МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

# РОБОЧА ПРОГРАМА,

## методичні вказівки та контрольні завдання до вивчення дисципліни “Числові методи і моделювання на ЕОМ” для студентів спеціальності 7.092501 – автоматизоване управління технологічними процесами

Дніпропетровськ НМетАУ 2008

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**

# РОБОЧА ПРОГРАМА,
## методичні вказівки та контрольні завдання до вивчення дисципліни “Числові методи та моделювання на ЕОМ” для студентів спеціальності 7.092501 – автоматизоване управління технологічними процесами

Затверджено
на засіданні Вченої ради
академії
Протокол № від

**Дніпропетровськ НМетАУ 2008**

УДК 517(07)

Робоча програма, методичні вказівки та контрольні завдання до вивчення дисципліни "Числові методи та моделювання на ЕОМ" для студентів спеціальності 7.092501 – автоматизоване управління технологічними процесами . / Укл. К.У. Чуднов. – Дніпропетровськ : НМетАУ, 2008. – с.57.

Наведені рекомендації до вивчення дисципліни "Числові методи та моделювання на ЕОМ": мета та завдання дисципліни; необхідний обсяг знань і умінь студентів у результаті її вивчення; методичні вказівки та список літератури, що рекомендується; варіанти індивідуальних завдань.

Призначена для студентів спеціальності заочної форми навчання.

Укладач : К.У. Чуднов, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний за випуск А.В.Павленко, д-р фіз.-мат.наук, проф.
Рецензент

Підписано до друку 16.06.08. Формат 60х84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк.3,29 . Умов. друк. арк.. 3,25. Тираж 100 пр. Замовлення №
№

Національна металургійна академія України
49600, г. Дніпропетровськ- 5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

## ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО РОБОТІ НАД ДИСЦИПЛІНОЮ “ЧИСЛОВІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛЮВАННЯ НА ЕОМ”

Основна форма навчання студента-заочника – самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з таких елементів: вивчення матеріалу по підручнику, розв’язання задач, виконання контрольних робіт. Дисципліна “Числові методи та моделювання на ЕОМ” потребує ще вміння працювати на ЕОМ та знати зміст деяких пакетів численної реалізації задач. Таким пакетом буде нині широко поширений пакет Mathcad.

На допомогу студенту академія організовує лекції та практичні заняття. Крім того, студент може розраховувати на усну консультацію викладача. Завершальний етап вивчення окремих частин дисципліни – це здача заліків та іспитів у відповідності до навчального плану.

Вивчаючи матеріал по підручнику, треба переходити до наступного розділу тільки після зрозуміння попереднього, виконуючи на папері усі обчислення.

При вивченні матеріалу за підручником корисно вести конспект, до якого записують формули рівняння, програми реалізації на ЕОМ, відмічають питання, з якими треба звернутися до викладача.

Якщо в процесі роботи по вивченню теоретичного матеріалу або при розв’язанні задач у студента виникають питання, відповіді на які він самостійно не може знайти, то він може звернутися до викладача за усною консультацією.

В процесі навчання студент повинен виконати контрольні роботи. Рецензії на ці роботи дозволяють студенту судити про ступінь засвоєння відповідного розділу.

З кожної контрольної роботи студент виконує свій варіант. Номер варіанта збігається з останньою цифрою номера залікової книжки або студентського квитка. Наприклад, номер залікової книжки 003247, отже треба виконати задачі варіанта № 7. Якщо  остання цифра “0”, то виконується варіант №10.

Якщо завдання потребують числової реалізації (а таких буде забагато), то їх треба реалізовувати тільки у пакеті Mathcad. У зошиті складається Mathcad-документ  реалізації задачі.

Кожну контрольну роботу треба присилати (приносити) в академію у заочний деканат в окремому зошиті, на обкладинці якого обов’язково позначено номер контрольної роботи,  назва дисципліни, прізвище та ініціали студента, його шифр (номер залікової книжки), факультет та групу, в якій навчається студент, домашня адреса.

Усі контрольні роботи за  даний  семестр повинні подаватися на кафедру не пізніше, ніж за 10  діб до початку екзаменаційної сесії.

Після перевірки контрольних робіт треба зробити усі виправлення і доповнення, на які вказав  рецензент.

Без прорецензованих та захищених контрольних робіт, де зроблені усі виправлення і доповнення, студент не допускається до заліків або іспитів.

Усі обчислення проводити з точністю до 0,0001.

## ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ
## "ЧИСЛОВІ МЕТОДИ І МОДЕЛЮВАННЯ НА ЕОМ"

1. Числовий розв'язок задач та його роль у сучасному житті. Ділення многочлена на двочлен. Схема Горнера. Обчислення за схемою Горнера.
2. Розв'язок алгебраїчних та трансцендентних рівнянь:
   - відокремлювання коренів рівнянь;
   - уточнення коренів рівнянь: методи половинного ділення, хорд, дотичних;
   - програми пакета Mathcad.
3. Розв'язок систем лінійних та нелінійних алгебраїчних рівнянь, програми пакета Mathcad.
4. Наближення функцій. Інтерполяційний поліном Лагранжа. Метод найменших квадратів. Програми пакета Mathcad.
5. Тригонометричні многочлени. Наближення функцій рядами Фур'є. Реалізація задач у пакеті Mathcad на ПЕОМ.
6. Числове диференціювання функції однієї та багатьох змінних у пакеті Mathcad .
7. Числове інтегрування функції однієї та багатьох змінних. Наближене обчислення визначеного інтеграла: методи прямокутників, трапецій та парабол (метод Сімпсона). Наближене обчислення подвійних інтегралів. Використання пакету Mathcad.
8. Числовий розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння: метод Ейлера, Рунге-Кутта. Використання пакету Mathcad .
9. Числовий розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Використання пакета Mathcad .
10. Числовий розв'язок рівнянь, які мають частинні похідні. Метод сіток для вирішення змішаної задачі гіперболічного типу та його реалізація на ПЕОМ.
11. Числові методи моделювання систем з розподіленими параметрами:
    а) фізичні і математичні моделі;
    б) класифікація математичних моделей. Цілі моделювання;

в) знайомство з системою Matlab+Simulink.
г) реалізація моделей за допомогою системи Mathcad+ Simulink.

## ОСНОВНІ ЗАСОБИ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ

В числових методах ми стикаємося з різними задачами. Але більшість з них може бути сформульована у вигляді

$$y = A(x),$$

де $x \in X, \quad y \in Y$ і $A(x) -$ деяка задана функція. Задача полягає або у відшуканні $y$, якщо задано $x$, або у відшуканні $x$, якщо задано $y$. Та зовсім не завжди за допомогою засобів класичної математики ми можемо розв'язати точно ці задачі застосовуючи скінчене число кроків. Іноді задача і може бути вирішена точно, але скористуватися відповіддю можна лише після трудомістких обчислень. Зараз же наведемо деякі загальні міркування.

Основним методом, за допомогою якого в числових методах вирішують поставлені задачі є заміна множин $X, Y$ і функції $A$ деякими іншими множинами $\overline{X}$ і $\overline{Y}$ та функцією $\overline{A}$, більш зручними для обчислень. Іноді буває достатньо зробити заміну лише множин $X$ і $Y$, або одну з них. Іноді достатньо замінити лише функцію $A$. Заміна повинна бути зроблена так, щоб розв'язання нової задачі

$$\overline{y} = \overline{A}(\overline{x}) \ , \quad \text{де}$$

$\overline{x} \in \overline{X}, \quad \overline{y} \in \overline{Y}$ було близьким до поставленої задачі і виконувалось би з меншими труднощами.

Наприклад, нехай треба обчислити інтеграл

$y = \int_a^b f(x)\,dx$, де $f(x) -$ неперервна на $[a;b]$ функція, але первісна цієї функції не виражається в елементарних функціях. Щоб отримати достатньо точне наближене значення інтеграла можна йти двома шляхами:

1) можна замінити функцію $f(x)$ алгебраїчним многочленом $P(x)$, який наближає функцію $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ з необхідною точністю. І тепер замість інтеграла $y=\int\limits_a^b f(x)dx$ ми будемо обчислювати інтеграл $y=\int\limits_a^b P(x)dx$, що зробити не важко. У цьому випадку ми замінимо множину $X$ на множину $\overline{X}$;
2) можна замість обчислення інтеграла $y=\int\limits_a^b f(x)dx$ обчислювати інтегральну суму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, яка буде достатньо близька до значення інтеграла. Тобто ми зараз вирішуємо задачу

$$y=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

А у цьому випадку ми вже поміняли оператор $A(x)$ на $\overline{A}(x)$.

## КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1

### *Тема 1.* КОРЕНІ МНОГОЧЛЕНІВ. ТЕОРЕМА БЕЗУ. СХЕМА ГОРНЕРА

Література. [1,2,9,10] .

Якщо $f(x)=a_0x^4+a_1x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n$, та $c-$ деяке число, то $f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+a_2c^{n-2}+...+a_n$ називають значенням многочлена при $x=c$.
Якщо $f(c)=0$, то число $c$ називають коренем многочлена $f(x)$ (або коренем рівняння $f(x)=0$).

Якщо поділити многочлен $f(x)$ на лінійний многочлен (тобто на $x-c$), то в остачі залишиться якесь число $r$ або нуль.

Остачу від ділення многочлена $f(x)$ на $(x-c)$ можна знайти за допомогою теореми Безу [ 9 ] яка свідчить, що

*остача від ділення многочлена* $f(x)$ *на лінійний многочлен* $(x-c)$ *дорівнює значенню многочлена* $f(x)$ *при* $x=c$*, тобто* $r=f(c)$.

Тепер бачимо, що число $c$ буде тоді і тільки тоді коренем многочлена $f(x)$, якщо $f(x)$ ділиться на $(x-c)$ без остачі.

*Приклад.* Знайти остачу від ділення многочлена $f(x)=3x^4-4x^3+2x^2-x+2$ на $(x-2)$ за теоремою Безу та після ділення “у стовпчик”.

*Розв’язок.*

1. За теоремою Безу

$$r=f(2)=3\cdot 16\cdot -4\cdot 8+2\cdot 4-2+2=24.$$

2. Ділимо “у стовпчик”.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4-4x^3+2x^2-x+2 & x-2 \\
\underline{-3x^4-6x^3} & \overline{3x^3+2x^2+6x+11}\,. \\
-\;+2x^3+2x^2-x+2 & \\
\underline{2x^3-4x^2} & \\
-\;6x^2-x+2 & \\
\underline{6x^2-12x} & \\
-\;11x+2 & \\
\underline{11x-22} & \\
24 &
\end{array}
$$

Як бачимо остача в обох випадках однакова. Це означає, що ми розв’язали задачу вірно. Многочлен, який ми отримали у частки,

$$g(x)=3x^2+2x^2+6x+11.$$

Коефіцієнти многочлена $g(x)$ та остачу можна отримати значно швидше, якщо скористатися схемою Горнера [ 9 ] . Спочатку виконаємо ділення за схемою Горнера, а потім розповімо як це робиться.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | -4 | 2 | -1 | 2 |
| $c = 2$ | 3 | 2 | 6 | 11 | 24 |
| | $b_0 = a_0$ | $b_1 = cb_0 + a_1$ | $b_2 = cb_1 + a_2$ | $b_3 = cb_2 + a_3$ | $r = cb_3 + a_4$ |

У наведеній схемі у верхньому рядку таблиці записані коефіцієнти $a_i$ многочлена $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 2$. Згідно з теорією [ 9 ], коефіцієнт $b_0$ многочлена $g(x) = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$ дорівнює коефіцієнту $a_0$ многочлена $f(x)$, тобто

$$b_0 = a_0.$$

Останні коефіцієнти та остача знаходяться за формулами:

$$b_k = a_k + c\, b_{k-1}; \qquad \left(k = \overline{1, n-1}\right);$$
$$r = a_n + c\, b_{n-1}.$$

Та все ж основна мета цього розділу – відшукання коренів рівняння $f(x) = 0$. Для наближеного розв'язку ,будь-якого рівняння ми повинні виконати два завдання: а) – відокремити корені; б) – уточнити корені [9 ] . Покажемо, як це ми будемо робити за допомогою пакета Mathcad . Перш за все ми повинні добре розуміти, що розв'язок рівняння $f(x) = 0$ графічно подається як задача знаходження абсцис точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю $0X$. А оскільки пакет Mathcad дозволяє нам зробити це наглядно, скористуємося цією послугою.

*Розглянемо такий приклад*. Знайти всі дійсні корені рівняння

$$3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 20 = 0$$

за допомогою функцій **root** та **polyroots**.

*Розв'язок*. Спочатку ми будуємо графік функції $y = 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 20$, потім по графіку (приблизно) встановлюємо значення кореня, а вже потім користуємося стандартними функціями пакета. Mathcad – документ з коментарем наводимо нижче.

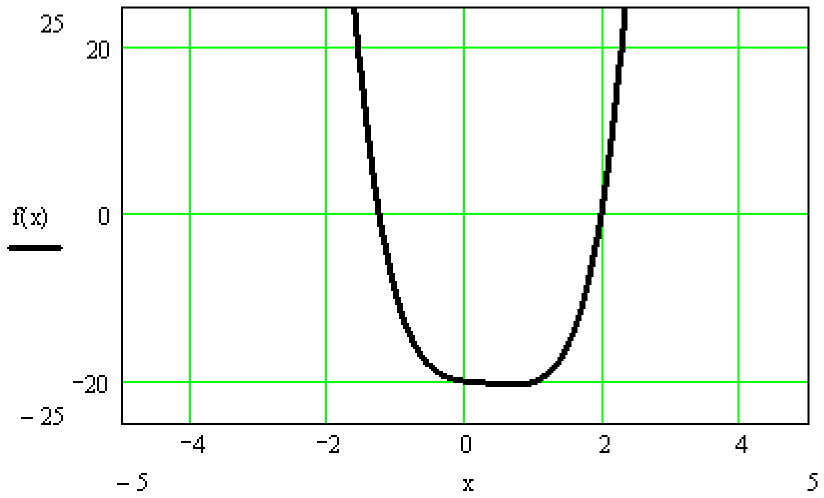
Встановлюємо точність обчислень

$$TOL := 1 \cdot 10^{-4}$$

Записуємо функцію

$$f(x) := 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 20$$

Будуємо графік функції [10]




Записуємо наближене значення першого кореня

$$x := -2$$

За допомогою процедури root отримуємо уточнене значення кореня

$$K1 := \mathrm{root}\,(f(x), x) \qquad K1 = 1.26$$

Перевіряємо значення функції у точці $x = 1.26$

$$f(K1) = 9.453 \times 10^{-6}$$

Записуємо наближене значення другого кореня

$$x := 2$$

Отримуємо уточнене значення другого кореня

$$K2 = \mathrm{root}\,(f(x), x) \qquad K2 = 1.9624$$

Перевіряємо значення функції у точці $x = 1.9624$

$$f(K2) = 2.6625 \times 10^{-6}$$

Таким чином, ми одержали два дійсних кореня: $x_1 = 1.26$ і $x_2 = 1.9624$.

Зараз знайдемо ці ж корені за допомогою процедури **polyroots.**

Наведемо Mathcad – документ

$$V_0 := -20 \qquad V_1 := -1 \qquad V_2 = 2 \qquad V_3 := -4 \qquad V_4 := 3$$

$$polyroots(V)=\begin{pmatrix} -1.26 \\ 0.3155+1.6114\,i \\ 0.3155-1.6114\,i \\ 1.9626 \end{pmatrix}$$

Процедура polyroots призначена для обчислення коренів многочленів. Тепер бачимо, що даний многочлен $f(x)$ має два дійсних і два комплексних кореня.

## Символьний розв’язок рівнянь та їх систем

У пакеті Mathcad рівняння та їх системи можна розв’язувати в аналітичному вигляді, використовуючи оператори символьних перетворень.

*Приклад 1.* Розв’язати рівняння $x^2 - a = 0$ відносно $x$ і відносно $a$.

Символьний розв’язок цих задач у пакеті займе два рядки

$$x^2 - a \quad solve, \quad x \rightarrow \pm a$$

$$x^2 - a \quad solve, \quad a \rightarrow x^2.$$

Для того щоб розв’язати символьно рівняння $x^2 - a = 0$ відносно $x$, треба в панелі символьних обчислень  клацнути по кнопці **solve**.На екрані з’явиться конструкція $\bullet\, solve, \bullet$ . В квадрат зліва заносимо вираз $x^2 - a$ (тобто ліву частину рівняння $x^2 - a = 0$), а в квадрат справа від solve – ім’я змінної, відносно якої треба розв’язати рівняння. Після цього клацнемо по вільному місцю в робочому документі. Результат – значення кореня рівняння – з’явиться справа від стрілки. Знак $"\rightarrow"$ - символьне виведення значення розв’язка рівняння.

*Приклад 2.* Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x(z+1)^2 - 27\,(x+z) = 0 \\ \left(1+x^2\right)\sqrt[4]{y-2} - 2x^2 = 0 \\ \sqrt{y-2}\;(z-2) + z = 0. \end{cases}$$

Mathcad – документ буде виглядати так:

$$TOL := 1 \cdot 10^{-4}$$

***Given***

$$x \cdot (z+1)^2 - 2 \cdot z \cdot (x+z) = 0$$

$$\left(1+x^2\right) \cdot \sqrt[4]{y-2} - 2 \cdot x^2 = 0$$

$$\sqrt{y-2} \cdot (z-2) + z = 0$$

$$FIND(x, y, z) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ми одержали два розв’язка системи

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 2, \quad x_1 = 0 \text{ та } x_2 = 1, \quad y_2 = 3, \quad z_2 = 1.$$

Для того щоб розв’язати систему у пакеті треба з клавіатури в робочий документ записати службове слова ***Given***. Далі нижче та правіше цього слова ліву частину першого рівняння системи, а далі символьний знак рівності (“жирне” **=**) і нуль. Аналогічно записуємо всі рівняння системи. Правіше і нижче останнього рівняння системи записуємо ім’я функції ***FIND*** і у дужках перелічуємо ім’я змінних, значення яких треба знайти. Після цього вираз $FIND(x, y, x)$ виділяємо синьою кутовою рамкою, клацаємо по кнопці $\bullet \rightarrow$ в панелі  символьних операцій і справа від стрілки в робочому документі з’являється відповідь у вигляді матриці, кожний стовпець якої утримує відповідь – один із розв’язків системи.

Якщо задана система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_n x_1 + a_{12} x_2 + ... a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n = b_2 \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + ... + a_{nn} x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.1}$$

то, як відомо [9], невідомі $x_i$ $\left(i = 1, \overline{n}\right)$ знаходяться за формулами Крамера:

$x_i = \dfrac{\Delta x_i}{\Delta}$, де $\Delta -$визначник системи $(\Delta \neq 0)$; $\Delta x_i -$визначник, який утворюється з визначника $\Delta$ заміною стовпця з коефіцієнтів при невідомій $x_i$ стовпцем вільних членів $b_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Систему (1.1) також можна вирішувати за допомогою конструкції **GIVEN…FIND,** яку ми розглянули раніше.

Якщо через **A** позначити матрицю системи (1.1), через **X**- матрицю-стовпець невідомих $x_i$, а через $B -$матрицю-стовпець вільних членів, то цю систему можна записати у матричному вигляді

$$A \cdot X = B \ . \tag{1.2}$$

Якщо визначник матриці $A$ не дорівнює нулю, то система (1.1) має один розв'язок

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{1.3}$$

де $A^{-1} -$ обернена матриця.

У пакеті Mathcad розв'язок цієї системи виглядає дуже просто, за допомогою оператора $X := A^{-1} \cdot B$, та за допомогою функції ***lsolve (…)*** .

Розглянемо на прикладі застосування усіх засобів.

*Приклад.* Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_1 + \ \ x_3 \qquad = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

а) матричним засобом $\left(X = A^{-1} \cdot B\right)$;

б) за допомогою функції ***lsolve (…)*** **;**

в) за допомогою конструкції ***Given…Find*** ;

г) за допомогою правила Крамера знайти одну невідому $x_2$.

*Розв'язок задачі із застосуванням пакета Mathcad.* Наведемо усі чотири Mathcad-документи (в подальшому скорочено будемо позначати М-С-документ) з коментарем.

І. Матричний метод

$TOL := 1 \cdot 10^{-4}$ $ORIGIN := 1$

Формуємо матриці $A$ і $B$

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -4 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Матричний розв’язок

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{bmatrix} -0.0769 \\ 2.3846 \\ 2.1538 \end{bmatrix}$$

Отже, $x_1 = -0{,}0769;$ $x_2 = 2{,}3846;$ $x_3 = 2{,}1538$.

Перевірка розв’язку системи

$$3 \cdot X_1 - 4 \cdot X_2 + 5 \cdot X_3 = 1$$
$$2 \cdot X_1 + X_3 = 2$$
$$4 \cdot X_1 + 5 \cdot X_2 - 4 \cdot X_3 = 3$$

II. За допомогою функції **l*solve (…)***

$$Y := lsolve(A, B) \qquad Y = \begin{bmatrix} -0.0769 \\ 2.3846 \\ 2.1538 \end{bmatrix}$$

III . За допомогою конструкції ***Given…Find***

***Given***

$$3 \cdot z_1 - 4 \cdot z_2 + 5 \cdot z_3 = 1$$
$$2 \cdot z_1 + z_3 = 2$$
$$4 \cdot z_1 + 5 \cdot z_2 - 4 \cdot z_3 = 3$$

$$FIND(z_1, z_2, z_3) \bullet \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} \\ \frac{31}{13} \\ \frac{28}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0769 \\ 2.3846 \\ 2.1538 \end{bmatrix}$$

IY. За допомогою правила Крамера

$$DX := |A| \qquad DX1 := A \qquad DX1^{<1>} := B$$

$$X1 := \frac{|DX1|}{DX} \qquad X1 = -0.0769$$

$$DX2 := A \qquad DX2^{<2>} := B \qquad X2 := \frac{|DX2|}{DX}$$

$$X2 = 2.3846$$

$$DX3 := A \qquad DX3^{<3>} := B \qquad X3 := \frac{|DX3|}{DX}$$

## Тема 2. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ ПОЛІНОМ ЛАГРАНЖА

Література. [1,2,3,4,6,10].

Нехай на відрізку $[a,b]$ задаються таблицею значення деякої невідомої функції $y=\varphi(x)$ у $n+1$ точці

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_{n-1}$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_{n-1}$ | $y_n$ |

Треба знайти, як можна більш просту аналітичну залежність між $x$ і $y$, яка б точно або приблизно зображувала б функцію, яка задана таблицею, та дозволила б приблизно обчислювати значення функції в точках між вузлами $x_i \left(i=\overline{0,n}\right)$. Це і є задача інтерполювання функції. Дуже часто в ролі такої функції обирають многочлен степеня $\le n$, значення якого в точках $x_i \left(i=\overline{0,n}\right)$ співпадають зі значеннями $y_i \left(i=\overline{0,n}\right)$ функції $\varphi(x)$, тобто $p(x_i)=\varphi(x_i)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$. Як відомо [ 6 ], він має вигляд

$$P(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)}y_1+...$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-2})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)...(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)}y_{n-1}+ \qquad (2.1)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

Поліном (2.1) називають інтерполяційним поліномом Лагранжа.

*Приклад.* Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа для функції, яка задана таблицею

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | -4 |
| $y$ | 3 | -5 | 4 |

та обчислити значення функції у точці $x=1{,}5$.

Згідно з (2.1) отримуємо

$$P(x)=\frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1+4)}\cdot 3+\frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)}\cdot(-5)+\frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)}\cdot 4.$$

Фрагмент Mathcad-документа буде виглядати так:

$TOL:=1\cdot 10^{-4}$

Вихідні дані $\begin{matrix} x_0 := 1 & x_1 := 2 & x_2 := -4 \\ y_0 := 3 & y_1 := -5 & y_2 := 4 \end{matrix}$

Поліном Лагранжа

$$P(x) := \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot y_o + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \cdot y_1$$

Остаточно

$$P(x) = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30} simplify \rightarrow$$

$$-\frac{13}{10} \cdot x^2 - \frac{41}{10} \cdot x + \frac{42}{5}$$

$$P(1.9) = -4.0831$$

Для того щоб спростити вираз многочлена треба весь вираз справа до знака **:=** підкреслити синьою кутовою рамкою. Потім клацнути по слову simplify у меню Symbolic.

Але в багатьох випадках немає необхідності задовольняти умові $P(x_i) = \varphi(x_i) \quad (i = \overline{0,n})$, а ставиться таке завдання: треба по вихідних даних підібрати таку аналітичну залежність між $x$ і $y$, яка б мала простий вигляд і найкращим чином відображувала б загальний вигляд функції $\varphi(x)$ взагалі. Знайдену тепер функцію $f(x)$ називають *апроксимуючою*. Широко відомим методом розв’язання цієї задачі є метод найменших квадратів [5]. У випадку квадратичної апроксимації $f(x) = ax^2 + dx + c$ система рівнянь для знаходження коефіцієнтів $a,b,c$ має вигляд:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 y_i - a\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^4 - b\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 - c\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 = 0, \\ \sum\limits_{i=0}^{n} x_i y_i - a\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 - b\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 - c\sum\limits_{i=0}^{n} x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=0}^{n} y_i - a\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 - b\sum\limits_{i=0}^{n} x_i - c(n+1) = 0. \end{cases}$$

*Приклад.* Функцію, яка задана таблицею

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***x*** | 1 | 2 | 3 | 5 |
| ***y*** | 3 | 4 | 2,5 | 0,5 |

апроксимувати квадратичною функцією.

Mathcad-документ буде виглядати так:

$$TOL := 1 \cdot 10^{-4}$$

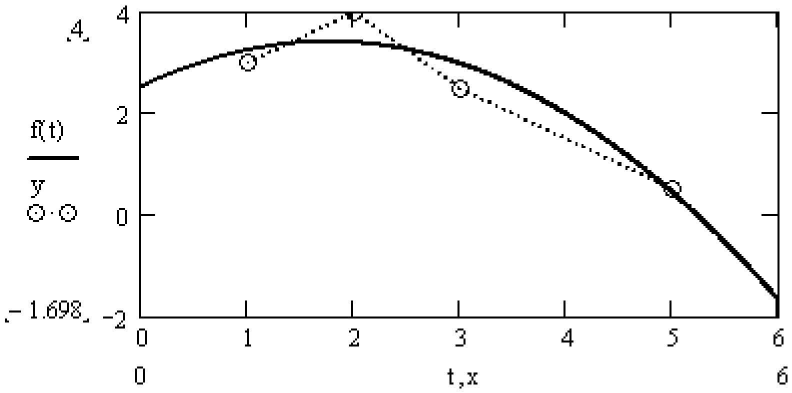
$$n := 3 \qquad x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} (x_i)^4 & \sum_{i=0}^{n} (x_i)^3 & \sum_{i=0}^{n} (x_i)^2 \\ \sum_{i=0}^{n} (x_i)^3 & \sum_{i=0}^{n} (x_i)^2 & \sum_{i-0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} (x_i)^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i & n+1 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} (x_i)^2 \cdot y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i \\ \sum_{i=0}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

$$Z = A^{-1} \cdot B \qquad Z = \begin{bmatrix} -0.284 \\ 1.002 \\ 2.514 \end{bmatrix}$$

$$f(t) := Z_0 \cdot t^2 + Z_1 \cdot t + Z_1 \cdot t + Z_2$$

Тепер будуємо графік апроксимуючої функції та функції, яка задана таблицею.




**Тема 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНА АПРОКСІМАЦІЯ.**

**РЯДИ ФУР'Є**

Література. [2,3,5,7,10].

Як відомо [5], просте гармонічне коливання описують за допомогою функції

$$x(t) = a\, sin(\omega t + \varphi), \qquad t \geq 0 \ ,$$

де сталі величини $\alpha, \omega, \varphi$ називають відповідно *амплітудою, циклічною частотою* та *початковою фазою коливання.* В результаті накладання простих гармонік з різними частотами можна дістати більш складні гармонічні коливання, більш складні періодичні рухи. А чи не можна всякий періодичний рух подати через прості гармоніки ? Виявилось, що можна, якщо ввести нескінченні суми простих гармонік [5]. Так от, якщо $f(x)$ — $2\pi -$періодична кусково-диференційовна на відрізку $[-\pi, \pi]$ функція, то тригонометричний ряд

$$\frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, cos\, nx + bn\, sin\, nx \tag{3.1}$$

на відрізку $[-\pi, \pi]$ збігається до цієї функції.

Пишуть так:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, cos\, nx + bn\, sin\, nx \ . \tag{3.2}$$

Причому сума $S(n)$ ряду (3.1) в усіх точках неперервності дорівнює значенню функції $f(x)$, тобто $S(x)=f(x)$, а якщо $x_0$ – точка розриву 1-го роду функції $f(x)$, то

$$S(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)}{2}.$$

Числа $a_0, a_n, b_n$ визначаються за формулами:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

$$n=1,2,...$$

і називаються коефіцієнтами Фур’є функції $f(x)$, а тригонометричний ряд (3.1) з такими коефіцієнтами називають рядом Фур’є. Якщо функція $f(x)$ парна на відрізку $[-\pi,\pi]$, то $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Отже, ряд Фур’є матиме вигляд

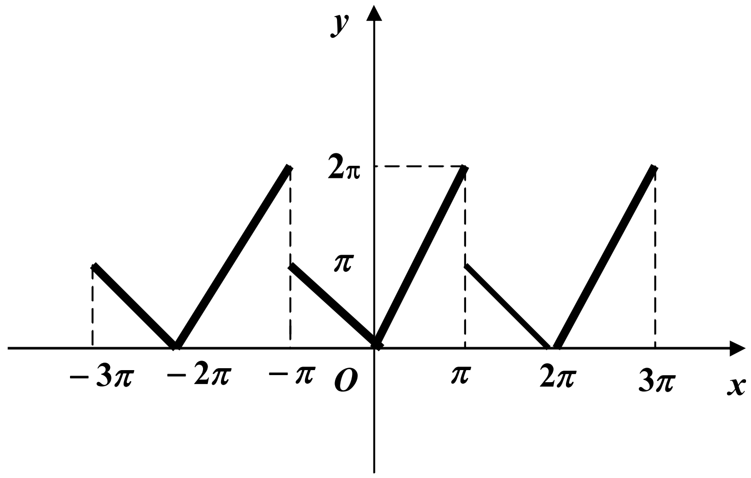
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx.$$

Аналогічно для непарної на інтервалі $[-\pi,\pi]$ функції $f(x)$ ряд Фур’є запишеться у вигляді

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} bn\sin nx,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n=1,2,...$$

*Приклад 1.* Розкласти (розвинути) в ряд Фур’є $2\pi$ – періодичну функцію, графік якої показано на рисунку.




*Розв'язок.* Спочатку запишемо рівняння заданої на $[-\pi,\pi]$ функції.

а) на $[-\pi;0]$: $\dfrac{y-\pi}{0-\pi}=\dfrac{x+\pi}{0+\pi}\Rightarrow y-\pi=-x-\pi,\Rightarrow y=-x$;

б) на $[0;\pi]$: $\dfrac{y-0}{2\pi-0}=\dfrac{x-0}{\pi-0}\Rightarrow y=2x$.

Таким чином функція $f(x)$ на відрізку $[-\pi,\pi]$ задається так:

$$f(x)=\begin{cases}-x, -\pi <\leq 0\\ 2x,\ 0<x\leq\pi.\end{cases}$$

А зараз запишемо **М-С**-документ з коментарем розвинення в ряд Фур'є цієї функції.

$TOL := 1\cdot 10^{-4}$

1. Задаємо функцію

$$f(x):=\left|\begin{array}{lll}-x & if & -\pi<x\leq 0\\ 2x & if & 0<x\leq\pi\end{array}\right. \qquad n:=50$$

2. Обчислюємо коефіцієнти Фур'є за формулами

$k := 0..n$

$$a_k := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot cos(k\cdot x)\,dx \qquad b_k := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot sin(k\cdot x)\,dx$$

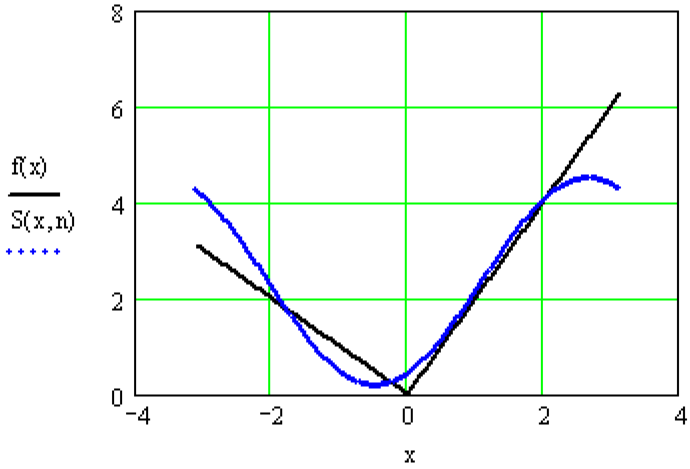
3. Обчислюємо частинні суми ряду

$$S(x,n):=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot cos(k\cdot x)+b_k\cdot sin(k\cdot x)\right)$$

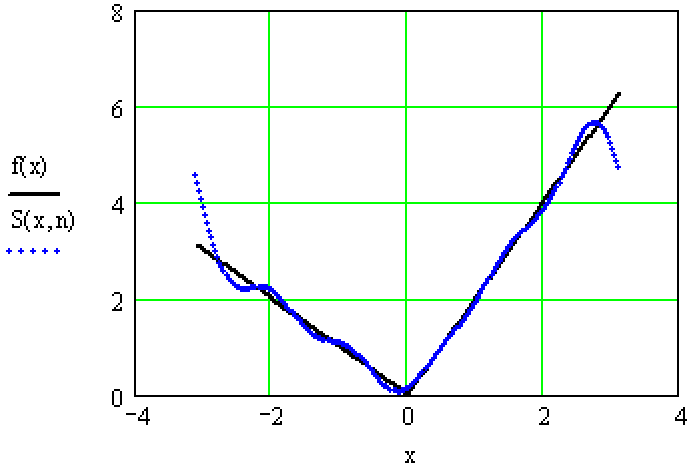
4. Будуємо графік функції та частинної суми на відрізку $[-\pi;\pi]$

$$x := -\pi,-\pi+\frac{\pi}{100}..\pi$$

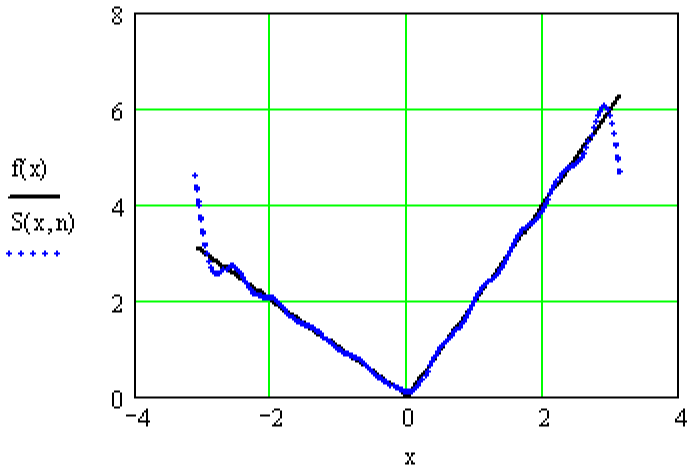
$$n=1$$




n := 5

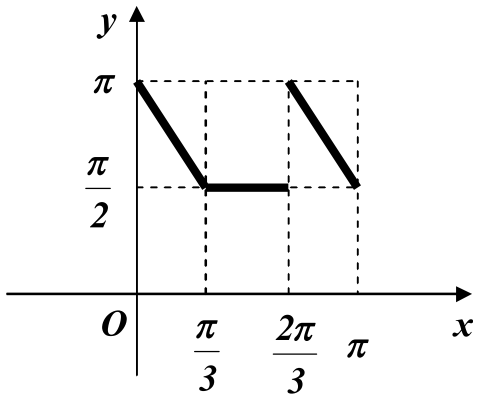



n := 10



Якщо графіки функцій $S(x,n)$ і $f(x)$ співпадають на відрізку $[-\pi;\pi]$, це означає, що завдання виконано вірно.

*Приклад 2.* Функцію, графік якої показано на рисунку, на відрізку $[0:\pi]$ розвинути в ряд Фур'є по косинусах (по синусах).




*Розв'язок.* Спочатку запишемо рівняння заданої функції на відрізку $[0:\pi]$.

а) на $\left[0:\frac{\pi}{3}\right]$.

$$\frac{y-\pi}{\frac{\pi}{2}-\pi}=\frac{x-0}{\frac{\pi}{3}-0}\Rightarrow\frac{y-\pi}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{x}{\frac{\pi}{3}}\Rightarrow 2y-2\pi=-3x\Rightarrow y=\frac{2\pi-3x}{2}.$$

б) на $\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$. $\qquad y=\frac{\pi}{2}$.

в) на $\left[\frac{2\pi}{3};-\pi\right]$. $\qquad y-\frac{\pi}{2}=k\left(x-\pi\right),\qquad k=-\frac{3}{2}$ і тому

$$y-\frac{\pi}{2}=-\frac{3}{2}\left(x-\pi\right)\Rightarrow y-\frac{\pi}{2}=-\frac{3}{2}x+\frac{3\pi}{2}\Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+2\pi .$$

Для розвинення заданої функції в ряд Фур'є за косинусами доповнимо її парно на відрізку $[-\pi;0]$ і тому її розвинення буде містити тільки члени з косинусами. Отже **М-С**-документ матиме вигляд:

$$TOL := 1\cdot 10^{-4}$$

$$n := 50$$

$$f(x) := \begin{vmatrix} \dfrac{2\cdot\pi - 3\cdot x}{2} & if & 0 < x \le \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\pi}{2} & if & \dfrac{\pi}{3} < x \le \dfrac{2\pi}{3} \\ -\dfrac{3}{2}x + 2\pi & if & \dfrac{2\pi}{3} < x \le \pi \end{vmatrix}$$

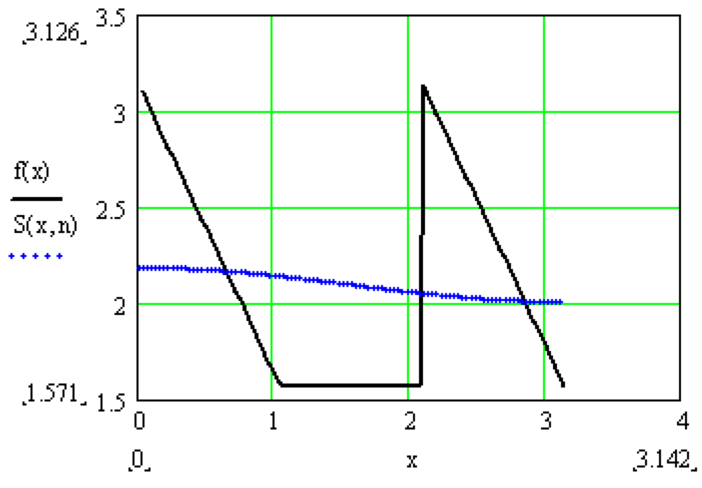
$$k := 0..n$$

$$a_k := \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(x)\cdot cos(k\cdot x)\,dx$$

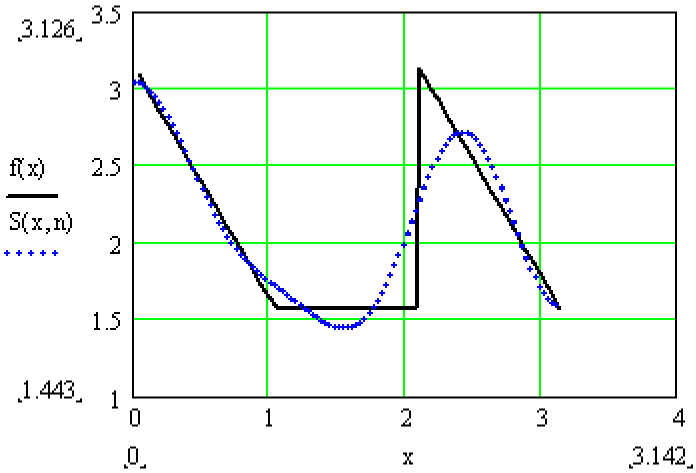
$$S(n,x) : \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cdot cos(k\cdot x)$$

$$x := 0, \frac{\pi}{1000}..\pi$$

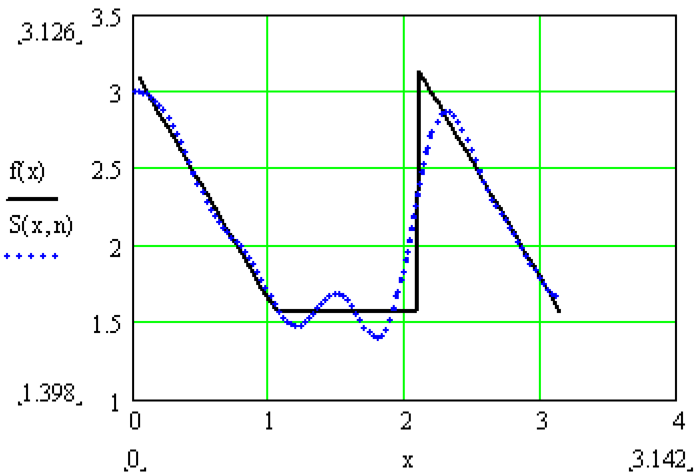
$$n = 1$$



$n = 5$




$n = 10$




## Тема 4. ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Література [2,3,4,6,10,12].

Чисельне диференціювання застосовується тоді, коли функцію не можна продиференціювати аналітично – наприклад, коли вона задана за допомогою таблиці, або вираз функції такий громіздкий, що користуватися виразом похідної для обчислень дуже важко. У цьому випадку задану функцію $f(x)$ апроксимують функцією $\varphi(x,a)$, яка легко обчислюється и приблизно покладають $f'(x) = \varphi'(x, a)$. Якщо ми працюємо у пакеті Mathcad , нам не треба хвилюватися про аналітичний вигляд виразу функції: пакет легко диференціює будь-яку функцію, будь-якого числа змінних. Наприклад, треба обчислити значення похідної функції $f(x) = 5x^2 + 3x + 18$ при $x = 1{,}5$, а також значення частинної похідної функції $g(x) = (x + y)^3$ по $y$ і мішаної похідної $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ при $x = 1{,}5$ і $y = 2$.

Фрагмент Mathcad-документа буде виглядати так:

$TOL := 1 \cdot 10^{-4}$

$x_1 = 1.5 \qquad y := 2 \qquad f(x) := 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 8$

$g(x, y) := (x + y)^3$

$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 10x + 3$

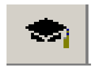
$f2(x, y) := \frac{d}{dx} g(x, y) \rightarrow 3 \cdot (x + y)^2$

$f3(x) := \frac{d}{dy} f_2(x, y) \rightarrow 6 \cdot x + 6 \cdot y$

$x := 1.5 \qquad y := 2 \qquad f1(x) = 18 \qquad f2(x, y) = 36.75$

Таким чином ми обчислили значення похідних $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1.5} = 18,$

$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=1.5 \\ y=2}} = 36.75 \qquad \left.\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1.5 \\ y=2}} = 21.$

У фрагменті обчислень, який навели, ми скористались операторами диференціювання. Щоб визвати цей оператор на робочий документ треба на панелі математичних інструментів пакета Mathcad клацнути по кнопці із зображенням невизначеного інтеграла $\int \frac{dy}{dx}$. Це кнопка математичного аналізу. Клацання по цій кнопці відкриває другу, додаткову панель, на якій розташовуються кнопки математичних операцій. Після клацання по кнопці з символом $\frac{d}{dx}$ на робочому документі з’являється заготовка оператора диференціювання з чорними квадратами знизу і справа. У чорний квадрат справа ми записуємо ім’я функції або вираз функції, яку диференціюємо, а у квадрат знизу – означення аргументу. Після цього нажимаємо клавішу Spase (пропуск) до тих пір, поки весь вираз не буде виділено синьою кутовою рамкою. Після цього клацаємо по кнопці  на панелі математичних символів і в панелі, яка відкривається знову клацаємо по кнопці $\bullet \to$ . Через деякий час поруч з обозначенням похідної з’являється результат диференціювання. Якщо на початку документа були вказані значення аргументів, то оператор диференціювання видає значення похідної в точці. При обчисленні похідних вищих порядків клацаємо по кнопці $\frac{d^n}{dx^n}$.

Як відомо [5], похідна функції, що задається параметрично рівняннями $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$, обчислюється за формулою

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

*Приклад.* Знайти похідну функції $x = t - \sin t, \qquad y = 1 - \cos t$ при $t = \frac{\pi}{4}$.

*Розв’язання у пакеті Mathcad.*

$$TOL := 1 \cdot 10^{-4}$$

$$x(t) := t - \sin(t) \qquad y(t) := 1 - \cos(t)$$

$$k(t) := \frac{\frac{d}{dt} y(t)}{\frac{d}{dt} x(t)} \to \frac{\sin(t)}{(1 - \cos(t))}$$

$$k\left(\frac{\pi}{4}\right) := 2.4142$$

Таким чином, ми визначили значення похідної $k(t)$ функції, яка задана параметрично у загальному вигляді $k(t) = \frac{\sin t}{1-\cos t}$, та у точці $t = \frac{\pi}{4}$: $\quad k\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.4142$.

## Тема 5. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Література [2,3,4,6,7,10,13].

Нехай треба обчислити інтеграл $I = \int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ неперервна на $[a;b]$ функція. Якщо первісна функції $f(x)$ не виражається в елементарних функціях, то користуються наближеним обчисленням визначених інтегралів, за допомогою якого можна знайти число $I$ з будь-якою точністю. Користуються при цьому різними формулами [7]. Наведемо найбільш розповсюджені і найбільш прості з них.

1. *Формули прямокутників:*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right),$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right),$$

де $y_k = f(x_k)$, $k := 0,1,\ldots,n-1$, $n-$ кількість рівних частин, на які розбивається відрізок $[a;b]$.

2. *Формула трапецій:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots y_{n-1}\right).$$

3. *Формула парабол або формула Сімпсона:*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(\left(y_0 + y_n\right) + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots y_{n-2}\right)\right).$$

Число $n$ у цій формулі обов'язково повинно бути парним.

*Приклад.* Обчислити приблизно $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ за формулами прямокутників, трапецій та Сімпсона.

*Розв'язок.* У даному випадку $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ на відрізку $[0;1]$.

Розбиваємо відрізок $[0;1]$ на 10 рівних частин і значення аргументу та функції заносимо в таблицю.

| $x$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0,9901 | 0,9615 | 0,9174 | 0,8621 | 0,8000 | 0,7353 | 0,6711 | 0,6098 | 0,5525 | 0,5000 |

1. Формули прямокутників:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{10}\cdot(1+0{,}9901+0{,}9615+\ldots+0{,}5525)=0{,}8100.$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{10}\cdot(0{,}9901+0{,}9615+\ldots+0{,}5000)=0{,}7600.$$

2. Формула трапецій

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{10}\left(\frac{1+0{,}5}{2}+0{,}9901+0{,}9615+\ldots+0{,}5525\right)=0{,}7850.$$

3. Формула Сімпсона

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{60}\cdot\Big(1+0{,}5+4\ (0{,}9901+0{,}9174+0{,}8000+0{,}6711+0{,}5525\ )+$$

$$+2\cdot(\ 0{,}9615+0{,}8621+0{,}7353+0{,}6098\ )\Big)=0{,}7854.$$

Точне значення інтеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=arctgx\ \Big|_0^1=arctg1-arctg0=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7854.$$

У пакеті Mathcad невизначений та визначений інтеграли обчислюються за допомогою спеціальних операторів. Для того щоб знайти невизначений інтеграл клацнемо спочатку по вільному місцю у робочому документі. Потім на панелі математичних інструментів клацнемо по кнопці $\int \frac{dy}{dx}$. Після клацання по цій кнопці відкривається нова панель, про яку ми вже казали раніш. Далі клацаємо по кнопці із зображенням $\int$ на цій панелі і в документі з'являється символ інтеграла з чотирма квадратами справа. У ці квадрати заносимо вираз підінтегральної функції, або її означення, та змінну інтегрування. Далі натискуємо клавішу Spase (пропуск) до тих пір, поки весь вираз не буде виділено синьою кутовою рамкою. Далі для отримання результату робимо як і при обчисленні похідних. При обчисленні визначеного інтеграла клацаємо по кнопці $\int_a^b$.

*Приклади*. Знайти $\int \frac{dx}{1+x^2}$, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Mathcad-документ має вигляд:

$$TOL := 10^{-4}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} \rightarrow arctg(x)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \rightarrow \frac{\pi}{4} = 0.7854$$

## Наближене обчислення подвійного інтеграла

Нехай треба обчислити $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, де область $D$ у прямокутній системі координат задається парою нерівностей:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le \varphi_2(x). \end{cases}$$

Як відомо [5], подвійний інтеграл обчислюється за допомогою зведення його до так званого повторного інтеграла – двох звичайних визначених інтегралів. Тоді

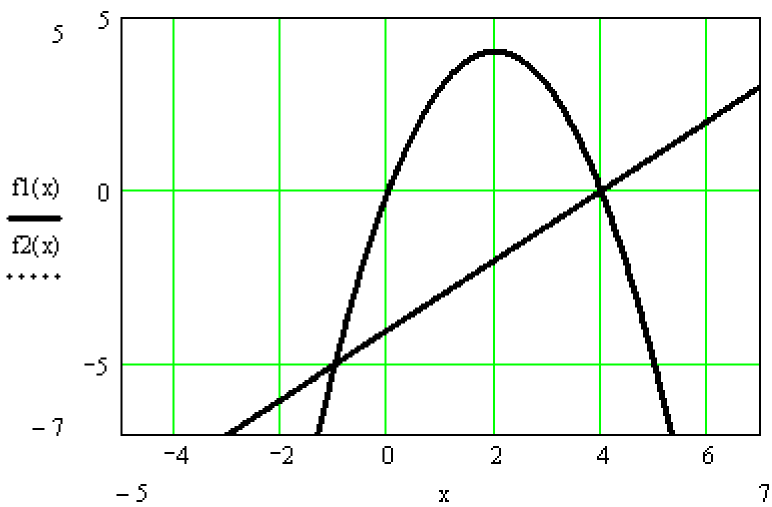
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy .$$

Спочатку обчислюється інтеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ по змінній $y$ при сталому $x$. Після інтегрування в межах від $a$ до $b$ отримуємо число. Коли первісна не виражається в елементарних функціях, користуються наближеним обчисленням.

Покажемо, як це робиться за допомогою пакета Mathcad.

*Приклад.* Нехай треба обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(x^2 + xy\right) dxdy$, де область $D$ обмежена лініями $y = 4x - x^2$, $y = x - 4$.

*Розв'язок.* Спочатку у пакеті Mathcad побудуємо графіки функцій $f_1(x) = 4x - x^2$ та $f_2(x) = x - 4$. Потім знайдемо точки їх перетину



Тепер задаємо область інтегрування $\boldsymbol{D}$ парою нерівностей

$$\boldsymbol{D:}\begin{cases}-1 \le x \le 4 \\ x-4 \le y \le 4x - x^2.\end{cases}$$

Повторний інтеграл буде виглядати так:

$$I = \int_{-1}^{4} dx \int_{x-1}^{4x-x^2} \left(x^2 + xy\right) dy\,.$$

Залишається тільки обчислити його за допомогою пакета. Спочатку наберемо на клавіатурі символ $\boldsymbol{I :=}$. Після цього на панелі математичних інструментів клацаємо по кнопці з зображенням інтеграла і вже потім у заново відкритій панелі клацаємо по кнопці визначеного інтеграла. В документі після знака $":="$ з’являється зображення визначеного інтеграла, в який ми вносимо границі змінної $"x"$, а замість підінтегральної функції знову вносимо символ визначеного інтеграла. У другий інтеграл вносимо границі інтегрування змінної $"y"$ та підінтегральну функцію, а також диференціали змінних інтегрування: спочатку по $dy$, потім по $dx$. Вони в Mathcad-документі записуються в зворотному порядку.

Отже маємо:

$TOL := 1 \cdot 10^{-4}$

$$I := \int_{-1}^{4} \int_{x-4}^{4 \cdot x - x^2} \left(x^2 + xy\right) dy\,dx$$

$I = 98.9583$

## *Завдання до контрольної роботи № 1*

1. **Задача.** Многочлен $f(x)$ поділити на різницю **(x-c).** Знайти частку та остачу :

   а) виконавши ділення безпосередньо (у “стовпчик”);

   б) виконавши ділення за схемою “Горнера”;

   в) використовуючи теорему Безу.

1. $f(x)=6x^4-2x^3+3x^2+5,\qquad c=3$.
2. $f(x)=4x^5-2x^3+3x^2+2x-3,\qquad c=-2$.
3. $f(x)=3x^4-2x^2+4x+1,\qquad c=3$.
4. $f(x)=3x^6-4x^5+x^3+3x^2-7,\qquad c=2$.
5. $f(x)=5x^4-3x^3+2x^2+5,\qquad c=-3$.
6. $f(x)=7x^5-2x^3+4x^2+3x-1,\qquad c=-2$.
7. $f(x)=8x^6+2x^5-3x^3+2x-2,\qquad c=2$.
8. $f(x)=3x^6+2x^4-3x^2+1,\qquad c=-2$.
9. $f(x)=8x^5-2x^4-3x^2+5x+1,\qquad c=-2$.
10. $f(x)=3x^5+5x^4-2x^3-3x^2+5,\qquad c=2$.

**2. Задача.** Обчислити всі корені многочлена

а) за допомогою функції $\boldsymbol{root(f(x),x)}$;

б) за допомогою функції $\boldsymbol{polyroot(v,x)}$;

в) за допомогою функції ***solve*** ;

г) за допомогою конструкції ***Given...Find*** .

1. $x^6+2{,}5x^5-10x^4+10x^3-9x^2+15x-17{,}5=0$.
2. $x^5-2{,}8x^4+3x^3-3x^2+4{,}4x-5=0$.
3. $x^6+6{,}5x^5-14x^4+14x^3-17x^2+21x-22{,}5=0$.
4. $x^6+10x^5-24x^4+28x^3-29x^2+39x-45=0$.

5. $x^5 - 1{,}8x^4 + 1{,}9x^3 - 2{,}3x^2 + 2{,}8x - 3 = 0$.

6. $x^5 - 3x^4 + 3{,}2x^3 - 3{,}5x^2 + 4{,}6x - 5 = 0$.

7. $x^6 + 10{,}5x^5 - 18x^4 + 22x^3 - 17x^2 + 31x - 37{,}5 = 0$.

8. $x^6 + 7{,}5x^5 - 18x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 19x - 22{,}5 = 0$.

9. $x^5 - 2x^4 + 2{,}9x^3 - 2{,}44x^2 + 4{,}2x - 5 = 0$/

10. $x^6 + 9x^5 - 18x^4 + 19x^3 - 19x^2 + 30x - 35 = 0$.

**3. Задача.** Розв'язати систему рівнянь:

а) матричним засобом $\left(X := A^{-1} \cdot B\right)$;

б) за допомогою функції $\boldsymbol{lsolve}(\ldots)$;

в) за допомогою конструкції ***Given...Find***;

г) записати формули Крамера та знайти одну невідому $x_2$ за допомогою визначників.

1. $$\begin{cases} 2x_1 + 1{,}2x_2 - 2x_3 + 2{,}1x_4 + x_5 = 3 \\ 1{,}2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2{,}8x_4 + 4x_5 = 4, \\ 3x_1 + 1{,}2x_2 + x_3 + 1{,}6x_4 + x_5 = 1, \\ 1{,}5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1{,}4x_4 + 1{,}25x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2{,}1x_3 + 1{,}5x_4 + 8x_5 = -8. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2x_1 + 1{,}2x_2 - 2x_3 + 2{,}1x_4 - 2x_5 = 3, \\ 1{,}25x_1 + 4x_2 + 2{,}8x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 13, \\ 4{,}2x_1 + x_2 + 1{,}6x_3 + x_4 + 3x_5 = 2{,}5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4{,}4x_4 + 1{,}25x_5 = 6, \\ -2x_1 + x_2 + 2{,}1x_3 + 1{,}5x_4 + 8x_5 = -8. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 4x_1 + 1{,}2x_2 + 2{,}3x_4 + x_5 = 7, \\ 1{,}6x_1 + 4x_2 + x_3 + 2{,}4x_4 + 4x_5 = 6, \\ 3x_1 + 1{,}6x_2 + x_3 + 1{,}6x_4 + x_5 = 2, \\ 3{,}5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2{,}2x_4 + 1{,}75x_5 = 7, \\ 5x_1 + x_2 + 2{,}3x_3 + 0{,}5x_4 + 8x_5 = -8. \end{cases}$$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 1{,}2x_2 - 2x_3 + 2{,}1x_4 = 3, \\ 1{,}2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2{,}8x_4 + 4x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2{,}2x_2 + x_3 + 1{,}6x_4 + x_5 = 1{,}5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2{,}4x_4 + 1{,}25x_5 = 4, \\ x_2 + 2{,}1x_3 + 1{,}5x_4 + 8x_5 = -8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 1{,}2x_2 - x_3 + 2{,}2x_4 = 5, \\ 1{,}2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2{,}6x_4 + 4x_5 = 8, \\ 3x_1 + 2{,}4x_2 + x_3 + 1{,}6x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2{,}8x_4 + 1{,}5x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2{,}2x_3 + x_4 + 8x_5 = -8. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x_1 + 1{,}2x_2 + 2{,}3x_4 = 7, \\ 1{,}6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2{,}4x_4 + 4x_5 = 9, \\ 3x_1 + 2{,}6x_2 + x_3 + 1{,}6x_4 + x_5 = 2{,}5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3{,}2x_4 + 1{,}75x_5 = 8, \\ 6x_1 + x_2 + 2{,}3x_3 + 0{,}5x_4 + 8x_5 = -8. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + 1{,}2x_2 - 2x_3 + 2{,}1x_4 - x_5 = 3, \\ 1{,}2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2{,}8x_4 + 4x_5 = 10, \\ 3x_1 + 3{,}2x_2 + x_3 + 1{,}6x_4 + x_5 = 1, \\ 2{,}5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3{,}4x_4 + 1{,}25x_5 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 2{,}1x_3 + 1{,}5x_4 + 8x_5 = -8. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 + 1{,}2x_2 - x_3 + 2{,}2x_4 - x_5 = 5, \\ 1{,}4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2{,}6x_4 + 4x_5 = 11, \\ 3x_1 + 3{,}4x_2 + x_3 + 1{,}6x_4 + x_5 = 2{,}5, \\ 3{,}5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3{,}8x_4 + 1{,}5x_5 = 7, \\ x_1 + x_2 + 2{,}2x_3 + x_4 + 8x_5 = -8. \end{cases}$

9. $$\begin{cases} -4x_1+1{,}2x_2+2{,}3x_4-x_5=7, \\ 1{,}6x_1+6x_2+3x_3+2{,}4x_4+4x_5=12, \\ 3x_1+3{,}6x_2+x_3+1{,}6x_4+x_5=3, \\ 4{,}5x_1+2x_2+4x_3+4{,}2x_4+1{,}75x_5=9, \\ 3x_1+x_2+2{,}3x_3+0{,}5x_4+8x_5=-8. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} 5x_1+1{,}2x_2-2x_3+2{,}4x_4+x_5=9, \\ 1{,}8x_1+5x_2+x_3+2{,}2x_4+4x_5=7, \\ 3x_1+1{,}8x_2+x_3+1{,}6x_4+x_5+2{,}5, \\ 4{,}5x_1+2x_2+4x_3+2{,}6x_4+2x_5=9, \\ 7x_1+x_2+2{,}4x_3+9x_5=-8. \end{cases}$$

**4. Задача.** Розв’язати систему нелінійних рівнянь за допомогою конструкції ***Given...Find*** .

1. $$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=4, \\ y+x=0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} (x-2)^2+(y+2)^2=4, \\ x+y=1 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} (x-3)^2+(y+3)^2=9, \\ x+y=2. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} y=x^2-4x, \\ x+y=1. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} y=4x-x^2 \\ x+y=4. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ (x-1)^2+y^2=1. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=4, \\ (x+1)^2+y^2=1. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} y=-x^2, \\ x^2+(y+1)^2=1. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} y=x^2, \\ x^2+(y-1)^2=1. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} (y-1)^2+x^2=9, \\ x=y-1. \end{cases}$$

**5. Задача.** Записати Mathcad-документ та побудувати графіки функцій.

1. а) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \quad t \in [0;4\pi]; \end{cases}$ б) $\rho = 1 - \sin\varphi, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{6}\right].$

2. а) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \quad t \in [0;2\pi]; \end{cases}$ б) $\rho = 3(1 + \sin\varphi), \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{6};0\right].$

3. а) $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t, \quad t \in [0;2\pi]; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{2}\, e^{\varphi}, \quad \varphi \in [0;2\pi].$

4. а) $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 2\sin t, \quad t \in [0;2\pi]; \end{cases}$ б) $\rho = 5(1 - \cos\varphi), \quad \varphi \in [0;\pi].$

5. а) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\cos t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \quad t \in [0;2]; \end{cases}$ б) $\rho = 4(1 - \sin\varphi), \quad \varphi \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right].$

6. а) $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \quad t \in [0;2\pi]; \end{cases}$ б) $\rho = 12e^{\frac{12\varphi}{5}}; \quad \varphi \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right].$

7. а) $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \quad t \in [0;\pi]; \end{cases}$ б) $\rho = 2(1 - \cos\varphi), \quad \varphi \in \left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right).$

8. а) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \quad t \in [0;\pi]; \end{cases}$ б) $\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$

9. а) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]; \end{cases}$ б) $\rho = 8\cos\varphi, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$

10. а) $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \quad t \in [0;\pi]; \end{cases}$ б) $\rho = 2\sin\varphi, \quad \varphi \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right].$

**6. Задача.** Для функції, яка задана таблицею, побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа:

а) записати загальний вираз полінома;

б) побудувати графік функції, яка задана таблицею;

в) побудувати графік полінома Лагранжа;

г) визначити значення полінома Лагранжа в одній вузловій точці та в будь-якій точці між вузлами;

д) апроксимувати дану функцію квадратичною та записати Mathcad-документ реалізації.

1.

| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0 | -2 | -1 | 3 |

2.

| $x_i$ | -2 | -1 | 0 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | -1 | -2 | 2 | 1 |

3.

| $x_i$ | -1,5 | -0,5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | 1 | 0 | -1 |

4.

| $x_i$ | -2,5 | -1 | -0,5 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 4 | 2 | 1 | 0 |

5.

| $x_i$ | -1,5 | -0,5 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0 | 2 | 1 | 4 |

6.

| $x_i$ | -3 | -1,7 | -0,9 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |

7.

| $x_i$ | -2 | -1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3 | 2 | 0 | 1 |

8.

| $x_i$ | -2 | -1 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | -1 | 0 | 4 |

9.

| $x_i$ | -3,5 | -2,5 | -1 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | -3 | -2,5 | -1 | 0 |

10.

| $x_i$ | -3 | -1,5 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 4 | 0 | -1 | -2 |

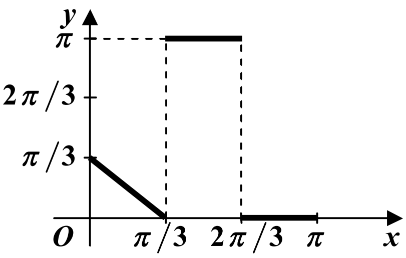
**7. Задача.** Функцію, графік якої зображено на рисунку, розвинути в ряд Фур’є:

а) по синусах для парних номерів варіанта;

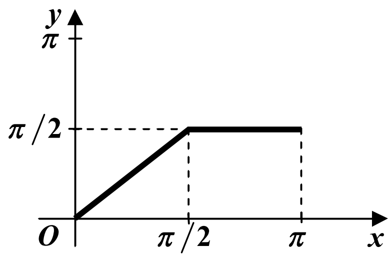
б) по косинусах для непарних номерів варіанта.

Записати Mathcad-документ та побудувати графіки функції, яка задана, а також частинної суми ряду Фур’є для $n = 5$ та $n = 10$, де $n$ – кількість членів частинної суми ряду Фур’є.

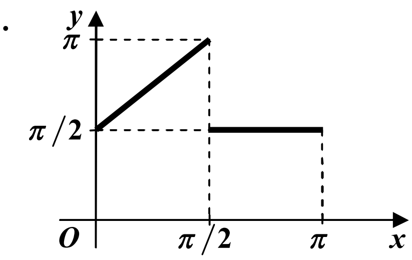
**1.**



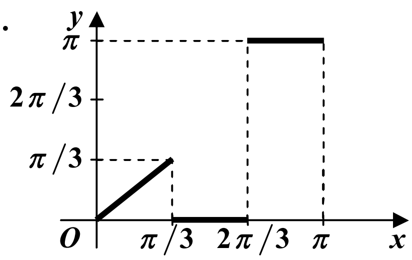

**2.**



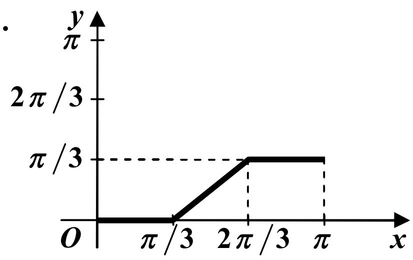

**3.**



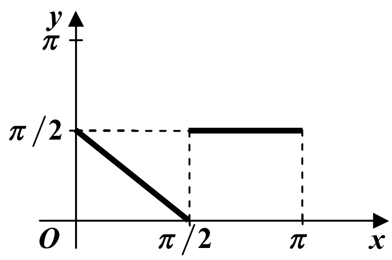

**4.**



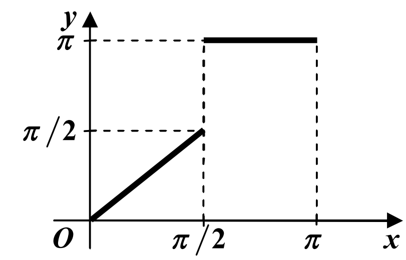

**5.**



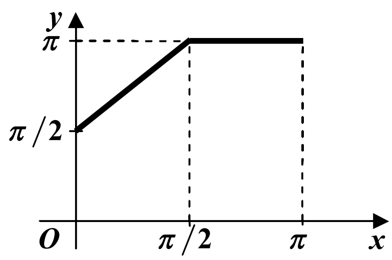

**6.**



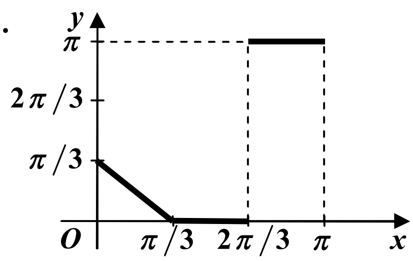

**7.**



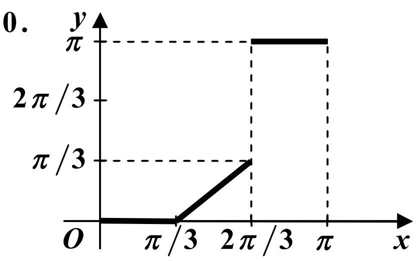

**8.**




**9.**




**10.**



**8. Задача.** Знайти похідні даних функцій. Записати Mathcad-документ.

1. а) $y=\sqrt{x}\,ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right)-\sqrt{x+2}$ ; б) $\begin{cases} x=\dfrac{3t^2+1}{3t^3} \\ y=sin\left(\dfrac{t^3}{3}+t\right). \end{cases}$

2. а) $y=ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-5x^4}}$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=tg\sqrt{t+1}. \end{cases}$

3. а) $y=2\sqrt{x}+4\,ln\left(2+\sqrt{x}\right)$; б) $\begin{cases} x=arc\,sin(sin\,t), \\ y=arc\,cos(cos\,t). \end{cases}$

4. а) $y=ln\left(x+\sqrt{x+1}\right)$ ; б) $\begin{cases} x=ctg\left(2e^t\right), \\ y=ln\left(tge^t\right). \end{cases}$

5. а) $y=ln^3(1+cos\,x)$ ; б) $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}. \end{cases}$

6. а) $y=sin\sqrt{3x}+\dfrac{1+sin^3 3x}{3+cos\,6x}$; б) $\begin{cases} x=ln(ctgt), \\ y=\dfrac{1}{cos^2 t}. \end{cases}$

7. а) $y=cos(ln\,2x)-\dfrac{1+cos^2 3x}{3-sin\,6x}$; б) $\begin{cases} x=arctg\left(e^{\frac{t}{2}}\right), \\ y=\sqrt{e^t+1}. \end{cases}$

8. а) $y = ln\left(tg\frac{x}{3}\right) + \frac{1+sin^2 4x}{4-cos 8x}$; б) $\begin{cases} x = ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

9. а) $y = \frac{cos(ctg 3x)\cdot cos^2 14x}{28\cdot sin 28x}$; б) $\begin{cases} x = (arc\cos t)^2, \\ y = \frac{cos t}{sin^2 t}. \end{cases}$

10. а) $y = \sqrt[7]{tg\cos 2x} + \frac{sin^2 27x}{27 cos 54x}$; б) $\begin{cases} x = arccos\frac{1}{t}, \\ y = \sqrt{t^2-1} + arcsin\frac{1}{t}. \end{cases}$

**9. Задача.** Знайти значення частинних похідних $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ у точці $M(x_0, y_0)$. Записати Mathcad-документ.

1. $Z = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}, \quad M(2;3)$.
2. $Z = ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right), \quad M(3;3)$.
3. $Z = arctg\frac{x+y}{1-xy}, \quad M(1;4)$.
4. $Z = sin^2(2x+3y), \quad M(2;5)$.
5. $Z = e^{x\cdot e^y}, \quad M(5;6)$.
6. $Z = y^{ln\, x}, \quad M(7;9)$.
7. $Z = arc\ sin(xy), \quad M(1;6)$.
8. $Z = e^{xy^2}, \quad M(1;6)$.
9. $Z = ln\left(x^2+y^2\right), \quad M(6;2)$.
10. $Z = y^{ln\, x}, \quad M(7;9)$.

**10. Задача.** Обчислити наближено за формулою Сімпсона та за допомогою пакета Mathcad такі інтеграли:

1. $\int_0^{3\pi/2} \sqrt{4-0{,}5\, sin^2 x}\, dx$.

6. $\int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{sin^2 x}{4}}}$.

2. $\int\limits_0^{10} e^{-x^2}\,dx$.

3. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}\,dx$.

4. $\int\limits_0^{10} \frac{dx}{\left(t^2+2\right)\left(t^2+4\right)}$.

5. $\int\limits_2^{12} \frac{dx}{\sqrt{24+12x+2x^2+x^3}}$.

7. $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)\left(16+x^2\right)^3}}$

8. $\int\limits_0^{7\pi/4} x^3 \sin^5 x\,dx$.

9. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx$ .

10. $\int\limits_0^{10} \frac{e^{-x^2}\,dx}{1+x}$.

## КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

### Тема 1. ЧИСЛЕННИЙ РОЗВЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

**Література: [2,4,6,10]**

**Найпростішим звичайним диференціальним є рівняння першого порядку**

$$y' = f(x, y). \tag{1.1}$$

**Основна задача для цього рівняння є задача Коші [6]: знайти розв'язок (1)**

$$y = y(x), \tag{1.2}$$

**який задовольняє умові**

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.3}$$

**Умову (1.3) називають початковою умовою. Геометрично це означає, що ми повинні знайти інтегральну криву $y = y(x)$, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$.**

**Найпростішим численним методом інтегрування диференціального рівняння є метод Ейлера. Згідно з цим методом відрізок $[a;b]$, на якому відшукують розв'язок рівняння (1.1), поділяють на $n$ відрізків однакової довжини $h$ так, що**

$$x_i = x_0 + ih; \qquad (i = 0,1,2,...,n), \tag{1.4}$$

**де $x_0 = a$.**

**Похідну $y'$ в точці $"i"$ замінюємо скінченими різницями**

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \tag{1.5}$$

**і з (1.1) отримуємо**

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i). \tag{1.6}$$

**Вираз (1.6) дає можливість отримати значення функції у всіх точках $x_i$ $\left(i = \overline{0,n}\right)$ відрізка $[a;b]$.**

**Метод Ейлера не дуже точний, накопичує помилки, але він дає уявлення про численну реалізацію задачі Коші для диференціального рівняння. Найбільш точними є методи Рунге-Кутта, метод Адамса та інші. Багато цих методів реалізовано у пакеті Mathcad . Розглянемо застосування деяких стандартних функцій для вирішення задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем [1]. Нагадаємо, що часто необхідно знайти функції $y = y_1(x), y_2 = y_2(x), ..., y_n = y_n(x)$ , які задовольняють декільком диференціальним рівнянням, які містять аргумент $x$, функції $y_1, y_2, ..., y_n$ та їх похідні. У даному випадку говорять, що дані диференціальні рівняння утворюють систему диференціальних рівнянь. Система рівнянь**

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{1.7}$$

**називається *нормальною* системою.**

**Задача Коші для такої системи формулюється так: знайти функції $y_1, y_2, ..., y_n$, які задовольняють систему (1.7) і початковим умовам**

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, ..., y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{1.8}$$

**Так от нагадуємо, що всі функції для розв'язку диференціальних рівнянь та їх систем у пакеті Mathcad призначені для *нормальної* системи диференціальних рівнянь. Такими функціями є функції $rkfixed(\bar{y}, x_1, x_2, n, \bar{F})$, $Rkadapt(\bar{y}, x_1, x_2, n, \bar{F})$ та інші [8].**

***Приклад.* На відрізку $[0;3]$ знайти наближений розв'язок рівняння $y'' = e^{-xy}$, який задовольняє початковим умовам $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$ та побудувати графік цього розв'язку.**

***Розв'язок.*** **Спочатку перейдемо від диференціального рівняння $y'' = e^{-xy}$ до нормальної системи другого порядку. Для цього позначимо $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$. Тоді отримаємо систему**

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = e^{-xy_1}, \end{cases}$$

**де** $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$

**Фрагмент Mathcad-документа розв'язку наданий нижче.**

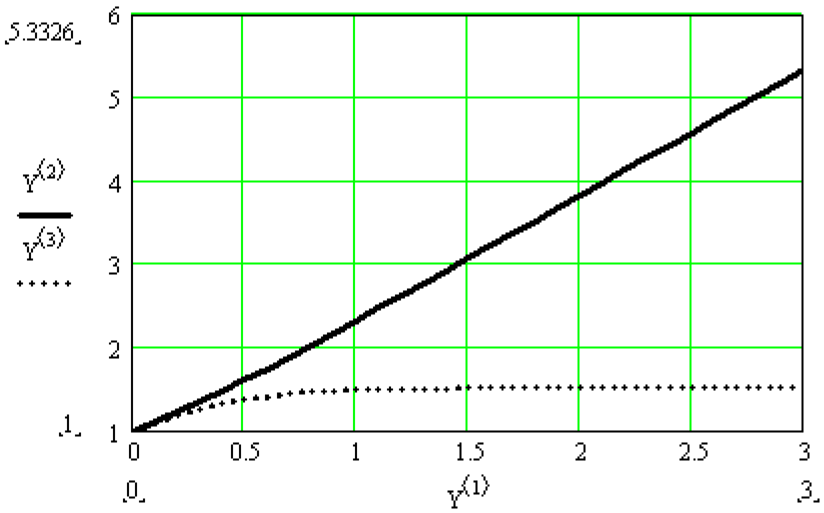
$ORIGIN := 1$

$F(x, y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ exp(-x \cdot y_1) \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$Y := rkfixed(y, 0, 3, 30, F)$

Y =

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0.1 | 1.1048 | 1.0948 |
| 3 | 0.2 | 1.2186 | 1.1788 |
| 4 | 0.3 | 1.3402 | 1.2515 |
| 5 | 0.4 | 1.4685 | 1.3127 |
| 6 | 0.5 | 1.6024 | 1.3628 |
| 7 | 0.6 | 1.7407 | 1.4028 |
| 8 | 0.7 | 1.8826 | 1.4336 |
| 9 | 0.8 | 2.0272 | 1.4568 |
| 10 | 0.9 | 2.1738 | 1.4736 |
| 11 | 1 | 2.3218 | 1.4855 |
| 12 | 1.1 | 2.4708 | 1.4936 |
| 13 | 1.2 | 2.6204 | 1.499 |
| 14 | 1.3 | 2.7705 | 1.5025 |
| 15 | 1.4 | 2.9209 | 1.5046 |
| 16 | 1.5 | 3.0714 | 1.5059 |




**У наведеній функції *rkfixed* $y$ – вектор початкових умов; 0 – початок відрізка інтегрування; 3 – кінець відрізка інтегрування; 30 – кількість точок, у яких знаходимо значення функції $y_i$; $F$ – вектор правих частин системи (9).**

**Якщо треба розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку, то вектор-функції $F(x,y)$ та $y$ будуть мати по одному елементу.**

***Приклад.* На відрізку $[0,\pi]$ знайти приблизний розв'язок рівняння $y' = sin(xy)$, який задовольняє умові $y(0) = 1$. Побудувати графік отриманого розв'язку.**

**Mathcad-документ розв'язку задачі наданий нижче.**

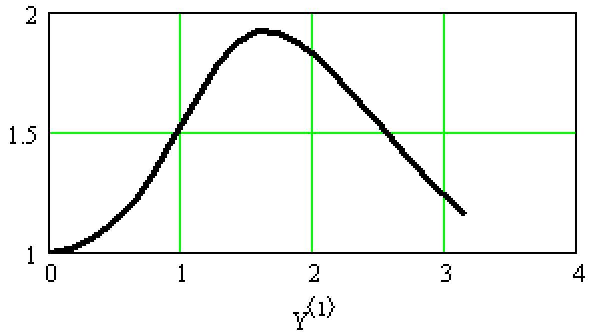
$ORIGIN := 1$

$F(x,y) := sin(x \cdot y_1) \qquad y_1 = 1$

$Y := rkfixed(y, 0, \pi, 20, F)$

Y =

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0.1571 | 1.0124 |
| 3 | 0.3142 | 1.0501 |
| 4 | 0.4712 | 1.1148 |
| 5 | 0.6283 | 1.2082 |
| 6 | 0.7854 | 1.3305 |
| 7 | 0.9425 | 1.477 |
| 8 | 1.0996 | 1.6329 |
| 9 | 1.2566 | 1.7739 |
| 10 | 1.4137 | 1.8742 |
| 11 | 1.5708 | 1.9208 |
| 12 | 1.7279 | 1.9162 |
| 13 | 1.885 | 1.8722 |
| 14 | 2.042 | 1.8015 |
| 15 | 2.1991 | 1.7145 |
| 16 | 2.3562 | 1.6189 |




## Тема 2. ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

**Література [2,4,5,6,10]**

**Найпростіша двоточкова крайова задача формулюється так: знайти функцію $y = y(x)$, яка задовольняє диференціальному рівнянню другого порядку**

$$y'' = f(x, y) \tag{2.1}$$

**і яка отримує при $x = a$ та $x = b$ $(a < b)$ надані значення**

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B. \tag{2.2}$$

**Геометрично це означає, що ми повинні знайти інтегральну криву диференціального рівняння (2.1) яка проходе через точки $M_1(a, A)$ та $M_2(b, B)$. Умови (2.2) можуть задаватися по-різному.**

**Наприклад,** $y'(a) = A, \qquad y'(b) = B$

**або**

$$y(a) = A, \qquad y'(b) = B.$$

**Найпростішим методом розв'язку цієї задачі є метод зведення її до системи скінченно-різницевих рівнянь [6] .**

**Покажемо на прикладі, як це робиться за допомогою пакета** *Mathcad***.**

***Приклад.* Розв'язати методом скінчених різниць диференціальне рівняння**

$$2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 13x^2 + 1$$

**на відрізку $[0;4]$ , де $y(0) = 1, \quad y(4) = 65$. Щоб спростити обчислення, розіб'ємо відрізок $[0;4]$ на чотири рівних відрізка довжиною $h = 1$. Точки $x = 0,1,2,3,4$ візьмемо як вузли та замінимо наше рівняння скінченно-різницевим**

$$2x_i^2 \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i = 13x_i + 1, \qquad y_0 = 1, \qquad y_4 = 65.$$

**А зараз за допомогою пакета** *Mathcad* **сформуємо систему трьох рівнянь для визначення $y_1, y_2, y_3$ та розв'яжемо її за допомогою конструкції *Given...Find* .**

**Фрагмент** *Mathcad* **– документа буде виглядати так:**

$i := 1 \qquad h := 1 \qquad x_0 := 0 \qquad x_i := x_0 + i \cdot h$

$$2 \cdot (x_i)^2 \cdot \frac{y_{i+1} - 2 \cdot y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i = 13 \cdot x_i + 1$$

**Підкресливши останній вираз рівняння кутовою рамкою справа, клацнемо по кнопці $\rightarrow$ у меню** *Symbolics***. Справа від стрілки з'явиться рівняння**

$$2 \cdot y_2 - 3 \cdot y_1 + 2 \cdot y_0 = 14.$$

**Скопіюємо його та запишемо в окремому місці документа після службового слова** *Given.* **Далі замінимо на початку** *Mathcad* **– документа вираз $i := 1$ на $i := 2$. Відразу ж справа від стрілки з'явиться рівняння**

$$8 \cdot y_3 - 15 \cdot y_2 + 8 \cdot y_1 = 27.$$

**Його теж запишемо після службового слова *Given*. Тепер замінимо**
$i := 2$
**на** $i := 3$ **і отримаємо рівняння**

$$18\cdot y_4 - 35\cdot y_3 + 18\cdot y_2 = 40\,.$$

**Таким чином, ми отримаємо систему *Given***

$$2\cdot y_2 - 3\cdot y_1 + 2\cdot y_0 = 14$$

$$8\cdot y_3 - 15\cdot y_2 + 8\cdot y_1 = 27$$

$$18\cdot y_4 - 35\cdot y_3 + 18\cdot y_2 = 40\,.$$

**Тепер у цих рівняннях замінимо** $y_0$ **на** $1$, **а** $y_4$ **на 65. Остаточно маємо систему, яку розв'язуємо.**

*Given*

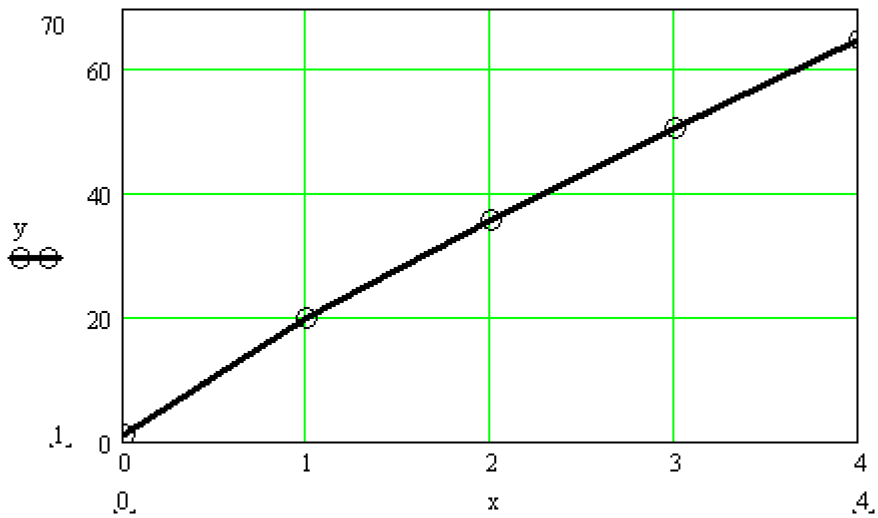
$2\cdot y_2 - 3\cdot y_1 + 2\cdot y_0 = 14$

$8\cdot y_3 - 15\cdot y_2 + 8\cdot y_1 = 27$

$18\cdot y_4 - 35\cdot y_3 + 18\cdot y_2 = 40$

$$Find(y_1, y_2, y_3) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{11618}{583} \\ \frac{20925}{583} \\ \frac{29584}{583} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19.928 \\ 35.892 \\ 50.744 \end{pmatrix}.$$

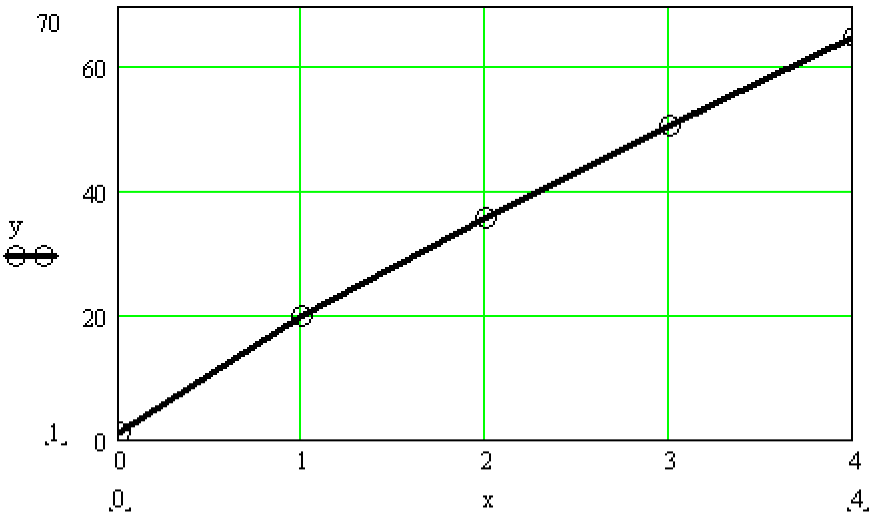
**Далі будуємо графік в координатах** $(x_i, y_1)$



**Цю ж задачу можна вирішити за допомогою функції** ***odesolve*** **.**
*Mathcad* **– документ буде виглядати так:**
*Given*

$$2 \cdot x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} y(t) + y(t) = 13 \cdot x^2 + 1$$

$$y(0.01) = 1 \qquad y(4) = 65 \qquad y := odesolve(x, 4)$$




Тема 3. МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ТА ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ
**Література [8].**

**До складу системи** *Matlab* **входить пакет моделювання динамічних систем** *Simulink* **[8]. Це нова, значно допрацьована версія популярного пакета, який вже давно вважається одним з найкращих пакетів моделювання блочно заданих динамічних систем.**

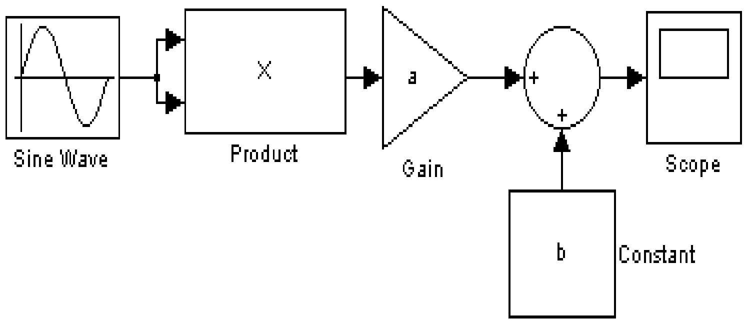
**Пакет** *Simulink* **є ядром інтерактивного програмного комплексу, який призначається для математичного моделювання лінійних та нелінійних динамічних систем і пристроїв, що задаються своєю блок-схемою, яка зветься S- моделлю або просто моделлю.**

**Для побудови функціональної блок-схеми пристроїв, які моделюються,** *Simulink* **має велику бібліотеку блочних компонентів і зручних редактор блок-схем.**

*Simulink* **автоматизує такий етап моделювання: він складає і вирішує системи алгебраїчних і диференціальних рівнянь, яка описує дану функціональну схему (модель), забезпечуючи зручний та наглядний візуальний контроль за поведінкою зробленого користувачем віртуального пристрою. Про все це можна почитати в [8].**

**Ми розглянемо один розділ: інтегрування диференціальних рівнянь. Як будується модель процесу, який ми досліджуємо ?**

**Нехай нам треба побудувати модель, яка виконує функцію обчислення значення функції $y = ax^2 + b$, де $a$ і $b - const$. Для підношення до квадрату достатньо використовувати множник, на обидва входу якого подається сигнал $"x"$.**




**Підключивши до виходу з множника блок** Gain, **який масштабує з коефіцієнтом передачі $"a"$, ми отримаємо сигнал $ax^2$. Додаємо до цих блоків суматор $Sum$ , на один вхід якого треба подати сигнал з множника, а на другий – вихід константи $"b"$. Тоді на виході суматора будемо мати $ax^2 + b$, що нам і потрібно. Цю функцію реалізує модель, яка показана на рисунку.**

**У цьому прикладі вхідним сигналом є синусоїдальний сигнал $Sine\ \ wave$. Пристрій який реєструє – осцилограф $Scope$. Для того щоб запустити модель достатньо клацнути по кнопці з зображенням трикутника на панелі інструментів** *Simulink.*

**Джерела сигналів можуть бути різними. Вони зберігаються в великій бібліотеці** *Simulink* **і легко переміщуються з бібліотеки на місце побудування моделі. Усі блоки повинні бути з'єднані лініями.**

**Аналогічно будується модель реалізації диференціального рівняння. Нехай, наприклад, нам треба розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння** $y'' + 2y' + 5y = x^2 + 1$ **з початковими умовами** $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$.

**По-перше, вирішуємо дане диференціальне рівняння відносно похідної** $y''$

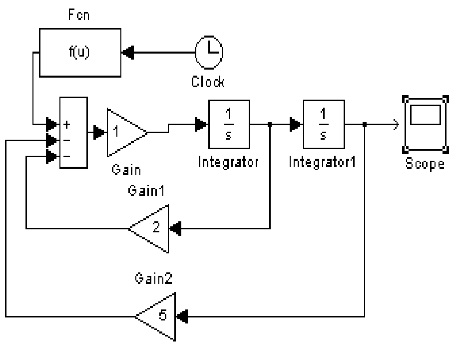
$$y'' = -2y' - 5y + x^2 + 1 .$$

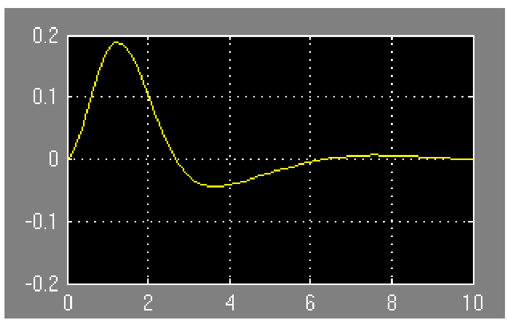
**За допомогою ланцюжка суматорів збираємо модель правої частини рівняння, використовуючи математичні блоки інтегрування** *integrator.*

**Блоком -** *clock* **ми задаємо змінну інтегрування** $"x"$. **Потім за допомогою блоку** *Fcn* **записуємо вираз** $x^2 + 1$, **причому у даному разі аргумент у блоці** *Fcn* **позначається не** $"x"$, **а** ($u$[1]). **Помножуючи похідні на константи, подаємо усі виходи на вхід суматора** *Sum.*

**Запустивши модель, ми через декілька секунд зможемо побачити на екрані осцилографа інтегральну криву. Для цього треба клацнути двічі по блоку** *Scope***. Нульові початкові умови задаються по замовленню. Якщо початкові умови не нульові, то послідовно клацнувши по блоках інтегрування, встановлюємо значення функції і її похідної у момент** $x = 0$.

**На рисунку показано графік інтегральної кривої** $y = f(x)$, **яка є розв'язком задачі Коші для рівняння, яке задане.**



## *Завдання до контрольної роботи № 2*

1. Знайти числлоий розв'язок задачі Коші на відрізку $[a:b]$, взявши $n=20$.

Побудувати графік інтегральної кривої

**1.** а) $y'+xy=(1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0)=1, \quad x\in[0:5]$.

б) $y''+2\sin y\cos^3 y=0, \quad y(0)=0, \quad x\in[0;4]$.

**2.** а) $xy'+y=2y^2\ln x, \quad y(1)=1/2, \quad x\in[1;5]$.

б) $y''=32\sin^2 y\cos y, \quad y(1)=\frac{\pi}{2}; \quad y'(1)=4, \quad x\in[1;4]$.

**3.** а) $2(xy'+y)=xy^2, \quad y(1)=2, \quad x\in[1;6]$.

б) $y''=\frac{y}{1000}, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=7, \quad x\in[1;4]$.

**4.** а) $y'+4x^3y=4(x^3+1)e^{-4x}y^2, \quad y(0)=1, \quad x\in[0;5]$.

б) $y''y^3+49=0, \quad y(3)=-7, \quad y'(3)=-1, \quad x\in[3;8]$.

**5.** а) $xy'-y=-y^2(\ln x+2)\ln x, \quad y(1)=1, \quad x\in[1;5]$.

б) $4y^3y''=6y^4-1, \quad y(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x\in[0;4]$.

**6.** а) $2(y'+xy)=(1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0)=2, \quad x\in[0;4]$.

б) $y''+8\sin y\cos^3 y=0, \quad y(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x\in[0;5]$.

**7.** а) $3(xy'+y)=y^2\ln x, \quad y(1)=3, \quad x\in[1;7]$.

б) $y''+\pi^2y=\frac{\pi^2}{\cos\pi x}, \quad y(0)=3, \quad y'(0)=0, \quad x\in[0;5]$.

**8.** а) $2y'+y\cos x=y^{-1}\cos x(1+\sin x), \quad y(0)=1, \quad x\in[0;6]$.

б) $y''+3y'=9e^{3x}(1+e^{3x}), \quad y(0)=\ln 4, \quad y'(0)=3(1-\ln 2), \quad x\in[0;4]$.

**9.** а) $y'+4x^3y=4y^2e^{4x}(1-x^3), \quad y(0)=1, \quad x\in[0;3]$.

б) $y'' + 4y = 8ctgx,$ $y\left(\pi/4\right) = 5,$ $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4,$ $x \in \left[\frac{\pi}{4}; 3\pi/4\right].$

**10.** а) $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2},$ $y(0) = -1,$ $x \in [0; 4].$

б) $y'' + 6y' + 8y = 4/\left(1 + e^{-2x}\right),$ $y(0) = 1 + 2ln2,$ $y'(0) = 6ln2,$ $x \in [0;5]$ .

2. Побудувати та реалізувати математичну модель у пакеті структурного моделювання Simulink.

1. $\frac{d^2x}{dt^2} - \left(1 - x^2\right)\frac{dx}{dt} + x = 0,$ $x(0) = 2,$ $x'(0) = 0$ .
2. $\frac{d^2y}{dt^2} - 0{,}2\left[\frac{dy}{dt} - \frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^3\right] + y = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0$ .
3. $y'' + 2y' + 10y = e^t \cos 3t,$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 0$ .
4. $y'' - 5y' + 6y = e^{3t}\left(t^2 + 1\right),$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0$ .
5. $y'' + (1 - 0{,}04\cos 2t) \cdot y = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0$ .
6. $\left(1 - t^2\right)\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + 12y = 0,$ $y(0) = 3,$ $y'(0) = 1$ .
7. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}(t + 1),$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 0$ .
8. $\left(1 - 0{,}1\, i^2\right)\frac{di}{dt} + i = 10\sin 10t,$ $i(0) = 0{,}7$ .
9. $\frac{d^2q}{dt^2} + 100\,(1 - 0{,}0001 \cdot \cos 0{,}005t) \cdot q = 0,$ $q(0) = 10,$ $q'(0) = 0$ .
10. $\frac{d^2x}{dt^2} + 25\left(1 + 0{,}1x^2\right)x = 0,$ $x(0) = 3,$ $x'(0) = 0$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Очков В.Ф.. Mathcad 7 Pro для студентов и инженеров. – М.: Компьютер- пресс, 1998.
2. Дъяконов В.П., Абраменкова И.В., Mathcad 7 в математике,физике и в Internet. - М.: Нолидж, 1999.
3. Плисс А.Н., Сливина Н.А. Mathcad: математический практикум. - М.: Финансы и статистика, 1999.
4. Березин Н.С., Жидков Н.П. Методы вычислений.– М.: Физматгиз, 1962.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1985, т. 1,2.
6. Демидович Б.П., Марон Н.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967.
7. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. – К.:Вища школа, 1986.
8. Дьяконов В. П. Simulink 4. Специальный справочник. – СПб: Питер, 2002.
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.– М.: ФМ, 1963.
10. Методические указания по применению пакета Mathcad при изучении дсциплины “Численные методы” для студентов всех специальностей /Сост. К.У. Чуднов. – Днепропетровск: НМетАУ, 2001. –52 с.
11. Методические указания по применению пакета Mathcad при проведении практических занятий по дисциплине “ Высшая математика” для студентов всех специальностей. Часть 1 / Сост. К.У. Чуднов. – Днепропетровск: НМетАУ, 2001. –43 с.
12. Методические указания по применению пакета Mathcad при проведении практических занятий по дисциплине “ Высшая математика” для студентов всех специальностей. Часть 2 / Сост.: К.У. Чуднов, А.А. Дисковский . – Днепропетровск: НМетАУ, 2006. – 38 с.
13. Методические указания по применению пакета Mathcad при проведении практических занятий по дисциплине “ Высшая математика” для студентов всех специальностей. Часть 3 / Сост.: К.У. Чуднов, А.А. Дисковский . – Днепропетровск: НМетАУ, 2007. – 36 с.