,}6) = 2\Phi\left(\frac{0{,}6}{0{,}3}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Нормальний розподіл відіграє в теорії ймовірностей і математичній статистиці важливу роль. Це пояснюється, зокрема, тим, що при досить широких припущеннях розподіл суми великого числа випадкових величин виявляється близьким до нормального.

Завдання до контрольної роботи №1

Завдання 1. Розв’язати задачу.

1. Скільки різних чотиризначних чисел можна записати, вживаючи кожну з наступних цифр 2, 4, 5, 8, 9, 0 тільки один раз?
2. Скількома способами можна виставити на гру футбольну команду, що складається з 3 нападаючих, 3 півзахисників, 4 захисників і 1 воротаря, якщо всього в команді 6 нападаючих, 6 півзахисників, 8 захисників і 2 воротарі?
3. З цифр 0, 3, 5, 6 складені всі можливі чотиризначні числа так, що в кожнім числі немає однакових цифр. Скільки вийшло парних чисел?
4. У шаховому турнірі, де учасники зустрічаються між собою один раз, два шахісти вибули через хворобу, встигнувши зіграти тільки по три партії кожний. Скільки шахістів починали турнір, якщо всього було зіграно 84 партії?
5. Скількома способами можна групу з 20 студентів розділити на три підгрупи відповідно з 9, 7 і 4 чоловік?
6. Скільки можна скласти з простих дільників числа 3570 складених чисел, що містять тільки три простих дільники?
7. З десяти різних квіток потрібно скласти букет так, щоб у нього входило не менш ніж дві квітки. Скільки способів існує для складання такого букета?
8. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складені всі можливі п’ятизначні числа без повторення цифр. Скільки серед цих п’ятизначних чисел таких, які не починаються з 435?
9. Положення площини в просторі визначається трьома точками, що не лежать на одній прямій. Скільки різних площин можна провести через 10 точок, якщо ніякі 3 точки не лежать на одній прямій і ніякі 4 точки не лежать в одній площині?
10. У маршрутному таксі 8 пасажирів. Таксі робить 10 зупинок. Скількома способами всі пасажири можуть вийти з таксі, якщо на кожній зупинці виходить не більш ніж один пасажир?

Завдання 2. Розв’язати задачу.

1. У туристів було 10 консервних банок: 5 з м’ясом, 3 з овочами і 2 з фруктами. Припустимо, що під час дощу етикетки на банках відклеїлися, а всі банки однакові. Яка ймовірність того, що три банки, відкриті навмання, будуть відрізнятися вмістом?
2. На п’яти картках написані цифри від 1 до 5. Випадково вибирають три картки і розкладають їх у порядку появи в ряд зліва направо. Знайти ймовірність того, що з’явиться число, що не містить цифри 2.
3. Група спортсменів, що складається з 6 майстрів спорту та 8 першорозрядників, випадково розподіляється на дві команди. Яка ймовірність того, що в обох командах рівна кількість спортсменів, які мають однакову майстерність?
4. В урні знаходяться 3 чорних, 4 білих та 5 червоних кульок. Навмання виймаються одразу 2 кульки. Яка ймовірність, що вони одного кольору?
5. П’ятнадцять чоловік випадково розсідаються в ряд з 15 місць. Знайти ймовірність того, що дві певні особи сидітимуть поруч.
6. Дев’ять студентів домовилися їхати одним потягом, але не умовилися про вагон. Яка ймовірність того, що жоден з них не зустрінеться з іншим, якщо в складі потяга 10 вагонів.
7. В урні знаходяться 5 чорних, 6 білих та 7 червоних кульок. Навмання виймаються одразу 3 кульки. Яка ймовірність того, що усі вони різні?
8. Десять осіб шикуються в шеренгу випадковим чином. Знайти ймовірність того, що між Івановим і Петровим буде стояти рівно дві особи.
9. У одному конверті лежать картки з номерами від 1 до 10, а у другому – з номерами від 11 до 20. З кожного конверта навмання виймається одна картка. Яка ймовірність того, що сума чисел на цих двох картках не перевищує 15?
10. Кинуто дві гральні кісти. Знайти ймовірність того, що сума очок, які випали, дорівнює восьми, а їх різниця дорівнює чотирьом.

Завдання 3. Розв’язати задачу.

1. Маємо кошик з 9 тенісними м’ячами. Для гри беруть три м’ячі. Після гри кладуть їх знову в кошик. Яка ймовірність того, що у наступній грі використовуватимуться м’ячі, якими ще не грали, якщо м’ячі вибирають випадковим чином?
2. Під час стрільби з гвинтівки відносна частота попадань у ціль виявилася рівною 0,9. Знайти число попадань зі 150 пострілів.
3. Після бурі на дільниці між 10-м і 100-м кілометрами телефонної лінії обірвався провід. Знайти ймовірність того, що обрив стався між 35-м і 40-м кілометрами (припускається рівноможливим обрив у будь-якій точці лінії).
4. За статистичними даними ремонтної майстерні в середньому на 20 зупинок токарського верстата приходиться 10 – для зміни різця, 3 – через несправність привода, 2 – через несвоєчасну подачу заготовок. Інші відбуваються з інших причин. Знайти ймовірність зупинки верстата з інших причин.
5. Об’єднання складається з 3 підприємств. Ймовірність появи бракованої продукції на першому підприємстві 0,1, на другому 0,2, на останньому 0,15. Яка ймовірність того, що продукцію без браку випустить принаймні одне підприємство?
6. Знайти ймовірність спільної поразки цілі двома снарядами, якщо ймовірність поразки цілі першим снарядом дорівнює 0,8, а другим 0,7.
7. Студент повинен скласти залік і екзамен з вищої математики. Ймовірність того, що студент складе залік, дорівнює 0,8. Якщо залік складено, то студент допускається до екзамену, ймовірність складання якого для нього становить 0,9. Яка ймовірність того, що студент складе і залік, і екзамен?
8. В одній урні знаходиться 3 чорні, 1 біла та 4 червоні кулі. У другій – 2 чорні, 3 білі та 3 червоні. З кожної урни навмання витягають по одній кулі і після цього порівнюють їхні кольори. Знайти ймовірність того, що кольори двох витягнутих куль співпадуть.

9. Деталь послідовно і незалежно обробляється чотирма робітниками. Ймовірність браку для кожного складає 0,2. Яка ймовірність того, що деталь вийде якісною?
10. При одному циклі огляду радіолокаційної станції, що стежить за космічним об'єктом, об'єкт буде виявлено з ймовірністю p=0,3. Виявлення об'єкта у кожному циклі відбувається незалежно від інших. Проведено 5 циклів огляду. Яка ймовірність того, що об'єкт буде виявлено?

Завдання 4. Розв'язати задачу.

1. Десять астронавтів розглядаються як претенденти до наступного польоту. Серед них 2 жінки. Якщо команда складається з 3 членів, то яка ймовірність що у команді буде 1 жінка?
2. У колоді 36 карт. Чотири карти вибирають навмання без повернення їх назад. Яка ймовірність того, що рівно 2 з цих карт піки.
3. Об'єднання складається з 3 підприємств. Ймовірність появи бракованої продукції на першому підприємстві 0,1, на другому 0,2, на останньому 0,5. Яка ймовірність того, що продукцію без браку випустить тільки одне підприємство?
4. У колоді 52 карти. З цієї колоди вибирають карти без повернення їх назад. Визначити ймовірність того, що серед перших п'яти карт не буде жодного туза.
5. Три мисливці одночасно зробили по одному пострілу у ведмедя. Яка ймовірність того, що ведмедя було вбито 2 кулями, якщо ймовірність влучення для них дорівнює відповідно $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,6$?
6. Учасник телевізійної гри «Поле чудес» отримав можливість виграти деякі призи. Йому показують 10 коробок, у 6 з яких містяться призи. Учаснику дозволено вибрати будь-які 4 коробки. Яка ймовірність того, що він вибере рівно 3 коробки з призами.

7. Президент фірми хоче створити команду дизайнерів для розробки нової моделі товару у складі 3 інженерів та 2 спеціалістів з проблем дослідження ринку. Яка ймовірність того, що команда такого складу буде створена, якщо із групи, що складається з 10 інженерів і 5 спеціалістів вибрати навмання 5 осіб?
8. Зі 100 студентів англійську мову знають 68 студентів, німецьку – 30, французьку – 42. Навмання обрана особа. Яка ймовірність того, що вона знає тільки 1 з трьох мов?
9. У партії з 10 деталей 7 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед 6 взятих навмання деталей 4 стандартних.
10. Три мисливці одночасно зробили по одному пострілу у ведмедя. Яка ймовірність того, що ведмедя було вбито однією кулею, якщо ймовірність влучення для них дорівнює відповідно $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,8$?

Завдання 5. Розв’язати задачу.

1. При дослідженні жирності молока корів усе стадо було розбите на три групи. В першій групі виявилося 70%, у другій 23% і в третій 7% усіх корів. Ймовірність того, що молоко, отримане від окремої корови, має жирність не менш ніж 4%, для кожної групи корів відповідно дорівнює 0,6, 0,35 і 0,1. 1) Визначити ймовірність того, що жирність молока у навмання взятої корови становить не менш ніж 4%. 2) Жирність молока у навмання взятої корови становить не менш ніж 4%. Знайти ймовірність того, що ця корова з першої групи.
2. У цеху 20 верстатів. З них 10 марки А, 6 марки В і 4 марки С. Ймовірність того, що якість деталі виявиться найвищою, для цих верстатів відповідно становить 0,9, 0,8 і 0,7. 1) Знайти, який відсоток деталей вищої якості випускає цех у цілому? 2) Якість деталі, взятої навмання, виявилася найвищою. Яка ймовірність того, що вона зроблена на верстаті марки А?

3. Маємо три однакові на вигляд урни. В першій містяться 5 білих та 3 чорних кулі, у другій – 2 білих та 4 чорних, у третій – 1 біла та 3 чорних. З навмання вибраної урни виймають одну кулю. 1) Знайти ймовірність того, що ця куля біла. 2) Вийнята куля біла. Знайти ймовірність того, що вона вийнята з другої урни.

4. На заводі металевих виробів болти виготовляють на трьох машинах. Перша машина виробляє 25%, друга – 35% і третя – 40% усієї продукції, а брак становить відповідно 5%, 4% і 2%. 1) Яка ймовірність того, що навмання взятий болт виявиться бракованим? 2) Навмання взятий болт виявився бракованим. Яка ймовірність того, що він зроблений другою машиною?

5. В першій урні міститься 4 білих і 3 чорних кулі, а в другій – 4 білих і 4 чорних. З першої урни переклали в другу 2 кулі невідомого кольору. 1) Знайти ймовірність того, що вийнята після цього з другої урни куля буде білою. 2) Вийнята після цього з другої урни куля біла. Знайти ймовірність того, що з першої урни в другу переклали 1 білу та 1 чорну кулі.

6. Для посіву заготовлено насіння 4-х сортів пшениці. Причому 20% усього насіння 1-го сорту, 30% - 2-го сорту, 10% - 3-го сорту і 40% - 4-го сорту. Ймовірність того, що з зерна виросте колос, який містить не менш ніж 40 зерен, для першого сорту дорівнює 0,5, для другого - 0,3, для третього – 0,2, для четвертого – 0,1. 1) Знайти ймовірність того, що навмання взяте зерно дасть колос, який містить не менш ніж 40 зерен. 2) Навмання взяте зерно дасть колос, який містить не менш ніж 40 зерен. Знайти ймовірність того, що це зерно 2-го сорту.

7. У ящик, що містить 3 однакові деталі, кинута стандартна деталь, а потім навмання вийнята одна деталь. Усі можливі припущення про число стандартних деталей, що спочатку знаходилися в ящику, рівноймовірні. 1) Знайти ймовірність того, що вийнята деталь стандартна. 2) Вийнята деталь стандартна. Знайти ймовірність того, що спочатку в ящику було 2 стандартні деталі.

8. У першому ящику знаходяться 18 білих і 2 чорних кулі, у другому – 9 білих і 1 чорна. З другого ящика переклали в перший ящик кулю, колір якої невідомий. 1) Знайти ймовірність того, що куля, навмання взята після цього з першого ящика, буде білою. 2) Куля, навмання взята після цього з першого ящика, біла. Яка ймовірність того, що з другого ящика було перекладено в перший ящик чорну кулю?

9. Економіст-аналітик умовно підрозділяє ситуацію в деякій країні на "хорошу", "посередню" і "погану". На тиждень, що розглядається, він прогнозував її вид відповідно з ймовірностями 0,1, 0,7 і 0,2. Деякий індекс економічного стану зростає з ймовірністю 0,6, якщо ситуація "хороша", з ймовірністю 0,3, якщо ситуація "посередня", і з ймовірністю 0,1, якщо ситуація "погана". 1) Знайти ймовірність того, що на тижні, який розглядається, згаданий індекс економічного стану зросте. 2) На тижні, який розглядається, індекс економічного стану зріс. Яка ймовірність того, що економіка країни була "на підйомі"?

10. Два стрільці незалежно один від одного стріляють по мішені, роблячи кожен по одному пострілу. Ймовірність попадання в мішень першого стрільця 0,8, другого – 0,65. 1) Яка ймовірність того, що в мішені буде одна пробоїна? 2) Після стрільби в мішені виявлена одна пробоїна. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив перший стрілець.

Завдання 6. Розв'язати задачу.

1. Було встановлено, що 25% сімей міста мають кабельне телебачення. Яка ймовірність, що: а) з 6 сімей 3 мають кабельне телебачення? б) більшість з 6 сімей мають кабельне телебачення?

2. Банк видає кредитні картки VISA. Було встановлено, що 30% усіх рахунків повністю оплачуються за їх допомогою. З попереднього року вибрали навмання 7 рахунків. Яка ймовірність того, що 5 з них оплачені за допомогою карток VISA?

3. Виробник детекторів брехні вимагає, щоб вони могли розрізняти правильні відповіді від неправильних з надійністю 85%. Детектори тестують, використовуючи 50 запитань. Визначте найбільш імовірне число правильно визначених відповідей. Яка ймовірність того, що від 4 до 8 з 10 відповідей розрізняти правильно?
4. Бізнесмен, вивчивши попит ринку на нові автомобілі, вирішив продати пробну партію з дев'яти таких автомашин. Ймовірність отримати високий прибуток за рахунок кожної машини оцінена в 0,8. Яка ймовірність отримати високий прибуток за рахунок продажу: а) двох автомашин? б) не більш, ніж двох автомашин? в) від трьох до п'яти автомашин?
5. Митниця дає офіційну оцінку того, що 25% усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларує весь товар, на який накладається податок. Якщо випадково відібрати 7 осіб, які повертаються з-за кордону, то яка ймовірність того, що не менш, ніж три з них не задекларують весь товар?
6. При одному циклі огляду радіолокаційної станції, що стежить за космічним об'єктом, об'єкт буде виявлено з імовірністю p=0,8. Виявлення об'єкта у кожному циклі відбувається незалежно від інших. Проведено 5 циклів огляду. Яка ймовірність того, що об'єкт буде виявлено понад 3 рази? Записати закон розподілу ймовірностей числа не виявлень об'єкта.
7. Фірма, що проводить поштове опитування, встановила, що 40% одержувачів анкет повертає їх назад. Яка ймовірність того, що більше 5-ти сімей повернуть анкети, якщо опитують 8 сімей?
8. Підприємство має 5 постачальників. Ймовірність виконання договору для кожного з них дорівнює 0,7. Визначити ймовірність того, що менш ніж 40% постачальників виконають договір.
9. Проведено 5 пострілів по цілі. Ймовірність влучення при одному пострілі 0,7. Знайти найімовірніше число влучень і відповідну ймовірність. Обчислити ймовірність того, що влучень буде більше, ніж промахів. Знайти функцію розподілу числа влучень.

10. За даними керівництва застави 75% машин, які прибувають на прикордонну заставу, – легкові автомобілі. Якщо до в'їзду прибуло 9 машин, то яка ймовірність того, що: а) 7 з них будуть легкові? б) від 5 до 7 легкових?

Завдання 7. Розв'язати задачу.

1. Ймовірність своєчасної реалізації одиниці продукції дорівнює 0,8. Визначити ймовірність своєчасної реалізації не менше, ніж 312 одиниць продукції із 400, що поступили на реалізацію.
2. Прядильниця обслуговує 1200 веретен. Ймовірність обривання нитки на веретені за 1хвилину дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за хвилину нитка обірветься на 5 веретенах.
3. Каналом зв'язку передається 2000 знаків. Кожен знак може бути перекручений незалежно від решти з ймовірністю 0,0025. Знайти приблизне значення ймовірності того, що буде перекручено: 1) не більш, ніж три знаки; 2) принаймні один знак.
4. Ймовірність браку при виробництві деталей складає 10%. Яка буде найімовірніша кількість бракованих серед 800 виготовлених деталей? Яка ймовірність того, що бракованих деталей буде: а) від 200 до 300? б) рівно 250?
5. Ймовірність несплати податку для кожного з 400 підприємців дорівнює 0,15. Яка ймовірність того, що: а) податки не сплатять 40 підприємців? б) податки не сплатять не більш ніж 40 підприємців?
6. Ймовірність випуску бракованого виробу дорівнює 0,025. Знайти ймовірність того, що число бракованих виробів буде менше трьох, якщо всього виготовлено 200 виробів.
7. За допомогою статистичних даних підраховано, що ймовірність захворіти грипом під час епідемії для кожної особи дорівнює 0,15. Яка ймовірність того, що зі 200 перевірених осіб хворими виявляться: 1) рівно 25 осіб; 2) від 25 до 60 осіб?

8. Проведено 75 пострілів по цілі. Ймовірність влучення при одному пострілі 0,7. Обчислити ймовірність того, що: а) буде 50 влучень б) буде більш 50 влучень.
9. Ймовірність несплати податку для кожного із 400 підприємців дорівнює 0,05. Знайти математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення випадкової величини X – числа підприємців, що не сплатять податки.
10. Середнє число замовлень таксі протягом 1 хвилини дорівнює трьом. Знайти ймовірність того, що протягом двох хвилин надійде чотири замовлення.

Завдання 8. Розв’язати задачу.

1.

x_i	9	x_2	11	13	18
p_i	0,07	0,32	0,1	p_4	0,15

Знайти p_4, x_2, $D(X)$, якщо $M(X)=12{,}31$.

2.

x_i	x_1	3	4	5	7
p_i	0,2	0,15	p_3	0,3	0,25

Знайти p_3 та ціле x_1, якщо $D(X) = 4{,}41$. Обчислити $M(X)$.

3.

x_i	6	9	10	x_4	13
p_i	0,16	0,2	p_3	0,1	0,37

Знайти x_4, p_3, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо $M(X) = 10{,}47$.

4.

x_i	x_1	5	6	9	10
p_i	0,1	0,2	p_3	0,3	0,25

Знайти p_3 та ціле x_1, якщо $D(X) = 6{,}81$. Обчислити $M(X)$.

5.

x_i	2	3	x_3	6	7
p_i	0,15	0,2	0,3	p_4	0,2

Знайти p_4 та ціле x_3, якщо $D(X) = 3{,}01$. Обчислити $M(X)$.

6.

x_i	14	15	20	21	x_5
p_i	0,24	p_2	0,32	0,15	0,1

Знайти x_5, p_2, $D(X)$, якщо $M(X) = 18{,}26$.

7.

x_i	x_1	15	17	18	21
p_i	0,24	0,16	p_3	0,14	0,28

Знайти x_1, p_3, $D(X)$, якщо $M(X) = 16{,}26$.

8.

x_i	1	3	4	x_4	7
p_i	0,15	0,2	0,1	p_4	0,25

Знайти p_4 та ціле x_4, якщо $D(X) = 4{,}51$. Обчислити $M(X)$.

9.

x_i	18	x_2	21	24	25
p_i	0,39	0,1	0,12	p_4	0,24

Знайти p_4, x_2, $D(X)$, якщо $M(X) = 21{,}36$.

10.

x_i	1	2	3	4	x_5
p_i	0,15	0,35	0,05	p_4	0,2

Знайти p_4 та ціле x_5, якщо $D(X) = 4{,}71$. Обчислити $M(X)$.

Завдання 9. У задачах 1-10 надана функція розподілу або щільність ймовірності неперервної випадкової величини. Потрібно знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

1. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{1}{8}(x-1)^3, & 1 < x \le 3. \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ a(x-3)^2, & 3 < x \le 5. \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

3. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{(x+1)^3}, & x \ge 0. \end{cases}$$

4. $$f(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ \dfrac{a}{(x-1)^2+9}, & 1\le x\le 4. \\ 0, & x>4. \end{cases}$$

5. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{x^3+x}{10}, & 0\le x\le 2. \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

6. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{1}{8}\left(x^2-1\right), & 1<x\le 3. \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

7. $$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{a}{3}x, & 0\le x<3, \\ a(4-x), & 3\le x\le 4, \\ 0, & x>4. \end{cases}$$

8. $$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-2, \\ \dfrac{a}{4+x^2}, & -2<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

9. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2, \\ \dfrac{(x-2)^2}{16}, & 2<x\le 6, \\ 1, & x>6. \end{cases}$$

10. $$f(x)=\begin{cases} \mathbf{0}, & x<3, \\ \dfrac{a}{(x-1)^4}, & x\ge 3. \end{cases}$$

Завдання 10. Розв'язати задачу.

1. При випробуванні легованої сталі на вміст вуглецю ймовірність того, що у випадково взятій пробі відсоток вуглецю перевищить допустимий рівень, дорівнює 0,01. Вважаючи застосовним закон рідкісних явищ, обчислити, скільки в середньому необхідно випробувати зразків, щоб з ймовірністю 0,95 зазначений ефект спостерігався принаймні 1 раз.
2. У групі з 10 спортсменів 6 майстрів спорту. Випадковим чином відбирають 3-х спортсменів. Скласти закон розподілу і знайти математичне сподівання випадкової величини X – числа майстрів спорту з відібраних спортсменів.
3. Деяка система в стаціонарному режимі роботи дає в середньому 15 збоїв за 1000 годин. Знайти ймовірність безвідмовної роботи системи протягом 10 годин.
4. Стрілянина ведеться з постійної позиції в заданому напрямку. Середня дальність польоту снаряда дорівнює 120 км. Вважаючи, що дальність польоту снаряда є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім квадратичним відхиленням 3 км, знайти відсоток пострілів, що дають переліт від 6 до 9 км.
5. Фірма, що займається продажем товарів по каталогу, щомісячно отримує поштою замовлення. Число цих замовлень є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім квадратичним відхиленням 560. У 90% випадків число щомісячних замовлень перевищує 12 439. Знайти середнє число замовлень, що фірма отримує за місяць.

6. Ймовірність безвідмовної роботи кожного з чотирьох пристроїв протягом певного проміжку часу дорівнює 0,9. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа безвідмовно працюючих пристроїв. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

7. Середній час безвідмовної роботи пристрою складає 750 годин. Яка ймовірність того, що пристрій неперервно пропрацює не менш, ніж 1000 годин?

8. Ймовірність помилки автоматизованої системи ідентифікації особи по відбитках пальців складає 0,002. Перевірено 1000 чоловік. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – числа збоїв системи. Знайти $M(X)$, $D(X)$ і визначити ймовірність того, що величина X прийме значення в межах від 2 до 4.

9. Дальність до цілі округляється до 10 м. Визначити середню квадратичну помилку округлення і ймовірність отримання помилки не більш, ніж 5 м.

10. Хвилинна стрілка електронного годинника переміщається стрибком в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, який відрізняється від істинного не більш, ніж на 20 секунд.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

Тема 1. **Математична статистика**

Література: [5] гл. 15, § 1, 3,4,5,6,7, 8, гл. 16, § 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, гл. 19, § 1; [4] гл. 9, гл.10, гл. 13, § 1; [8] гл. 5, § 17, 18; [1] розділ 6, п. 6.1-6.8, стор. 106-114, 153-159; [8] гл. 6, § 15 п. 15.1-15.4.

Вивчивши цей розділ, студент повинен знати поняття вибірки, статистичного розподілу, означення незміщеної, ефективної і спроможної оцінок параметрів розподілу, поняття довірчого інтервалу та статистичної перевірки гіпотез. Він повинен вміти побудувати статистичний розподіл, полігон частот (відносних частот), емпіричну функцію розподілу ***F*(x),*** знайти оцінки для математичного сподівання (вибіркову середню), визначити незміщену та зміщену оцінку дисперсії, знайти границі довірчого інтервалу для математичного сподівання та дисперсії при довірчій ймовірності (надійності) γ**,** побудувати інтервальний статистичний розподіл вибірки, збудувати гістограму відносних частот.

Студент повинен вміти застосовувати на практиці ці знання для знаходження оцінки статистичних характеристик та параметрів генеральної сукупності, яка розподілена нормально (або має статистичний розподіл, близький до показникового розподілу, біноміального розподілу або розподілу Пуассона) за даними досліджень.

Оцінки, що визначаються одним числом, звуться точковими. Наприклад, вибіркова (статистична) середня (математичне сподівання), вибіркова (статистична) дисперсія – точкові оцінки. У випадку малого числа спроб ці оцінки можуть привести до суттєвих помилок. У такому разі застосовуються інтервальні оцінки, що визначаються двома числами – границями інтервалу (що містить величину, яка оцінюється з заданою ймовірністю). Таким чином, задача зводиться до визначення такого інтервалу (його називають надійним або довірчим інтервалом), який з заданою ймовірністю (її називають надійністю) охоплює параметр, що оцінюється. Найчастіше надійність приймають рівною γ **=0,95** або γ **=0,99.**

Розв’язання задач ***математичної статистики*** потребує великого об'єму обробки даних та обчислень. Відзначимо що потужним інструментарієм статистичної обробки даних володіють електронні таблиці **Microsoft Excel.** Дуже корисним і простим є використання й інших програм, наприклад: **NUMERI, MATLAB, Mathcad, STATISTIKA, STATGRAFHICS.**

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Задано генеральну сукупність, яка розподілена за нормальним законом. Вибірка, що зроблена випадковим способом, задається наведеними даними 0,4; 0,4; 1,0; 0,3; 0,6; 0,9; 0,5; 0,4; 0,8; 0,6; 0,5; 0,5; 0,4; 0,8; 0,3; 0,3; 0,6; 0,7; 0,7; 0,3; 0,2; 0,1; 0,4; 0,5; 0,7; 0,2; 0,6; 0,5; 0,4; 0,9.

1) Збудувати статистичний розподіл вибірки:

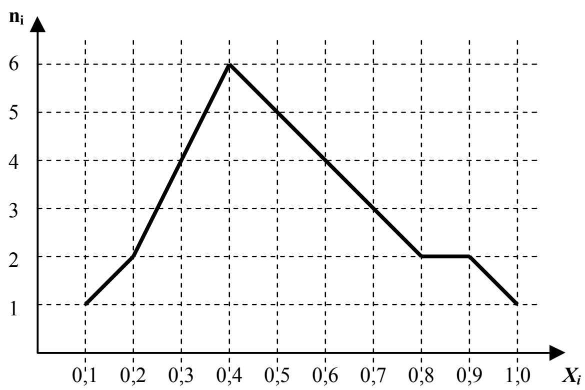
$$\boldsymbol{n = 30\ ;\ x_{max} = 1{,}0;\quad x_{min} = 0{,}1\ ;\ \Delta = 1{,}0 - 0{,}1 = 0{,}9.}$$

Заповнюємо стовпці ***A, N*** від меншого до більшого значення та в стовпці ***B*** робимо відмітку **(I)** в відповідному рядку про те, що дане значення варіанти нам зустрічалося. У стовпці ***C*** підводимо підсумки про кількість відміток в даному рядку, тобто вказуємо частоти цих варіант. Стовпці таблиці ***A*** і ***C*** створюють шуканий статистичний розподіл.

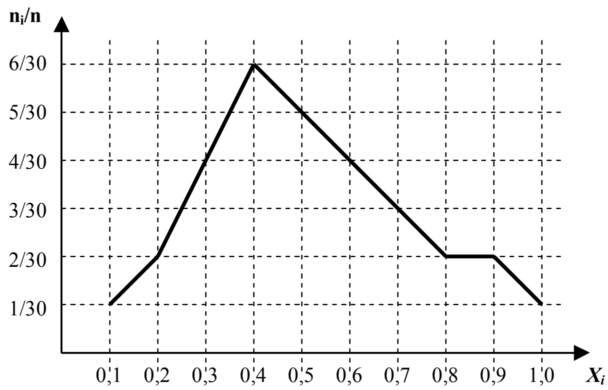
N	A	B	C	D	E	F	G
№ п/п	x_i	n_i	n_i	$n_i x_i$	$(x_i-\overline{x})$	$(x_i-\overline{x})^2$	$n_i(x_i-\overline{x})^2$
1	0.1	I	1	0.1	-0.4	0.16	0.16
2	0.2	I I	2	0.4	-0,3	0,09	0,18
3	0.3	I I I I	4	1.2	-0,2	0,04	0,16
4	0.4	I I I I I I	6	2.4	-0,1	0,01	0,06
5	0.5	I I I I I	5	2.5	0	0	0
6	0.6	I I I I	4	2.4	0,1	0,01	0,04
7	0.7	I I I	3	2.1	0,2	0,04	0,12
8	0.8	I I	2	1.6	0,3	0,09	0,18

N	A	B	C	D	E	F	G
9	0.9	I I	2	1.8	0,4	0,16	0,32
10	1.0	I	1	1.0	0,5	0,25	0,25
$\sum$	----	-------------	30	15.4	-------	---------	1,31

2) Для побудови полігону частот (відносних частот) на осі абсцис відкладають варіанти x_i, на осі ординат – відповідні їм частоти n_i (відносні частоти $W_i = n_i / n$). Точки (x_i, n_i) ($(x_i, n_i / n)$ – для відносних частот) сполучають відрізками прямих і одержують полігон частот (відносних частот).



Полігон частот



Полігон відносних частот

3) Побудувати емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$.

Найменше спостережне значення варіанти дорівнює **0,1**, отже $F^*(x)=0$ при $x<0,1$.

Значення $x<0,2$, а значить $x_1=0,1$ спостерігалося 1 раз, отже, $F^*(x)=1/30$, якщо $0,1 \le x<0,2$.

Значення $x<0.3$ спостерігалося **1+2=3** рази. Отже $F^*(x)=3/30$, якщо $0,2 \le x<0,3$.

Значення $x<0,4$ спостерігалося **3+4=7** разів. Отже $F^*(x)=7/30$, якщо $0,3 \le x<0,4$.

Значення $x<0,5$ спостерігалося **7+6=13** разів. Отже $F^*(x)=13/30$, якщо $0,4 \le x<0,5$.

Значення $x<0,6$ спостерігалося **13+5=18** разів. Отже $F^*(x)=18/30$, якщо $0,5 \le x<0,6$.

Значення $x<0,7$ спостерігалося **18+4=22** разів. Отже $F^*(x)=22/30$, якщо $0,6\le x<0,7$.

Значення $x<0,8$ спостерігалося **22+3=25** разів. Отже $F^*(x)=25/30$, якщо $0,7\le x<0,8$.

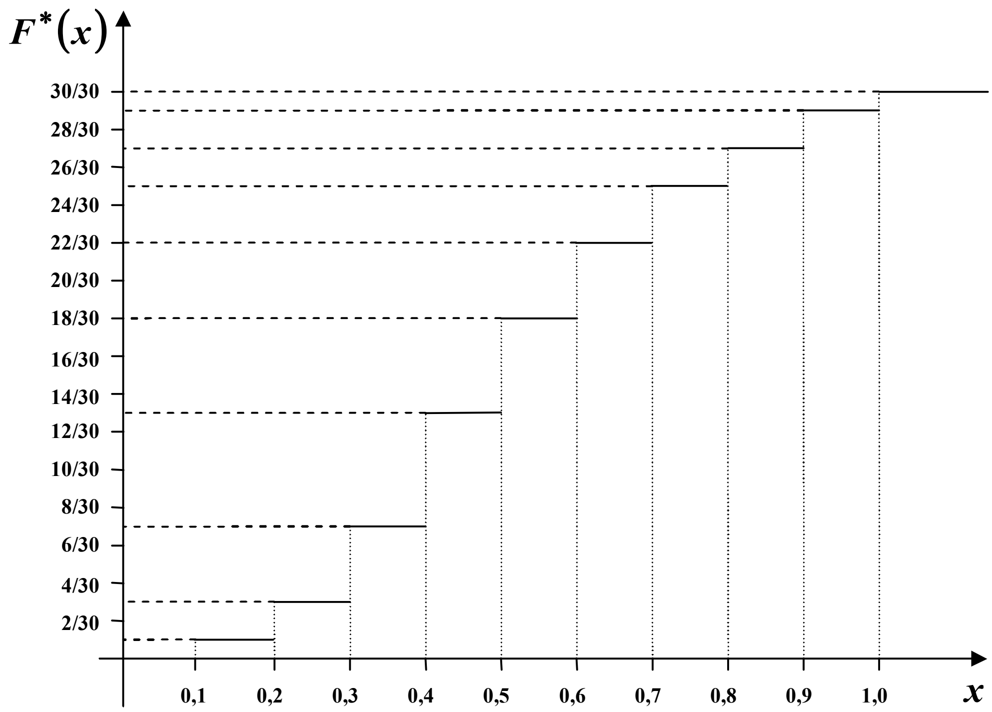
Значення $x<0,9$ спостерігалося **25+2=27** разів. Отже $F^*(x)=27/30$, якщо $0,8\le x<0,9$.

Значення $x<1,0$ спостерігалося **27+2=29** разів. Отже $F^*(x)=29/30$, якщо $0,9\le x<1,0$.

Найбільше значення, що спостерігалося, $x=1,0$. Отже $F^*(x\ge 1,0)=1$.

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & якщо \quad x<0,1 \\ 1/30, & якщо \quad 0,1\le x<0,2 \\ 3/30, & якщо \quad 0,2\le x<0,3 \\ 7/30, & якщо \quad 0,3\le x<0,4 \\ 13/30, & якщо \quad 0,4\le x<0,5 \\ 18/30, & якщо \quad 0,5\le x<0,6 \\ 22/30, & якщо \quad 0,6\le x<0,7 \\ 25/30, & якщо \quad 0,7\le x<0,8 \\ 27/30, & якщо \quad 0,8\le x<0,9 \\ 29/30, & якщо \quad 0,9\le x<1,0 \\ 1, & якщо \quad x\ge 1,0 \end{cases}$$

4) Графік емпіричної функції розподілу $F^*(x)$



5) Знайти оцінку для математичного сподівання (вибіркову середню).

Множимо відповідні значення x_i й n_i (стовпці ***A*** й ***C***), результати заносимо у стовпець ***D,*** після чого обчислюємо його суму і ділимо її на n:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} n_i \cdot x_i}{n} = \frac{15{,}4}{30} = 0{,}51(3) \approx 0{,}5.$$

6) Визначити незміщену оцінку дисперсії.

Від кожного зі значень стовпця ***A*** віднімаємо знайдене значення вибіркового середнього (оцінку математичного сподівання) $\bar{x}$, а потім цю різницю записуємо в стовпець ***E.*** Квадрат цієї різниці запишемо в стовпець ***F***. Після множення стовпця ***E*** на стовпець ***C*** заповнюємо стовпець ***G*** та знаходимо суму стовпця ***G.***

$$x_1 - \bar{x} = 0{,}1 - 0{,}5 = -0{,}4; \quad (x_1 - \bar{x})^2 = 0{,}16; \quad n_1 \times (x_1 - \bar{x})^2 = 1 \times 0{,}16 = 0{,}16.$$

Для скорочення обчислень на калькуляторі можна не заповнювати стовпці ***E*** та ***F***, а одразу отримати результат для стовпця ***G*,** натискаючи клавіші калькулятора за схемою: $(x_i - \overline{x}) = \otimes = \otimes\ n_i =$.

$$\overline{D_x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{1,31}{30-1} = 0,045.$$

7) Знайти зміщену оцінку дисперсії.

$$\overline{D_x}^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{1,31}{30} = 0,044;$$

8) Визначити границі довірчого інтервалу для математичного сподівання при довірчій ймовірності (надійності) $\gamma = 0,95$.

$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D_x}} = \sqrt{0,045} = 0,212$; $\overline{x} = 0,5$; $\sqrt{n} = \sqrt{30} = 5,48$; $\kappa = 30 - 1 = 29$;
$\alpha = 1 - \gamma = 0,05$;

Число $t_\gamma = 2,05$ знаходимо за таблицями розподілу Стюдента (дивись додатки) за заданою надійністю γ $(\alpha = 1 - \gamma)$ і числом ступенів свободи $k = n - 1$.

Підставляємо обчислені та знайдені за таблицею значення в формулу

$$\overline{x} - t_\gamma \cdot \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}} < a = m_x < \overline{x} + t_\gamma \cdot \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}};\ 0,5 - 2,05 \times \frac{0,212}{5,48} < a = m_x < 0,5 + \\ +2,05 \times \frac{0,212}{5,48}.$$

Тоді довірчий інтервал $0,42 < a = m_x < 0,58$.

9) Визначити границі довірчого інтервалу для дисперсії при довірчій ймовірності (надійності) $\gamma = 0,95$.

Для нормального розподілу справедлива формула для границь довірчого інтервалу для дисперсії при довірчій ймовірності (надійності) γ **:**

$\frac{n\cdot \overline{D_x}}{\chi_2^2} < D_x < \frac{n\cdot \overline{D_x}}{\chi_1^2}$, де χ_1^2 – значення випадкової величини, що має розподіл χ^2 з числом ступенів свободи $f_1 = n - 1 = 29$ при рівні значущості $\alpha_1 = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$, де $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}05$; χ_2^2 – значення випадкової величини, що має розподіл χ^2 з числом ступенів свободи $f_2 = n - 1 = 29$ при рівні значущості $\alpha_2 = \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$.

За таблицею розподілу «хі-квадрат» маємо: $\chi_1^2 = 16{,}0$; $\chi_2^2 = 45{,}7$.
Підставляємо обчислені та знайдені за таблицею значення в формулу

$$\frac{30\cdot 0{,}045}{45{,}7} < D_x < \frac{30\cdot 0{,}045}{16{,}0}.$$

Таким чином довірчий інтервал $0{,}030 < D_x < 0{,}085$.

10) Розбивши інтервал на 5 рівних підінтервалів, побудувати інтервальний статистичний розподіл вибірки

$$n = 30;\ x_{max} = 1{,}0;\ x_{min} = 0{,}1;\ \Delta = 1{,}0 - 0{,}1 = 0{,}9.$$

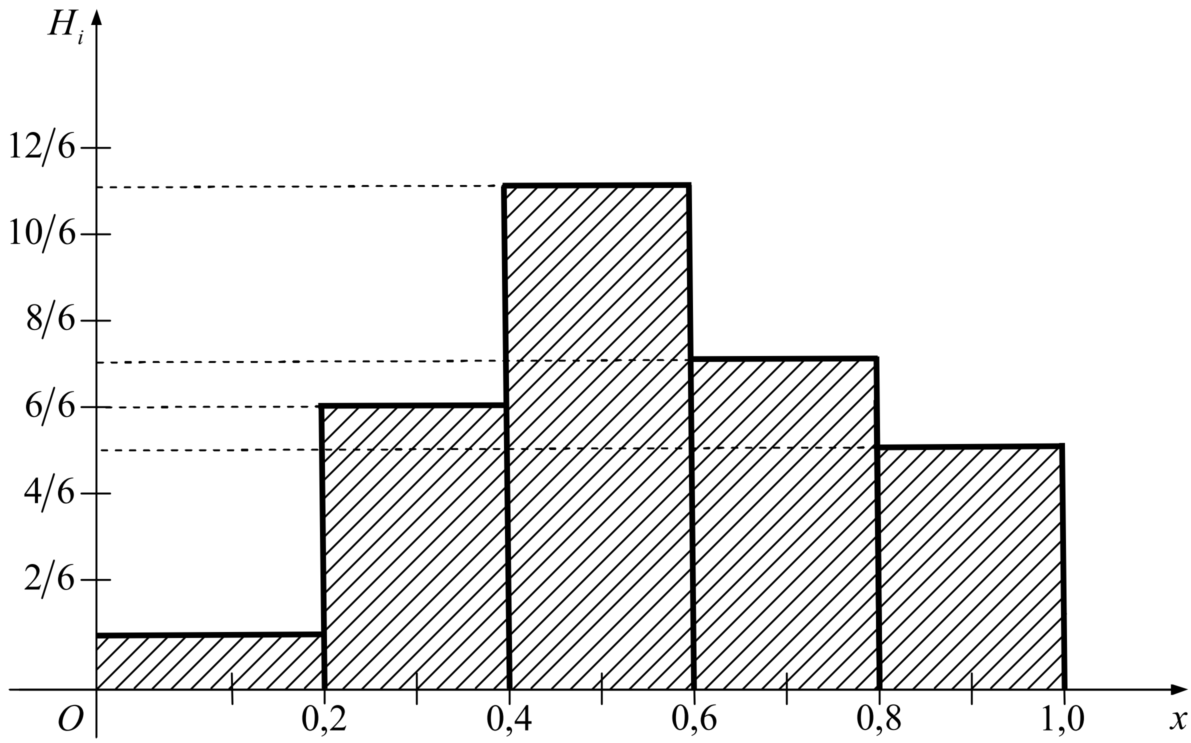
Спочатку запишемо інтервальний ряд з кроком Δx:

$$\Delta x = \Delta/5 = 0{,}18 \approx 0{,}2; \quad \overline{x}_0 = x_1 - \Delta x/2 = 0{,}1 - 0{,}1 = 0.$$

	[0; 0,2)	[0,2; 0,4)	[0,4; 0,6)	[0,6;0,8)	[0,8;1,0]
n_i	1	6	11	7	5
$w_i = n_i/n$	1/30	6/30	11/30	7/30	5/30
$\overline{x}_i$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9

11) Побудувати гістограму відносних частот.

Для побудови гістограми відносних частот на осі абсцис відкладають часткові інтервали, а над ними проводять відрізки, паралельні осі абсцис, на відстані $H_i = n_i / (n \cdot \Delta x)$, де $n \cdot \Delta x = 30 \cdot 0{,}2 = 6$. Площа i-го часткового прямокутника дорівнює W_i – відносній частоті варіант, що попали в i-й інтервал.



Для наведених нижче вибірок (приклади 2-4) знайти оцінки статистичних характеристик та параметрів розподілу.

Приклад 2. Дано статистичний розподіл, близький до розподілу Пуассона:

X	0	1	2	3
n_i	116	56	22	6

Знайти оцінки параметра λ.

Розв'язання.

$$n = 116+56+22+6 = 200;$$

$$\overline{\lambda} = \overline{x} = \frac{\sum_{i=0}^{3} n_i \cdot x_i}{n} = \frac{116 \cdot 0 + 56 \cdot 56 + 22 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{200} = 0{,}6.$$

Приклад 3. Дано статистичний розподіл, близький до показникового:

X	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)	[4;5)	[5;6]
n_i	259	167	109	74	70	47
$\overline{x_i}$	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5

Знайти оцінки параметра λ.

Розв'язання.

$$n = 259+167+109+74+70+47=726;$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=0}^{6} n_i \cdot \overline{x_i}}{n} = \frac{259 \cdot 0{,}5 + 167 \cdot 1{,}5 + 109 \cdot 2{,}5 + 74 \cdot 3{,}5 + 70 \cdot 4{,}5 + 47 \cdot 5{,}5}{726} =$$

$$= \frac{129{,}5 + 250{,}5 + 272{,}5 + 259 + 258{,}5}{726} = \frac{1170}{726} = 1{,}61.$$

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}} = \frac{1}{1{,}61} = 0{,}62.$$

Приклад 4. Дано статистичний розподіл, близький до біноміального:

X	0	1	2	3	4	5
n_i	72	77	34	14	2	1

знайти оцінки параметра p^*.

Розв'язання.

$$m = 5;\ n = 72+77+34+14+2+1 = 200;$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=0}^{5} n_i \cdot x_i}{n} = \frac{72 \cdot 0 + 77 \cdot 1 + 34 \cdot 2 + 14 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{200} = \frac{200}{200} = 1.$$

$$p^* = \frac{\bar{x}}{m} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Тема 2. Системи випадкових величин

Література: [5] гл. 14, гл. 18, § 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; [4] гл.8, гл.12, § 1; [1] розділ 4, п. 4.7-4.10, розділ 6, п. 6.14-6.18; [14] гл. 1.

При вивченні матеріалу цього розділу та розв'язанні відповідних задач контрольної роботи студент повинен користуватися рекомендованою літературою та формулами, що наведені у п. 2.8 довідкового матеріалу.

Вивчивши цей розділ, студент повинен знати поняття: закон розподілу, числові характеристики, коефіцієнт кореляції, лінійна регресія, метод Стьюдента перевірки гіпотез.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Дано кореляційну таблицю:

X \ Y	4	9	14	19	24	29
130	3	3	-	-	-	-
140	-	5	4	-	-	-
150	-	-	40	2	8	-
160	-	-	5	10	6	-
170	-	-	-	4	7	3

Знайти: 1) умовний закон розподілу $\boldsymbol{X}$ при умові $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}_3$; 2) умовне математичне сподівання при $\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{X}_{y=y_3}\right)$; 3) математичні сподівання $\boldsymbol{m}_x$ і $\boldsymbol{m}_y$; 4) дисперсії $\boldsymbol{\sigma_x}^2$ і $\boldsymbol{\sigma_y}^2$; 5) коефіцієнт кореляції $\boldsymbol{r_{xy}}$; 6) рівняння регресії $\boldsymbol{Y}$ на $\boldsymbol{X}$ та рівняння регресії $\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{Y}$.

Розв'язання. 1. Знайдемо суми частот n_x по рядках і n_y по стовпцях.

$X \backslash Y$	4	9	14	19	24	29	n_x
130	3	3	-	-	-	-	6
140	-	5	4	-	-	-	9
150	-	-	40	2	8	-	50
160	-	-	5	10	6	-	21
170	-	-	-	4	7	3	14
n_y	3	8	49	16	21	3	100

Виділяємо відповідний стовпець (рядок) і заповнюємо таблицю – закон розподілу дискретної випадкової величини X при умові $Y = Y_3$.

X_{y_3}	130	140	150	160	170
$W_i = \frac{n_{i_3}}{n_{y_3}}$	0	$\frac{4}{49}$	$\frac{40}{49}$	$\frac{5}{49}$	0

2. Обчислюємо умовне математичне сподівання при $M(X_{y=y_3})$:

$$M\left(X_{y=y_3}\right) = \sum_{i=1}^{n} X_{iy_3} W_i\,, \qquad W_i = \frac{n_{i_3}}{n_{y_3}};$$

$$M\left(X_{y=y_3}\right) = 130 \cdot 0 + 140 \cdot \frac{4}{49} + 150 \cdot \frac{40}{49} + 160 \cdot \frac{5}{49} + 170 \cdot 0 = 150{,}2\,.$$

3. Обчислюємо математичні сподівання m_x і m_y:

$$M\left(X\right) = m_x = \sum_{i=1}^{5} X_i n_{x_i} \frac{1}{n} =$$

$$= 130 \cdot \frac{6}{100} + 140 \cdot \frac{9}{100} + 150 \cdot \frac{50}{100} + 160 \cdot \frac{21}{100} + 170 \cdot \frac{14}{100} = 152{,}8\,.$$

$$M\left(Y\right) = m_y = \sum_{i=1}^{6} Y_i n_{y_i} \frac{1}{n} =$$

$$= 4 \cdot \frac{3}{100} + 9 \cdot \frac{8}{100} + 14 \cdot \frac{49}{100} + 19 \cdot \frac{16}{100} + 24 \cdot \frac{21}{100} + 29 \cdot \frac{3}{100} = 16{,}65\,.$$

4. Обчислюємо дисперсії:

$$D(X)=D_x=\sigma_x^2=\sum_{i=1}^{5}X_i^2 n_{x_i}\frac{1}{n}-(m_x)^2=$$

$$=130^2\cdot\frac{6}{100}+140^2\cdot\frac{9}{100}+150^2\cdot\frac{50}{100}+160^2\cdot\frac{21}{100}+$$

$$+170^2\cdot\frac{14}{100}-152{,}8^2=102{,}16.$$

$$D(Y)=D_y=\sigma_y^2=\sum_{i=1}^{5}Y_i^2 n_{y_i}\frac{1}{n}-(m_y)^2=$$

$$=4^2\cdot\frac{3}{100}+9^2\cdot\frac{8}{100}+14^2\cdot\frac{49}{100}+19^2\cdot\frac{16}{100}+$$

$$+24^2\cdot\frac{21}{100}+29^2\cdot\frac{3}{100}-16{,}65^2=29{,}7275.$$

5. Щоб обчислити коефіцієнт кореляції r_{xy}, спочатку знайдемо момент кореляції

$$K_{xy}=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6}\frac{X_i Y_j n_{ij}}{n}-m_x m_y=$$

$$=(130\cdot(4\cdot 3+9\cdot 3)+140\cdot(9\cdot 5+14\cdot 4)+150\cdot(14\cdot 40+19\cdot 2+24\cdot 8)+$$

$$+160\cdot(5\cdot 14+19\cdot 10+24\cdot 6)+170\cdot(19\cdot 4+24\cdot 7+29\cdot 3))\cdot\frac{1}{100}-$$

$$-16{,}65\cdot 152{,}8=42{,}08.$$

Тоді обчислюємо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy}=\frac{k_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2}\sqrt{\sigma_y^2}}=\frac{42{,}08}{\sqrt{29{,}7275}\sqrt{102{,}16}}=0{,}764.$$

6. Рівняння регресії Y на X:

$$\overline{Y_x}-m_y=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x),\ \overline{Y_x}-16{,}65=0{,}764\frac{5{,}45}{10{,}11}(x-152{,}8),$$

$$\overline{Y}_x=0{,}412\ \mathrm{x}-46{,}281,$$

та рівняння регресії X на Y:

$$\overline{X_y}-m_x=r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y),\ \overline{X}_y=1{,}417\,y+129{,}203.$$

Перевіримо гіпотезу про значущість коефіцієнта регресії по будь-якій з двох ознак:

а) повинна виконуватися нерівність

$$\left|r_{xy}\right|\sqrt{n-1} \geq 3, \quad 0{,}764\sqrt{99} = 7{,}6 > 3.$$

Лінійна регресія описує нашу залежність.

б) повинна виконуватися ознака Стьюдента

$$|t| \geq t_{\alpha,k}, \quad t = r_{xy} \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}},$$

де значення $t_{\alpha,k}$ знаходять з таблиці розподілу Стьюдента (число ступенів свободи $k = n-2$, рівень значущості $\alpha = 1-\gamma$, γ – довірча ймовірність).

У нашому випадку t **= 11,72**. При заданій довірчій ймовірності γ **=0,95**, k**=98**, $t_{0,05;98}$**=1,99**, виходить, що нерівність виконана, тому що t**=11,72 > 1,99**. Лінійна регресія описує нашу залежність.

Приклад 2. Задано диференціальну функцію системи двох випадкових величин $f(x, y) = a\sin(x+y)$ у квадраті D: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Поза квадратом $f(x, y) = 0$. Знайти: 1) коефіцієнт a; 2) математичні сподівання m_x і m_y; 3) дисперсії σ_X^2, σ_Y^2 і середні квадратичні відхилення σ_X, σ_Y; 4) коефіцієнт кореляції r_{xy}; 5) ймовірність влучення точки **(*X*, *Y*)** у квадрат Q, обмежений прямими $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{4}$; 6) інтегральну функцію системи $F(x, y)$.

Розв'язання. 1. Коефіцієнт a знайдемо з рівняння

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dxdy = 1.$$

Звідси

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dxdy = -a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)dx =$$

$$= -a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin x + \cos x\right)dx = a\left(-\cos x + \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a.$$

Отже $a = 0,5$.

2. $$m_x = 0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\left(x+y\right)dxdy = 0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(x+y\right)dy =$$

$$= -0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\cos\left(x+y\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)dx = -0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \cos x\right)x\,dx =$$

$$= 0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x + \cos x\right)x\,dx = 0,5x\left(\sin x - \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x - \cos x\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} + 0,5\left(\cos x + \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Оскільки функція $f\left(x,y\right)$ симетрична за аргументами x та y, то і $m_y = \frac{\pi}{4}$.

3. $$\sigma_X^2 = M\left(X^2\right) - \left[M\left(X\right)\right]^2 = 0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin\left(x+y\right)dxdy - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= -0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos\left(x+y\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)dx - \frac{\pi^2}{16} = 0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\sin x + \cos x\right)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= 0,5x^2\left(\sin x - \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\sin x - \cos x\right)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + x\left(\sin x + \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x + \cos x\right)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - \left(\sin x - \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16}.$$

Отже, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16}$.

4. Визначимо коваріацію (момент кореляції).

$$K_{xy}=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y)=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy\,sin(x+y)\,dxdy-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=$$

$$=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,sin(x+y)\,dy-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left. y\,cos(x+y)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x+y)dy\right]x\,dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left[\frac{\pi}{2}cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+sin\,x\right]dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left[-\frac{\pi}{2}sin\,x-cos\,x+sin\,x\right]dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=0{,}5x\left[sin\,x-\frac{\pi}{2}cos\,x+cos\,x\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-$$

$$-0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[sin\,x-\frac{\pi}{2}cos\,x+cos\,x\right]dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$\frac{\pi}{4}-0{,}5\left[sin\,x-\frac{\pi}{2}sin\,x-cos\,x\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-0{,}5+\frac{\pi}{4}-0{,}5-\frac{\pi^2}{16}=\frac{8\pi-16-\pi^2}{16}.$$

Звідси $r_{xy}=\dfrac{k_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\dfrac{8\pi-16-\pi^2}{\pi^2+8\pi-32}\approx-\dfrac{0{,}73688}{3{,}00232}\approx-0{,}2454$.

5. Ймовірність влучення точки **(*X*, *Y*)** у квадрат Q, обмежений прямими $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=0$, $y=\frac{\pi}{4}$

$$P\left[(X,Y)\in Q\right]=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin(x+y)\,dxdy=-0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left.cos(x+y)\right|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)dy=$$

$$= -0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)-cos\,y\right)dy = -0{,}5\left(sin\left(\frac{\pi}{4}+y\right)-sin\,y\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -0{,}5\left(sin\frac{\pi}{2}-sin\frac{\pi}{4}-sin\frac{\pi}{4}+sin\,0\right) = 0{,}5\left(\sqrt{2}-1\right).$$

6. Функцію $F\left(x,y\right)$ обчислюємо за формулою

$$F\left(x,y\right) = \int_{-\infty}^{Y}\int_{-\infty}^{X} f\left(x,y\right)dxdy.$$

У заданому квадраті

$$F\left(x,y\right) = 0{,}5\int_0^Y\int_0^X \sin\left(x+y\right)dx\,dy = -0{,}5\int_0^Y\left(\cos\left(x+y\right)\Big|_0^X\right)dy =$$

$$= -0{,}5\int_0^Y\left(cos\left(x+y\right)-cos\,y\right)dy = -0{,}5\left(sin\left(x+y\right)-sin\,y\right)\Big|_0^Y =$$

$$= 0{,}5\left(sin\,x+sin\,y-sin\left(x+y\right)\right).$$

Поза квадратом $F\left(x,y\right)=0$.

Нагадуємо, що

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Тема 3. Випадкові функції та випадкові процеси

Література: [5] гл. 23 § 1-17, гл. 24, § 1, 2, 3, 4, 5, гл. 25 § 1-4; [14] гл. 2-4.

При вивченні матеріалу цього розділу та розв'язанні відповідних задач контрольної роботи студент повинен користуватися рекомендованою літературою та формулами, що наведені у п. 2.9 довідкового матеріалу.

Вивчивши цей розділ, студент повинен знати поняття: випадкові функції та випадкові процеси, їхні характеристики; кореляційна функція випадкової функції (процесу), її характеристики для суми, похідної та інтегралу випадкового процесу.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. **К**ореляційна функція випадкового процесу $\boldsymbol{X(t)}$ має вигляд $\boldsymbol{K_x(t',t'') = 3(t')^2(t'')^2}$. Знайти дисперсію $\boldsymbol{D_y(t)}$, знайти унормовану кореляційну функцію випадкової функції $\boldsymbol{Y(t) = t\,X(t) + 2t}$.

Розв'язання. Дисперсія $\boldsymbol{D_y(t)}$:

$$D_X(t) = K_x(t, t) = 3t^2(t)^2 = 3t^4.$$

$$D_y(t) = D(t\,X(t) + 2t) = D(t\,X(t)) + 0 =$$

$$= t^2 D(X(t)) = t^2(3t^4) = 3t^6.$$

$$D_y(t') = 3(t')^6, \quad D_y(t'') = 3(t'')^6.$$

Кореляційна функція випадкового процесу $\boldsymbol{Y(t)}$:

$$K_Y(t',t'') = K_{tx(t)+2t}(t',t'') = K_{tx(t)}(t',t'') = t'\,t''\,K_x(t',t'') =$$

$$= t'\,t''\,(3(t')^2(t'')^2) = 3(t')^3(t'')^3.$$

Унормована кореляційна функція випадкової функції $\boldsymbol{Y(t)}$:

Якщо $r_X(t',t'') = \dfrac{K_X(t',t'')}{\sqrt{D_x(t')D_x(t'')}}$, то $r_Y(t',t'') = \dfrac{3(t')^3(t'')^3}{\sqrt{3(t')^6 \cdot 3(t'')^6}} = 1.$

*Приклад 2***.** Визначити кореляційну функцію та дисперсію випадкової функції $\boldsymbol{Z(t) = Y(t) + X(t)}$, $\boldsymbol{X(t) = t^2B}$, $\boldsymbol{Y = (t+1)A}$, де $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ – випадкові некорельовані величини, $D_A = 5$, $D_B = 2$.

Розв'язання.

$$K(X,Y) = M\Big[\big(X - M(X)\big)\cdot\big(Y - M(Y)\big)\Big] =$$

$$= M[(t^2B - M(t^2B))\cdot((t+1)A - M((t+1)A)] =$$

$$= M[(t^2B - t^2M(B))\cdot((t+1)A - (t+1)M(A))] =$$

$$= M[t^2(B - M(B))\cdot(t+1)(A - M(A))] =$$

$$= t^2(t+1)M[(B - M(B))\cdot(A - M(A))] = t^2(t+1)K_{AB} = 0$$

($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ – випадкові некорельовані величини), маємо $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ – некорельовані випадкові функції.

Якщо $\boldsymbol{X(t)}$, $\boldsymbol{Y(t)}$ – *некорельовані,*

$$K_{X+Y}(t'',t') = K_X(t'',t') + K_Y(t'',t'),\ D_{X+Y} = D_X + D_Y.$$

$$K_X(t'',t') = M[((t')^2B - M((t')^2B))\cdot((t'')^2B - M((t'')^2B))] =$$

$$= M[(t')^2(B - M(B))\cdot(t'')^2(B - M(B))] = (t')^2(t'')^2\cdot M[(B - M(B))^2] =$$

$$=(t')^2(t'')^2\cdot D[B]=2(t')^2(t'')^2.$$

$$K_Y(t'',t')=M[((t'+1)A-M((t'+1)A))\cdot((t''+1)A-M((t''+1)A))]=$$

$$=M[(t'+1)\ (A-M(A))\cdot(t''+1)\ (A-M(A))]=$$

$$=(t'+1)\ (t''+1)\ \cdot M[(A-M(A))^2]=$$

$$=(t'+1)\ (t''+1)\cdot D(A)=5(t'+1)(t''+1).$$

Автокореляційна функція

$$K_Z(t'',t')=2(t')^2(t'')^2+5(t'+1)\ (t''+1).$$

Дисперсія

$$D_Z(t)=K_Z(t,t)=2t^4+5(t+1)^2.$$

Приклад 3. Спектральна щільність випадкового процесу $S(\omega)=a$, при $-b\le\omega\le b$, при $|\omega|>b$, $S(\omega)=0$. Знайти кореляційну функцію $K_X(\tau)$.

Розв'язання. $K_X(\tau)=2\int\limits_0^\infty a\cdot\cos\omega\tau\,d\omega=2a\left.\frac{\sin\omega\tau}{\tau}\right|_0^b=\frac{2a\sin b\tau}{\tau}$.

Приклад 4. Задана кореляційна функція $K_X(\tau)=\sigma^2(1-|\tau|)$, при $|\tau|\le 1$, $K_X(\tau)=0$, при $|\tau|>1$. Знайти спектральну щільність випадкового процесу $S(\omega)$.

Розв'язання.

$$S(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\sigma^2(1-\tau)\cos\omega\tau\,d\tau=\left|\begin{matrix}u=1-\tau;\ du=-d\tau\\ dv=\cos\omega\tau d\tau;\\ v=\dfrac{\sin\omega\tau}{\omega}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}\left(\left.\frac{(1-\tau)\sin\omega\tau}{\omega}\right|_0^1+\int\limits_0^1\frac{\sin\omega\tau}{\omega}d\tau\right)=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}\left(\left(\frac{0\sin\omega\tau}{\omega}-\frac{(1-\tau)\sin 0}{\omega}\right)-\frac{\cos\omega\tau}{\omega^2}\Bigg|_0^1\right)=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}\left(-\left(\frac{\cos\omega}{\omega^2}-\frac{\cos 0}{\omega^2}\right)\right)=\frac{\sigma^2(1-\cos\omega)}{\pi\omega^2};$$

$$S(\omega)=\frac{\sigma^2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega).$$

Приклад 5. Знайти дисперсію стаціонарного випадкового процесу, якщо спектральна щільність $S(\omega)=\dfrac{10}{\pi(4+\omega^2)}$.

Розв'язання.

$$D_X=K_x(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{10dx}{\pi(4+\omega^2)}=\frac{10}{\pi}arctg(x/2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=$$

$$=\frac{10}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=10.$$

Приклад 6. Маємо випадкову функцію $X(t)$ з математичним сподіванням $m_x(t)=4t+5$

Знайти математичне сподівання випадкових функцій

$$Z(t)=X'(t),\ Y(t)=\int_0^t X(t)dt.$$

Розв'язання.

$$m_z=(m_x)'=(4t+5)'=4,\ m_Y=\int_0^t m_x dt=\int_0^t(4t+5)dt=2t^2+5t.$$

Приклад 7. Маємо випадкову функцію $X(t)$ з кореляційною функцією $K_x(t',t'')=\cos t'\cdot\cos t''$. Знайти кореляційну функцію та дисперсію випадкових функцій $Z(t)=X'(t)$, $Y(t)=\int_0^t X(t)dt$.

Розв'язання.

$$K_Z(t',t'')=K_{X'}(t',t'')=\frac{\partial^2 K_X(t',t'')}{\partial t'\partial t''}=(-\sin t'\cos t'')''_{t't''}=$$

$$=\sin t'\sin t''.\ \ D_Z(t)=K_Z(t,t)=\sin^2 t.$$

$$K_Y(t',t'')=\int_0^{t''}\int_0^{t'} \cos t' \cos t'' dt' dt'' = \sin t' \sin t''.$$

$$D_Y(t)=K_Y(t,t)=\sin^2 t.$$

Приклад 8. Знаємо кореляційную функцію $K_x(\tau)=10e^{-0,01\tau^2}$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$**.** Визначити автокореляційну функцію та дисперсію для похідної випадкової функції $X(t)$.

Розв'язання. Якщо $Z(t)=X'(t)$, то

$$K_Z(t',t'')=K_Z(\tau)=\frac{\partial^2 K_X(\tau)}{\partial \tau^2}=$$

$$=(10\cdot e^{-0,01\cdot\tau^2}\cdot(-0,01)\cdot 2\cdot\tau)'_\tau=(-0,2\tau\cdot e^{-0,01\cdot\tau^2})'_\tau = -0,2\cdot e^{-0.01\cdot\tau^2}+$$

$$+(-0,2\cdot\tau)\cdot e^{-0,01\cdot\tau^2}\cdot(-0,01\cdot 2\cdot\tau)= e^{-0,01\cdot\tau^2}\cdot(0,004\cdot\tau^2-0,2).$$

Приклад 9. Знайти взаємнокореляційну функцію двох випадкових функцій $X(t)=t^2A$, $Y=(t+1)A$, де A – випадкова величина, $D(A)=4$.

Розв'язання. Взаємнокореляційна функція обчислюється за формулою

$$R\big(X(t'),Y(t'')\big)=R_{XY}(t',t'')=$$

$$M\Big[\big(X(t')-M\big[X(t')\big]\big)\cdot\big(Y(t'')-M\big[Y(t'')\big]\big)\Big]=$$

$$=M[((t')^2A-M((t')^2A))\cdot((t''+1)A-M((t''+1)A))]=$$

$$=M[((t')^2A-(t')^2M(A))\cdot((t''+1)A-(t''+1)M(A))]=$$

$$=M[(t')^2\cdot(A-M(A))\cdot(t''+1)\cdot(A-M(A))]=$$

$$=(t')^{2\cdot}\cdot(t''+1)\cdot M[(A-M(A))^2]= (t')^2\cdot(t''+1)\cdot D(A)=4(t')^2\cdot(t''+1).$$

Приклад 10. Задана випадкова функція $X(t)=Ae^{-\alpha t}$, де A – випадкова величина та $m(A)=m_A$, $D(A)=D_A$. Знайти: унормовану кореляційну функцію.

Розв'язання. За властивостями пункту 2.9. довідкового матеріалу маємо:

$$m_X(t)=M\left(Ae^{-\alpha t}\right)=e^{-\alpha t}M(A)=e^{-\alpha t}m_A;$$

$$D_X(t)=D\big(X(t)\big)=D\left(A\cdot e^{-\alpha t}\right)=\left(e^{-\alpha t}\right)^2\cdot D_A;$$

$$K_X(t',t'')=M\Big[\big(X(t')-M(X(t'))\big)\cdot\big(X(t'')-M(X(t''))\big)\Big]=$$

$$=M\Big[\big(A\cdot e^{-\alpha t'}-e^{-\alpha t'}\cdot m_A\big)\cdot\big(A\cdot e^{-\alpha t''}-e^{-\alpha t''}\cdot m_A\big)\Big]=$$

$$=M\Big[e^{-\alpha t'}\big(A-m_A\big)\cdot e^{-\alpha t''}\big(A-m_A\big)\Big]=$$

$$e^{-\alpha(t'+t'')}\cdot M\Big[\big(A-m_A\big)^2\Big]=e^{-\alpha(t'+t'')}\cdot D_A;$$

$$r_X(t',t'')=\frac{e^{-\alpha(t'+t'')}\cdot D_A}{\sqrt{\big(D_A\cdot e^{-\alpha t'}\big)^2}\cdot\sqrt{\big(D_A\cdot e^{-\alpha t''}\big)^2}}=\frac{e^{-\alpha(t'+t'')}\cdot D_A}{D_A\cdot e^{-\alpha t'}\cdot e^{-\alpha t''}}=1,$$

$$m_x(t)\neq const,\quad K_x(t',t'')\neq K_x(t'-t'').$$

Таким чином, маємо нестаціонарну випадкову функцію.

Приклад 11. Знайти кореляційну функцію та дисперсію для похідної випадкової функції $X(t)=B\cos\omega t+A\sin\omega t$, де A, B – випадкові величини, для яких $m_A=m_B=0$, $\sigma_A=\sigma_B=\sigma$, $K_{AB}=0$.

Розв'язання.

1) $$Y(t)=X'(t)=-B\cdot\omega\sin\omega t+A\cdot\omega\cos\omega t;$$

$$M(Y)=M\big[-B\cdot\omega\sin\omega t+A\cdot\omega\cos\omega t\big]=$$

$$=-\omega\sin\omega t\cdot M[B]+\omega\cos\omega t\cdot M[A]=$$

$$=-\omega\big(\sin\omega t\cdot 0-\cos\omega t\cdot 0\big)=0;\quad m_y(t')=0;\quad m_y(t'')=0;$$

2) $$K_y(t',t'')=M\Big[\big(-B\cdot\omega\sin\omega t'+A\cdot\omega\cos\omega t'-0\big)\times$$

$$\times\big(-B\cdot\omega\sin\omega t''+A\cdot\omega\cos\omega t''-0\big)\Big]=$$

$$=M\Big[\omega^2\Big(\big(B^2\cdot\sin\omega t'\cdot\sin\omega t''+A^2\cdot\cos\omega t'\cdot\cos\omega t''\big)-$$

$$-AB\big(\sin\omega t'\cdot\cos\omega t''+\cos\omega t'\cdot\sin\omega t''\big)\Big)\Big]=$$

$$=\omega^2\Big\{\sin\omega t'\cdot\sin\omega t''\cdot M\Big(\big(B-M(B)\big)^2\Big)+$$

$$+\cos\omega t'\cdot\cos\omega t''\cdot M\Big(\big(A-M(A)\big)^2\Big)-$$

$$-\sin\omega\big(t'+t''\big)\cdot M\Big(\big(A-0\big)\big(B-0\big)\Big)\Big\}=$$

$$=\omega^2\left\{\sin\omega t'\cdot\sin\omega t''\cdot D_B+\cos\omega t'\cdot\cos\omega t''\cdot D_A-\sin\omega(t'+t'')\cdot K_{AB}\right\}=$$

$$= \omega^2 \left\{ \sin\omega t' \cdot \sin\omega t'' \cdot \sigma^2 + \cos\omega t' \cdot \cos\omega t'' \cdot \sigma^2 - 0 \right\} =$$

$$= \omega^2 \cdot \sigma^2 \left\{ \sin\omega t' \cdot \sin\omega t'' + \cos\omega t' \cdot \cos\omega t'' \right\} = \omega^2 \cdot \sigma^2 \cos\left(t'' - t'\right)$$

$$D_Y = K\left(t,t\right) = \omega^2 \cdot \sigma^2 \cos 0 = \omega^2 \cdot \sigma^2;\; r_y = \frac{\omega^2 \cdot \sigma^2 \cos\left(t'' - t'\right)}{\omega\sigma \cdot \omega\sigma} = \cos\left(t'' - t'\right).$$

Таким чином, маємо стаціонарну випадкову функцію.

Тема 4. Потоки події, ланцюги Маркова

Література: [4] гл.4 § 1,2; [5] гл. 6 § 5, гл. 22; [14] гл. 5.

При вивченні матеріалу цього розділу та розв'язанні відповідних задач контрольної роботи студент повинен користуватися рекомендованою літературою та формулами, що наведені у п. 2.10 довідкового матеріалу.

Вивчивши цей розділ, студент повинен знати поняття: потоки подій, їхні властивості та класифікація, поняття ланцюга Маркова, матриці переходу.

Приклад. Задано матрицю переходу $P_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю переходу $P_3 = P_1^3$.

Розв'язання.

$$P_3 = P_1^3 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,7 & 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,3 \\ 0,7 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,7 & 0,7 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,58 & 0,42 \\ 0,49 & 0,51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,58 \cdot 0,4 + 0,42 \cdot 0,7 & 0,58 \cdot 0,6 + 0,42 \cdot 0,3 \\ 0,49 \cdot 0,4 + 0,51 \cdot 0,7 & 0,49 \cdot 0,6 + 0,51 \cdot 0,3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0,526 & 0,474 \\ 0,553 & 0,447 \end{pmatrix}.$$

Завдання до контрольної роботи №2

Завдання 1. Задана генеральна сукупність, яка розподілена за нормальним законом. Вибірка, що зроблена випадковим способом, задається наведеними даними. Виконати наступні вправи:

1) побудувати статистичний розподіл вибірки;
2) побудувати полігони частот і відносних частот;
3) знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$;
4) побудувати графік емпіричної функції розподілу $F^*(x)$;
5) знайти оцінки для математичного сподівання (вибіркову середню);
6) визначити незміщену оцінку дисперсії;
7) визначити зміщену оцінку дисперсії;
8) визначити границі довірчого інтервалу для математичного сподівання при довірчій ймовірності (надійності) $\gamma = 0{,}95$;
9) визначити границі довірчого інтервалу для дисперсії при довірчій ймовірності (надійності) $\gamma = 0{,}95$;
10) розбивши інтервал на 5 рівних підінтервалів, побудувати інтервальний статистичний розподіл вибірки;
11) побудувати гістограму відносних частот.

1. Наведені дані про витрати часу на виробництво одиниці продукції: 0,09; 0,11; 0,09; 0,08; 0,09; 0,06; 0,10; 0,09; 0,11; 0,09; 0,09; 0,11; 0,09; 0,08; 0,09; 0,06; 0,08; 0,09; 0,08; 0,10; 0,08; 0,07; 0,09; 0,07; 0,10; 0,07; 0,09; 0,10; 0,06; 0,09.

2. Виміряна максимальна ємність конденсаторів змінної ємності. Результати вимірювань у пФ наведені у таблиці: 437; 4,39; 4,38; 4,39; 436; 4,42; 4,36; 4,31; 4,40; 4,40; 437; 4,39; 4,38; 4,39; 436; 4,42; 4,35; 4,59; 4,40; 4,43; 4,41; 4,42; 4,40; 4,37; 4,42; 4,40; 4,35; 4,40; 4,40;4,40.

3. При свердлінні 50 отворів одним і тим самим свердлом з наступними вимірюваннями діаметрів отворів отримані такі дані в мм: 40,32; 40,32;

40,33; 40,2; 40,29; 40,31; 40,35; 40,28; 40,29; 40,29; 40,35; 40,34; 40,33; 40,34; 40,31; 40,33; 40,34; 40,32; 40,30; 40,31; 40,30; 40,30; 40,33; 40,32; 40,33; 40,30; 40,32; 40,31; 40,32; 40,29.

4. Визначається відсоткове відношення номінальної і ринкової цін на акції на фондовому ринку за певний період. Вибірка, зроблена випадковим способом за акціями 50 різних підприємств, задається даними: 100,3; 101,2; 100,0; 96,2; 100,8; 100,0; 98,8; 99,2; 100,5; 100,4; 99,2; 100,0; 99,4; 98,2; 98,2; 97,2; 99,4; 100,4; 98,8; 99,2; 99,4; 100,0; 100,4; 100,5; 100,0; 99,4; 99,2; 100,0; 101,4; 98,0.

5. Вибірка валиків зроблена випадковим способом. Діаметри валиків: 90; 85; 91; 87; 90; 90; 88; 86; 88; 93; 93; 92; 91; 92; 89; 91; 87; 88; 88; 92; 89; 90; 91; 90; 92; 89; 91; 89; 90; 87.

6. Дані про вагу литих виробів, відібраних випадково: 77; 76; 80; 78; 78; 82; 78; 79; 75; 81; 83; 77; 76; 80; 78; 78; 82; 78; 79; 81; 80; 79; 80; 79; 80; 79; 80; 78; 81; 77.

7. Данні про довжину заготовок: 40,32; 40,31; 40,30; 40,28; 40,29; 40,33; 40,33; 40,30; 40,29; 40,31; 40,31; 40,30; 40,34; 40,34; 40,32; 40,31; 40,30; 40,28; 40,29; 40,33; 40,33; 40,30; 40,29; 40,31; 40,32; 40,231; 40,32; 40,31; 40,32; 40,35.

8. Дані про відсотки виконання плану: 40,32; 40,31; 40,30; 40,28; 40,29; 40,33; 40,33; 40,30; 40,29; 40,31; 100,0; 99,8; 98,3; 99,8; 101,2; 101,2; 100,8; 100,0; 98,9; 100,5; 99,8; 100,5; 100,0; 100,8; 100,0; 100,5; 100,0; 99,8; 98,0.

9. Дані про вік робітників: 25; 27; 28; 31; 26; 27; 29; 30; 27; 38; 24; 25; 27; 28; 31; 26; 27; 29; 25; 27; 30; 29; 36; 28; 31; 28; 27; 26; 29; 24.

10. Результати вимірювань внутрішніх діаметрів шестірень: 4,36; 4,40; 4,40; 4,35; 4,36; 4,40; 4,40; 4,36; 4,40; 4,43; 4,40; 4,36; 4,31; 4,42; 4,40; 4,36; 4,40; 4,40; 4,35; 4,36; 4,40; 4,40; 4,36; 4,40; 4,43; 4,40; 4,42; 4,36; 4,40; 4,35.

Завдання 2. Для наведеної нижче вибірки знайти оцінки статистичних характеристик та параметри розподілу.

1. Дано статистичний розподіл, близький до біномного розподілу:

X	0	1	2	3	4
n_i	9	23	43	23	9

Знайти оцінки параметра p^*.

2. Дано статистичний розподіл, близький до показникового розподілу:

X	[0; 400)	[400; 800)	[800; 1200)	[1200; 1600)
n_i	123	97	78	54

Знайти оцінки параметра λ.

3. Дано статистичний розподіл, близький до показникового розподілу:

X	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
n_i	133	48	16	6	4	3

Знайти оцінки параметра λ.

4. Дано статистичний розподіл, близький до біномного розподілу:

X	0	1	2	3	4
n_i	10	22	44	24	10

Знайти оцінки параметра p^*.

5. Дано статистичний розподіл, близький до розподілу Пуассона:

X	0	1	2	3
n_i	117	57	23	7

Знайти оцінки параметра λ.

6. Дано статистичний розподіл, близький до розподілу Пуассона:

X	0	1	2	3
n_i	39	38	20	8

Знайти оцінки параметра λ.

7. Дано статистичний розподіл, близький до біномного розподілу:

X	0	1	2	3	4
n_i	4	5	12	24	28

Знайти оцінки параметра p^*.

8. Дано статистичний розподіл, близький до розподілу Пуассона:

X	0	1	2	3	4	5	6
n_i	9	23	28	23	15	9	5

Знайти оцінки параметра λ.

9. Дано статистичний розподіл, близький до розподілу Пуассона:

X	0	1	2	3
n_i	507	338	127	27

Знайти оцінки параметра λ .

10. Дано статистичний розподіл, близький до показникового розподілу:

X	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)
n_i	365	247	152	102	72	47

Знайти оцінки параметра λ .

Завдання 3. Дана кореляційна таблиця.

1) написати умовний закон розподілу X при умові $Y=Y_3$;
2) знайти умовне математичне сподівання при $M(X_{y=y_3})$;
3) математичні сподівання m_x і m_y ;
4) дисперсії σ_x^2 і σ_y^2;
5) коефіцієнт кореляції r_{xy} ;
6) рівняння регресії Y на X та рівняння регресії X на Y.

1.

X \ Y	4	9	14	19	24	29
30	3	3	-	-	-	-
40	-	5	4	-	-	-
50	-	-	40	2	8	-
60	-	-	5	10	6	-
70	-	-	-	4	7	3

2.

Y / X	10	15	20	25	30	35
40	2	4	-	-	-	-
50	-	3	7	-	-	-
60	-	-	5	30	10	-
70	-	-	7	10	8	-
80	-	-	-	5	6	3

3.

Y / X	10	15	20	25	30	35
120	5	1	-	-	-	-
130	-	6	2	-	-	-
140	-	-	5	40	5	-
150	-	-	2	8	7	-
160	-	-	-	4	7	8

4.

Y / X	5	10	15	20	25	30
110	3	5	-	-	-	-
120	-	4	4	-	-	-
130	-	-	7	35	8	-
140	-	-	2	10	8	-
150	-	-	-	5	6	3

5.

Y / X	15	20	25	30	35	40
115	4	1	-	-	-	-
125	-	6	4	-	-	-
135	-	-	2	50	2	-
145	-	-	1	9	7	-
155	-	-	-	4	3	7

6.

Y / X	102	107	112	117	122	127
110	1	5	-	-	-	-
120	-	5	3	-	-	-
130	-	-	3	40	12	-
140	-	-	2	10	5	-
150	-	-	-	3	4	7

7.

Y / X	5	10	15	20	25	30
30	2	6	-	-	-	-
40	-	5	3	-	-	-
50	-	-	7	40	2	-
60	-	-	4	9	6	-
70	-	-	-	4	7	5

8.

Y / X	5	10	15	20	25	30
145	2	4	-	-	-	-
155	-	3	5	-	-	-
165	-	-	5	35	5	-
175	-	-	2	8	17	-
185	-	-	-	4	7	3

9.

Y / X	115	120	125	130	135	140
25	3	4	-	-	-	-
35	-	6	3	-	-	-
45	-	-	6	35	2	-
55	-	-	12	8	6	-
65	-	-	-	4	7	4

10.

Y / X	110	115	120	125	130	135
40	3	4	-	-	-	-
50	-	3	7	-	-	-
60	-	-	5	30	10	-
70	-	-	7	10	8	-
80	-	-	-	5	6	3

Завдання 4. У наступних задачах надана функція розподілу або щільність ймовірності системи неперервних випадкових величин.

1. Знайти: 1) коефіцієнт a; 2) математичні сподівання m_x и m_y; 3) дисперсії σ_x^2 и σ_y^2; 4) коефіцієнт кореляції r_{xy}.

$$f(x,y)=\begin{cases} axy & \text{в області } D, \\ 0 & \text{поза областю,} \end{cases}$$

де D – трикутник: $x+y-1=0$; $x=0$; $y=0$.

2. Знайти: 1) коефіцієнт a; 2) математичні сподівання m_x и m_y; 3) дисперсії σ_x^2 и σ_y^2; 4) коефіцієнт кореляції r_{xy}.

$$f(x,y)=\begin{cases} a^2-x^2-y^2 & \text{якщо } x^2+y^2 \le a^2 \ (a>0), \\ 0 & \text{якщо } x^2+y^2>a^2. \end{cases}$$

3. Знайти: 1) коефіцієнт a; 2) математичні сподівання m_x и m_y; 3) дисперсії σ_x^2 и σ_y^2; 4) коефіцієнт кореляції r_{xy}.

$$f(x,y)=\begin{cases} a\cos(x+y) & \text{в області } D, \\ 0 & \text{поза областю,} \end{cases}$$

де область $D: -\pi/2 \le x \le 0;\ 0 \le y \le \pi/2$.

4. Знайти: 1) коефіцієнт $\boldsymbol{a}$; 2) функцію розподілу $\boldsymbol{F(x, y)}$; 3) коефіцієнт кореляції $\boldsymbol{r_{xy}}$; 4) знайти ймовірність попадання в область $\tilde{\boldsymbol{D}}$.

$$f(x,y)=\begin{cases} a\cos x\cos y & \text{в квадраті} \quad 0\le x\le \pi/2, \quad 0\le y\le \pi/2, \\ 0 & \text{поза квадратом.} \end{cases}$$

де область $\tilde{D}$: $0\le x\le \dfrac{\pi}{4}$; $0\le y\le \dfrac{\pi}{4}$.

5. Знайти: 1) коефіцієнт $\boldsymbol{a}$; 2) функцію розподілу $\boldsymbol{F(x, y)}$; 3) коефіцієнт кореляції $\boldsymbol{r_{xy}}$; 4) знайти ймовірність попадання в область $\tilde{\boldsymbol{D}}$.

$$f(x,y)=\begin{cases} a(x+y) & \text{в квадраті } D, \\ 0 & \text{поза областю,} \end{cases}$$

де область D: $0<x<1$, $0<y<1$; область $\tilde{D}$: $0<x<0{,}5$, $0<y<0{,}5$.

6. Знайти: 1) коефіцієнт $\boldsymbol{a}$; 2) функцію розподілу $\boldsymbol{F(x, y)}$; 3) коефіцієнт кореляції $\boldsymbol{r_{xy}}$; 4) знайти ймовірність попадання в область $\tilde{\boldsymbol{D}}$.

$$f(x,y)=\frac{A}{\pi^2\left(16+x^2\right)\left(25+y^2\right)},$$

де область D: $0<x<1$, $0<y<1$; область $\tilde{D}$: $0<x<0{,}5$, $0<y<0{,}5$.

7. Знайти: 1) коефіцієнт $\boldsymbol{a}$; 2) функцію розподілу $\boldsymbol{F(x, y)}$; 3) коефіцієнт кореляції $\boldsymbol{r_{xy}}$; 4) знайти ймовірність попадання в область $\tilde{\boldsymbol{D}}$.

$$f(x,y)=\frac{A}{1+x^2+y^2+x^2y^2},$$

де область D – прямокутник $OABC$, $O(0;\,0)$, $A(0;\,1)$, $B(3;\,1)$, $C(3;\,0)$; область $\tilde{D}$: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

8. Знайти: 1) коефіцієнт $\boldsymbol{a}$; 2) функцію розподілу $\boldsymbol{F(x, y)}$; 3) коефіцієнт кореляції $\boldsymbol{r_{xy}}$; 4) знайти ймовірність попадання в область $\tilde{\boldsymbol{D}}$.

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} A\cos(x-y) & \text{в області } D, \\ 0 & \text{поза областю } D, \end{cases}$$

де D: $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/2$; $\tilde{D}$: $0 \le x \le \pi/3$, $0 \le y \le \pi/6$.

9. Знайти: 1) коефіцієнт a; 2) функцію розподілу $F(x, y)$; 3) коефіцієнт кореляції r_{xy}; 4) знайти ймовірність попадання в область $\tilde{D}$.

$$f\left(x,y\right)=\frac{A}{\pi^2\left(4+x^2\right)\left(9+y^2\right)},$$

де область D: $0 < x < 1$, $0 < y < 1$; область $\tilde{D}$: $0 < x < 0{,}5$, $0 < y < 0{,}5$.

10. Знайти: 1) коефіцієнт a; 2) функцію розподілу $F(x, y)$; 3) коефіцієнт кореляції r_{xy}; 4) знайти ймовірність попадання в область $\tilde{D}$.

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} A\cos(y-x) & \text{в області } D, \\ 0 & \text{поза областю } D, \end{cases}$$

де D: $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/2$; $\tilde{D}$: $0 \le x \le \pi/6$, $0 \le y \le \pi/3$.

Завдання 5.

1. Кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ має вигляд $K_x\left(t', t''\right) = 4\left(t'\right)^2\left(t''\right)^2$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $Y(t) = X(t) + t$.

2. Маємо дисперсію $D_x(t) = 6\sin^2 3t$ випадкової функції $X(t)$. Знайти дисперсію $D_y(t)$, $Y(t) = t\,X(t)$.

3. Кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ має вигляд $K_x\left(t', t''\right) = \left(t'\right)^2\left(t''\right)^2$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $Y(t) = X(t)(3+t)$.

4. Маємо дисперсію $D_x(t) = \sin^2 2t$ випадкової функції $X(t)$. Знайти дисперсію $D_y(t)$, де $Y(t) = X(t) + 2t^2$.

5. Кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ має вигляд $K_x(t', t'') = 2(t')^4 (t'')^2$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $Y(t) = 5X(t)$.
6. Визначити кореляційну функцію випадкової функції $Z(t) = Y(t) + X(t)$, $X(t) = (t-1)B$, $Y = t^2A$, де A, B – випадкові некорельовані величини, $D_A=2$, $D_B=3$.
7. Визначити нормовану кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо $K_x(t', t'') = 3\cos(t' - t'')$.
8. Кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ має вигляд $K_x(t', t'') = t't''$, математичне сподівання $m_x=t+4$. Знайти кореляційну функцію, математичне сподівання та дисперсію випадкової функції $Y(t)=5tX(t)+1$.
9. Кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ має вигляд $K_x(t', t'') = 7(t')^2 (t'')^2$, знайти кореляційну функцію випадкової функції $Y(t)=tX(t)-5t$.
10. Визначити кореляційну функцію випадкової функції $Z(t)=Y(t)+X(t)$, $X(t)=(t+3)A$, $Y=t^2B$, де A, B – випадкові некорельовані величини, $D_A=4$, $D_B=6$.

Завдання 6.

1. Знаємо кореляційну функцію $K_x(t', t'') = e^{-(t'-t'')^2}$ випадкової функції $X(t)$. Визначити кореляційну функцію похідної випадкової функції $X(t)$.
2. Маємо математичне сподівання $m_x=3t^2+4$ випадкової функції $X(t)$. Знайти математичне сподівання похідної.
3. Знайти спектральну щільність стаціонарного випадкового процесу, якщо відома кореляційна функція $K_x(\tau)$:

$$K_x(\tau)=1-(1/4)|\tau|, \text{ якщо } |\tau| \le 4; \ K_x(\tau)=0, \text{ якщо } |\tau|>4.$$

4. Маємо математичне сподівання $m_x=3t^2+4$ випадкової функції $X(t)$. Знайти математичне сподівання випадкової функції $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

5. Знайти взаємно кореляційну функцію двох випадкових функцій $X(t)=(t+1)B$, $Y=(t^2+1)B$, де B – випадкова величина, $D_B = 7$.

6. Знаємо кореляційну функцію $K_x(t',t'')=e^{-(t'-t'')^2}$ випадкової функції $X(t)$. Визначити кореляційну функцію та дисперсію для похідної випадкової функції $X(t)$.

7. Знаємо кореляційну функцію $K_x(\tau)=5e^{-0,2\tau^2}$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти дисперсію похідної $X'(t)$.

8. Знайти спектральну щільність стаціонарного випадкового процесу, якщо відома кореляційна функція $K_x(\tau)$:

$$K_x(\tau) = 1 - (1/3)\left|\tau\right|, \text{ якщо } \left|\tau\right| \le 3;\ K_x(\tau) = 0, \text{ якщо} \left|\tau\right| > 3.$$

9. Знаємо кореляційну функцію $K_x(\tau)=4e^{-0,25\tau^2}$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Визначити кореляційну функцію та дисперсію для похідної випадкової функції $X(t)$.

10. Знайти дисперсію стаціонарного випадкового процесу, якщо спектральна щільність

$$S(\omega)=\frac{6}{\pi(1+\omega^2)}.$$

Завдання 7.

1. Визначити унормовану кореляційну функцію випадкової функції:

$$X(t)=\sin t + A + B\,t + C\,t \sin t,$$

де A, B, C – випадкові величини, $m(A)=0$, $m(B)=0$, $m(C)=0$, $D(A)=D(B)=D(C)=D$, $K(A, B)=K(A, C)=K(C, B)=0$.

2. Визначити унормовану кореляційну функцію випадкової функції. Доказати стаціонарність випадкової функції

$$X(t)=B \cos vt + A \sin vt,$$

де A, B – випадкові величини, $\sigma(B)=\sigma(A)=\sigma$, $m(B)=m(A)=0$, $K(AB)=0$.

3. Знайти унормовану взаємну кореляційну функцію двох випадкових функцій $X(t)=(t+1)A$, $Y(t)=(t^2+1)A$, де A – випадкова величина, $D_A = 7$.

4. Визначити унормовану кореляційну функцію випадкової функції $Z(t)$ та знайти дисперсію випадкової функції $Z(t)$, якщо $Z(t)=Y(t)+X(t)$, де $X(t)=(t-1)B$, $Y(t)=t^2A$, де A, B – випадкові некорельовані величини, $D_A = 3$, $D_B = 5$.

5. Визначити унормовану кореляційну функцію випадкової функції: $X(t) = Ae^{-\mu t} + Be^{-\beta t}$, де A, B – випадкові величини, $\sigma(B)=\sigma$, $m(B)=m$, $m(A)=m$, $\sigma(A)=\sigma$.

6. Визначити унормовану кореляційну функцію випадкової функції та дисперсію суми випадкових функцій $Z(t)=X(t)+Y(t)$; $X(t)=(t-1)A$; $Y(t)=t^2B$, де A, B – випадкові некорельовані величини, $m_A = 2$, $m_B = 3$, $D_A = 4$, $D_B = 5$.

7. Визначити унормовану кореляційну функцію випадкової функції: $X(t)=B\cos vt+A\sin vt$, де A, B – випадкові величини, $\sigma(B)=\sigma(A)=\sigma$, $m(B)=m(A)=0$, $K(AB)=0$.

8. Визначити унормовану кореляційну функцію випадкової функції та дисперсію для похідної випадкової функції: $X(t)=B\cos vt$, де B – випадкова величина, $\sigma_B = \sigma$, $m_B = 0$. Чи є вона стаціонарною функцією?

9. Випадкова функція має вигляд: $X(t) = Ae^{-\mu t} + Be^{-\beta t}$, A, B – випадкові величини, $\sigma(B)=\sigma$, $m(B)=m$, $m(A)=m$, $\sigma(A)=\sigma$. Визначити унормовану кореляційну функцію випадкової функції. Чи є така функція стаціонарною?

10. Визначити унормовану кореляційну функцію випадкової функції та дисперсію для похідної випадкової функції: $\boldsymbol{X(t)=Bcosvt}$, де $\boldsymbol{B}$ – випадкова величина, $\boldsymbol{\sigma(B)=\sigma}$, $\boldsymbol{m(B)=0}$. Чи є вона стаціонарною функцією?

Завдання 8.

1. Задано матрицю переходу $\boldsymbol{P_1 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}}$. Знайти матрицю переходу $\boldsymbol{P_3 = P_1^3}$.

2. Задано матрицю переходу $\boldsymbol{P_1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}}$. Знайти матрицю переходу $\boldsymbol{P_3 = P_1^3}$.

3. Задано матрицю переходу $\boldsymbol{P_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}}$. Знайти матрицю переходу $\boldsymbol{P_2 = P_1^2}$.

4. Задано матрицю переходу $\boldsymbol{P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}}$. Знайти матрицю переходу $\boldsymbol{P_3 = P_1^3}$.

5. Задано матрицю переходу $\boldsymbol{P_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}}$. Знайти матрицю переходу $\boldsymbol{P_3 = P_1^3}$.

6. Задано матрицю переходу $\boldsymbol{P_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}}$. Знайти матрицю переходу $\boldsymbol{P_1 = P_1^2}$.

7. Задано матрицю переходу $\boldsymbol{P_1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}}$. Знайти матрицю переходу $\boldsymbol{P_2 = P_1^2}$.

8. Задано матрицю переходу $\boldsymbol{P_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0{,}3} & \mathbf{0{,}7} \\ \mathbf{0{,}2} & \mathbf{0{,}8} \end{pmatrix}$. Знайти матрицю переходу $\boldsymbol{P_3 = P_1^3}$.

9. Задано матрицю переходу $\boldsymbol{P_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0{,}1} & \mathbf{0{,}9} \\ \mathbf{0{,}4} & \mathbf{0{,}6} \end{pmatrix}$. Знайти матрицю переходу $\boldsymbol{P_3 = P_1^3}$.

10. Задано матрицю переходу $\boldsymbol{P_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0{,}9} & \mathbf{0{,}1} \\ \mathbf{0{,}6} & \mathbf{0{,}4} \end{pmatrix}$. Знайти матрицю переходу $\boldsymbol{P_2 = P_1^2}$.

ДОДАТОК

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127

Продовження таблиці значень функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Продовження таблиці значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,099
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів свободи k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Критичні точки розподілу Стьюдента

Число ступенів свободи k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					