

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**

**А.В.ПАВЛЕНКО, Л.П.КАГАДІЙ, В.Л. КОПОРУЛІН**

## **ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ**

**Затверджено на засіданні Вченої ради академії  
як навчальний посібник. Протокол № 1 від 3.01.2012**

**Дніпропетровськ НМетАУ 2012**

УДК 517(07)

Павленко А.В., Кагадій Л.П., Копорулін В.Л. Операційне числення: Навч. посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 42 с.

Викладені основи операційного числення, що побудоване на перетворенні Лапласа. Розглянуті його основні властивості і найважливіші застосування, а саме, до розв'язання задач Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і систем таких рівнянь. Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями та ілюстраціями, а також розв'язанням відповідних прикладів. Пропонуються задачі для самостійного виконання.

Призначений для студентів напрямів: 6.050202 – автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології, 6.050102 – електромеханіка, 6.050502 – інженерна механіка, 6.050503 – машинобудування, 6.051002 – метрологія, стандартизація та сертифікація усіх форм навчання.

Табл.2. Іл. 7. Бібліогр.: 24 найм.

Друкується за авторською редакцією

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: О.О.Сдвижкова, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)  
В.Г.Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ ім.О.Гончара)

© Національна металургійна академія  
України, 2012

© Павленко А.В., Кагадій Л.П.,

Копорулін В.Л., 2012

# З М І С Т

|  |    |
|--|----|
| ВСТУП . . . . .  | 4  |
| 1. Оригінали та зображення . . . . .   | 5  |
| 2. Відшукування зображень за означенням . . . . .  | 7  |
| 3. Основні властивості перетворення Лапласа . . . . .  | 8  |
| Теорема додавання (лінійність перетворення Лапласа) . . . . .  | 8  |
| Теорема подібності . . . . .   | 9  |
| Теорема зсуення . . . . .  | 9  |
| Теорема запізнювання. . . . .  | 10 |
| Теорема про диференціювання оригіналу . . . . .  | 14 |
| Теорема про інтегрування оригіналу . . . . .   | 15 |
| Теорема про диференціювання зображення . . . . .   | 15 |
| Теорема про інтегрування зображення . . . . .  | 17 |
| Теорема про множення зображень (теорема Бореля) . . . . .  | 18 |
| Наслідок (інтеграли Дюамеля) . . . . .   | 19 |
| 4. Обернене перетворення Лапласа. Способи відновлення<br>оригіналу за відомим зображенням . . . . .    | 25 |
| Теорема обернення . . . . .  | 25 |
| Перша теорема розкладання . . . . .  | 25 |
| Друга теорема розкладання . . . . .  | 26 |
| 5. Застосування операційного числення до розв'язання звичайних<br>диференціальних рівнянь. . . . .     | 30 |
| Рівняння з нульовими початковими умовами. Метод Дюамеля . . . . .                                      | 34 |
| 6. Розв'язання систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь<br>зі сталими коефіцієнтами . . . . . | 36 |
| 7. Задачі для самостійного виконання . . . . .   | 38 |
| ЛІТЕРАТУРА . . . . .   | 40 |

## ВСТУП

*Операційне* або *символічне числення* є ефективним методом дослідження багатьох теоретичних і прикладних задач у різних областях науки і техніки, зокрема, фізики, математики, механіки, теорії автоматичного регулювання, електротехніки (дослідження перехідних режимів електричних ланцюгів), радіотехніки, телемеханіки та ін. Особливо значна його роль при розв'язанні лінійних диференціальних рівнянь (звичайних та у частинних похідних), інтегральних, інтегро-диференціальних та інших рівнянь.

Методи символічного числення дозволяють розглядати символ  $\frac{d}{dt} = p$  як величину, над якою можна здійснювати певну систему формальних операцій. У цій системі, при деяких умовах, дії диференціювання функції  $f(t)$  дійсної змінної  $t$  (*оригіналу*) відповідає дія множення на оператор  $p$  певної функції  $F(p)$  комплексної змінної  $p$  (*зображення*), а дії інтегрування функції  $f(t)$  відповідає ділення на  $p$  функції  $F(p)$ . Завдяки цьому дії над зображеннями виявляються значно простішими, ніж дії над оригіналами. Зокрема, розв'язання лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно шуканої функції  $f(t)$  зводиться до розв'язання відповідних алгебраїчних рівнянь відносно функції  $F(p)$ . Суть операційного методу полягає у наступному: 1) від оригіналу  $f(t)$  за допомогою того чи іншого оператора здійснюється формальний перехід до відповідного зображення  $F(p)$ ; 2) складається так зване *операторне рівняння* відносно  $F(p)$  (воно є наслідком заданих дій над  $f(t)$ ); 3) відшукується розв'язок  $F(p)$  операторного рівняння; 4) виконується зворотній перехід від знайденого  $F(p)$  до розв'язку задачі  $f(t)$ .

Операційне числення будується на основі *інтегральних перетворень*, тобто операцій вигляду

$$F(p) = \int_a^b K(t, p) f(t) dt, \quad (1)$$

де функція  $K(t, p)$  називається *ядром перетворення*. Існує декілька різних перетворень (Бесселя, Мелліна, Фур'є, Лапласа, Карсона-Хевісайда та ін.), які різняться границями інтегрування і ядром. Форма перетворення визначається характером задач, до розв'язання яких воно застосовується. Ми будемо розглядати *перетворення Лапласа*, яке є одним з найбільш уживаних.

## 1. Оригінали та зображення

Нехай  $f(t)$  – дійсна або комплексна функція дійсної змінної  $t$  (під  $t$  будемо розуміти час або координату).

Функція  $f(t)$  називається *оригіналом*, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1.  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ .

2.  $f(t)$  – кусково-неперервна при  $t \geq 0$ , тобто вона неперервна або має точки розриву 1-го роду, причому, на кожному скінченному проміжку осі  $t$  таких точок тільки скінченна множина;  $f(0) = f(+0)$ .

3. Існують такі числа  $M > 0$  й  $s > 0$ , що для усіх  $t > 0$  виконується нерівність  $|f(t)| < M \cdot e^{st}$ , тобто при зростанні  $t$  функція  $f(t)$  може зростати не швидше деякої експоненціальної функції  $e^{st}$ . Число  $s_0 \geq 0$ , таке, що подана нерівність виконується при  $s > s_0$  і не виконується при  $s < s_0$ , називається *показником зростання* функції  $f(t)$ .

Перша умова означає, що деякий фізичний процес, який описує функція  $f(t)$ , починається у момент часу  $t = 0$  і розвиток цього процесу до початкового моменту (тобто при  $t < 0$ ) не має значення. Третій умові задовольняють обмежені функції ( $s_0 = 0$ ), степеневі  $t^n$  ( $n > 0$ ) й багато інших. Однак не є оригіналами, наприклад, функції вигляду  $f(t) = Me^{t^2}$  (не виконується умова 3), функції  $f(t) = \frac{a}{t^n}$ ,  $n > 0$  (не виконується умова 2). Відзначимо, що умови

1) – 3) виконуються для більшості функцій, що описують реальні фізичні процеси. Зазначимо також, що комплексна функція дійсної змінної  $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$  буде оригіналом тільки у тому випадку, якщо обидві дійсні функції  $f_1(t)$  й  $f_2(t)$  також будуть оригіналами.

Найпростішим оригіналом є функція вигляду

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

яка називається *одиночною функцією* або *функцією Хевісайда*. Її графік наведений на рис. 1.

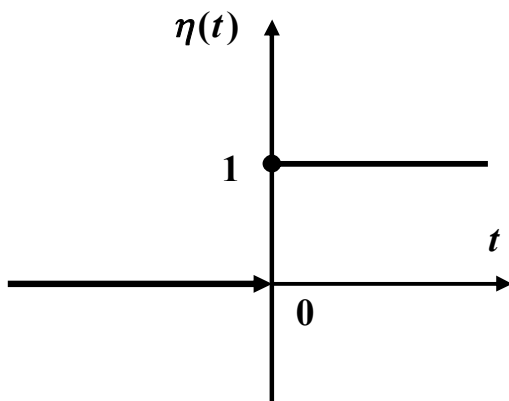


Рис. 1

Неважно бачити, що, якщо довільна функція  $f(t)$  задовольняє умовам 2), 3), але не задовольняє умові 1), то функція  $f(t) \cdot \eta(t)$  задовольняє усім умовам, тобто є оригіналом. Тому звичайно заради скорочення записів множник  $\eta(t)$  опускають, маючи на увазі, що усі функції  $f(t)$ , які розглядаються у якості оригіналів, дорівнюють 0 при від'ємних значеннях  $t$ .

*Зображенням за Лапласом* (далі просто *зображення*) оригінала  $f(t)$  називається функція  $F(p)$  комплексної змінної  $p = s + i\sigma$  така, що визначається інтегральним перетворенням

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt, \quad (2)$$

яке називається *перетворенням або оператором Лапласа*. Неважко бачити, що у (1) границі інтегрування  $a = 0$ ,  $b = +\infty$ , а ядро перетворення  $K(t, p) = e^{-pt}$ . Інтеграл справа у (2) називається *інтегралом Лапласа*. Функція  $F(p)$  визначена на множині тих значень  $p$ , при яких інтеграл Лапласа збігається, і  $F(p) \rightarrow 0$  при  $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$ .

Відповідність між оригіналом  $f(t)$  та зображенням  $F(p)$  будемо записувати у вигляді  $f(t) \rightarrow F(p)$  (існує й багато інших позначень перетворення Лапласа, наприклад,  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $f(t) \leftarrow F(p)$ ,  $F(p) = L\{f(t)\}, \dots$ ). Оригінал будемо позначати малою буквою, а його зображення - відповідною великою, наприклад,  $x(t) \rightarrow X(p)$ ,  $y(t) \rightarrow Y(p)$ .

## 2. Відшукування зображень за означенням

**Приклад 1.** Знайти зображення одиничної функції  $\eta(t)$ .

*Розв'язання.* За означенням (2) перетворення Лапласа при  $s = \operatorname{Re} p > 0$  ( $s_0 = 0$ ) знаходимо

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} \eta(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \right|_0^b = \\ &= -\frac{1}{p} (\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-bt} - e^0) = -\frac{1}{p} (0 - 1) = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p} \quad \text{або} \quad 1 \rightarrow \frac{1}{p}. \quad (3)$$

**Приклад 2.** Знайти зображення функції  $e^{at}$ , де  $a$  - довільне число.

*Розв'язання.* Візьмемо таке  $p$ , що  $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$ . Тоді за означенням (2) перетворення Лапласа знаходимо



$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(p-a)t} dt = - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{p-a} \cdot e^{-(p-a)t} \Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{p-a} \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-(p-a)b}) = \frac{1}{p-a} (1 - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(\operatorname{Re} p - \operatorname{Re} a)b}) = \frac{1}{p-a},$$

оскільки  $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(\operatorname{Re} p - \operatorname{Re} a)b} = 0$  при  $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$ .

Отже,

$$e^{at} \rightarrow \frac{1}{p-a} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a). \quad (4)$$

Відшукування зображень безпосередньо за означенням пов'язане з обчисленням невласних інтегралів і може бути достатньо складною задачею. У багатьох випадках для цього набагато зручніше використовувати *властивості* перетворення Лапласа. Наведемо найважливіші з цих властивостей (через обмеженість обсягу підручника доведення надані тільки для деяких з них).

### 3. Основні властивості перетворення Лапласа

**Теорема додавання (лінійність перетворення Лапласа).** Лінійній комбінації оригіналів відповідає та ж сама лінійна комбінація зображень, тобто, якщо  $f_i(t) \rightarrow F_i(p)$ , то для будь-яких комплексних сталих  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, n}$ )

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p). \quad (5)$$

Справедливість формули (5) випливає з означення (2) перетворення Лапласа і того, що інтегрування є лінійною операцією.

**Приклад 3.** Знайти зображення функцій  $\sin t$ ,  $\cos t$ ,  $sh t$  та  $cht$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ ,  $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ ,  $sh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ ,

$cht = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ , то за формулою (4) і властивістю (5) маємо

$$\sin t \rightarrow \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i} \right) = \frac{1}{p^2+1}, \quad \cos t \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i} \right) = \frac{p}{p^2+1},$$

$$\operatorname{sh} t \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{p^2-1}, \quad \operatorname{ch} t \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} \right) = \frac{p}{p^2-1}.$$

**Теорема подібності.** Якщо функція  $f(t)$  є оригіналом й  $f(t) \rightarrow F(p)$ , то для будь-якого числа  $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (6)$$

*Доведення.* Нехай  $u = \alpha t$ . Тоді  $t = \frac{u}{\alpha}$ ,  $dt = \frac{1}{\alpha} du$ . Отже,

$$\int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(u) e^{-\frac{p}{\alpha} u} \frac{1}{\alpha} du = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right),$$

оскільки неважливо, якою буквою позначена змінна інтегрування.

**Приклад 4.** Знайти зображення функцій  $\sin at$ ,  $\cos at$ ,  $\operatorname{sh} at$  та  $\operatorname{ch} at$ .

*Розв'язання.* За властивістю (6) з попереднього маємо

$$\sin at \rightarrow \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} = \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad \cos at \rightarrow \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + a^2}, \quad (7)$$

$$\operatorname{sh} at \rightarrow \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 - 1} = \frac{a}{p^2 - a^2}, \quad \operatorname{ch} at \rightarrow \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 - 1} = \frac{p}{p^2 - a^2}. \quad (8)$$

**Теорема зсунення.** Якщо функція  $f(t)$  є оригіналом й  $f(t) \rightarrow F(p)$ , то для будь-якого числа  $\alpha$

$$e^{-\alpha t} f(t) \rightarrow F(p + \alpha). \quad (9)$$

*Доведення.* Безпосередньо з означення (2) маємо

$$e^{-\alpha t} f(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\alpha+p)t} dt = F(p + \alpha).$$

**Приклад 5.** Знайти зображення функцій  $e^{at} \sin bt$  та  $e^{at} \cos bt$ .

*Розв'язання.* За властивістю (9) (де  $\alpha$  замінюємо на  $-a$ ) та за формулами (7) маємо

$$e^{at} \sin bt \rightarrow \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}, \quad e^{at} \cos bt \rightarrow \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}. \quad (10)$$

**Теорема запізнювання.** Якщо функція  $f(t)$  є оригіналом й  $f(t) \rightarrow F(p)$ , то для будь-якого числа  $t_0 > 0$

$$f(t-t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} F(p). \quad (11)$$

*Зауваження.* Теорема запізнювання є двоїстою до теореми зсуення. Термін “запізнювання” означає, що якщо функція  $f(t)$  є оригіналом і описує деякий фізичний процес, то функція  $f(t-t_0)$  також є оригіналом і описує той самий процес, але такий, що почався із затримкою на час  $t_0$ . Тому графік функції  $f(t-t_0)$  утворюється шляхом зсуву графіка функції  $f(t)$  праворуч на  $t_0$  одиниць (рис. 2). Функцію  $f(t-t_0)$  називають *оригіналом із запізнюванням*.

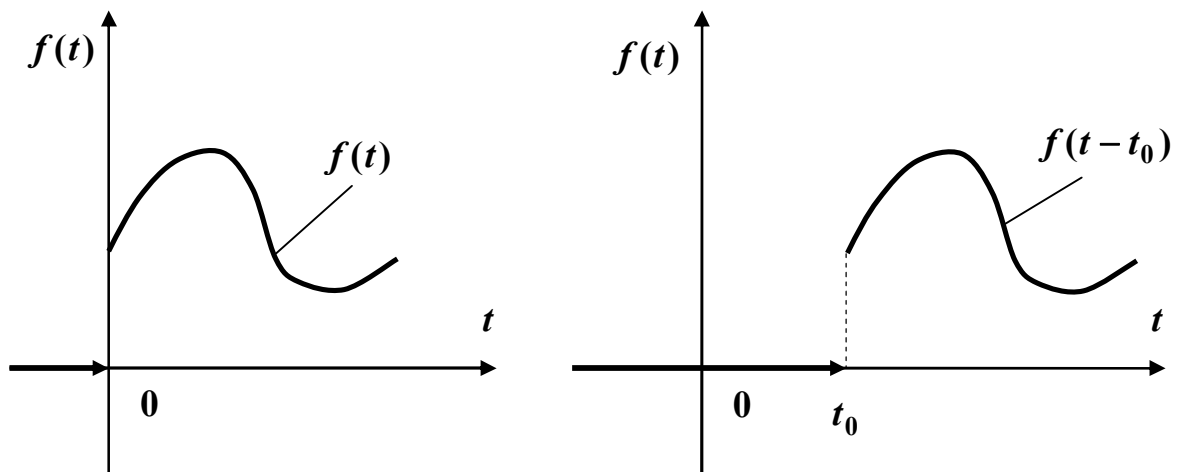


Рис. 2

*Доведення.* Нехай  $u = t - t_0$ . Тоді  $t = u + t_0$ ,  $dt = du$ . При змінненні  $t$  від  $0$  до  $\infty$  змінна  $u$  змінюється від  $-t_0$  до  $\infty$ . Отже,

$$\int_0^{\infty} f(t - t_0) e^{-pt} dt = \int_{-t_0}^{\infty} f(u) e^{-(u+t_0)} du = e^{-pt_0} \int_{-t_0}^{\infty} f(u) e^{-pu} du.$$

Але ж  $f(u) = 0$  при  $u < 0$ , тобто на інтервалі  $(-t_0, 0)$ . Тому

$$e^{-pt_0} \int_{-t_0}^{\infty} f(u) e^{-pu} du = \int_0^{\infty} f(u) e^{-pu} du = e^{-pt_0} F(p).$$

Із використанням теореми запізнювання дуже зручно знаходити зображення кусково-неперервних функцій, а також функцій, що описують імпульсні процеси.

**Приклад 6.** Знайти зображення узагальненої одиничної функції

$$\eta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad (12)$$

(рис. 3).

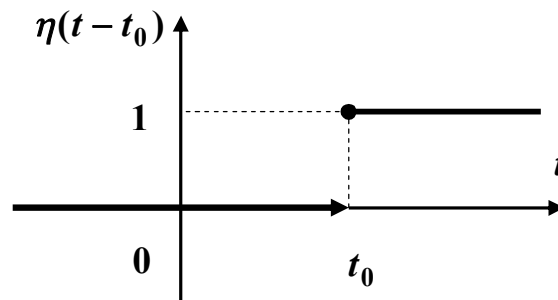


Рис. 3

*Розв'язання.* Оскільки  $\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p}$ , то за теоремою запізнювання

$$\eta(t - t_0) \rightarrow \frac{e^{-pt_0}}{p}.$$

Узагальнена одинична функція виявляється дуже корисною для опису імпульсних і кусково-неперервних функцій. Цей опис базується на формулі

$$f(t) = \varphi(t) \cdot [\eta(t - a) - \eta(t - b)], \quad (13)$$

за допомогою якої подається функція  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, & t > b, \\ \varphi(t) \neq 0 & \forall t \in (a, b) \end{cases}$  (рис. 4).

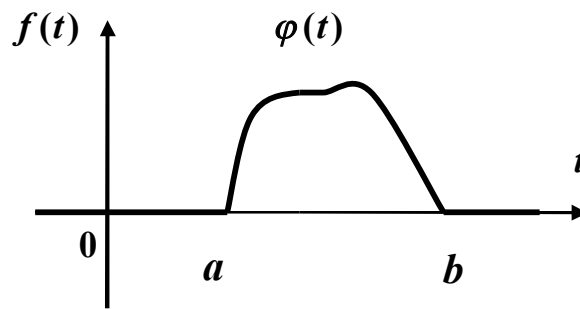


Рис. 4

*Зауваження.* Слід *відрізнати* звичайний оригінал  $f(t-t_0) \cdot \eta(t)$  від оригіналу із запізнюванням  $f(t-t_0) \cdot \eta(t-t_0)$  (рис. 5). Отже, щоб уникнути

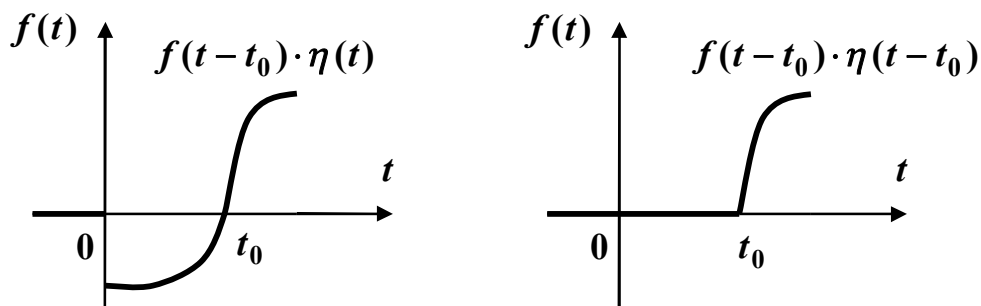


Рис. 5

неоднозначності і не уточнювати кожен раз, який саме з оригіналів мається на увазі, домовимося надалі множник  $\eta(t-t_0)$  у запису оригіналу із запізнюванням не опускаєти і застосовувати теорему запізнювання у вигляді

$$f(t-t_0) \cdot \eta(t-t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} F(p). \quad (11')$$

**Приклад 7.** Знайти зображення імпульсної функції  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ h, & 3 \leq t < 5, \\ 0, & t \geq 5. \end{cases}$

*Розв'язання.* Графік функції наведений на рис. 6.

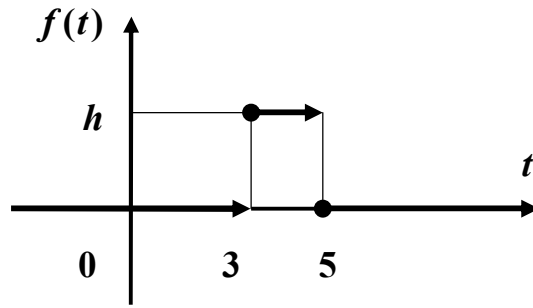


Рис. 6

За формулою (13) задана функція може бути записана у вигляді

$$f(t) = h \cdot [\eta(t-3) - \eta(t-5)].$$

Тоді за властивістю лінійності і теоремою запізнювання маємо

$$f(t) \rightarrow h \left( e^{-3t} \frac{1}{p} - e^{-5t} \frac{1}{p} \right) = h \frac{e^{-3t}}{p} (1 - e^{-2t}).$$

**Приклад 8.** Знайти зображення кусково-неперервної функції, графік якої зображений на рис. 7.

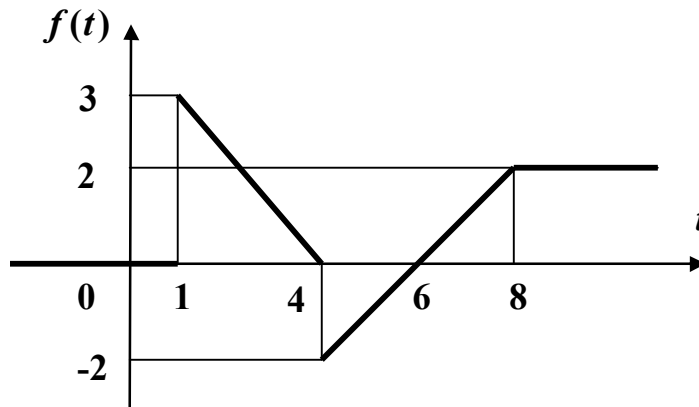


Рис. 7

*Розв'язання.* Опишемо задану функцію:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 4 - t, & 1 < t < 4, \\ t - 6, & 4 < t < 8, \\ 2, & t > 8. \end{cases}$$

Тоді, за формулою (13), вона може бути подана у вигляді

$$f(t) = (4 - t) \cdot [\eta(t-1) - \eta(t-4)] + (t - 6) \cdot [\eta(t-4) - \eta(t-8)] + 2\eta(t-8)$$

або

$$f(t) = (4-t) \cdot \eta(t-1) + 2(t-5) \cdot \eta(t-4) + (8-t) \cdot \eta(t-8).$$

Отже, за властивістю лінійності і теоремою запізнювання маємо

$$f(t) \rightarrow F(p) = \left( \frac{4}{p} - \frac{1}{p^2} \right) \cdot e^{-p} + 2 \left( \frac{1}{p^2} - \frac{5}{p} \right) \cdot e^{-4p} + \left( \frac{8}{p} - \frac{1}{p^2} \right) \cdot e^{-8p}.$$

Теорема запізнювання має особливе значення в теорії регулювання. Користуючись нею, можна досліджувати системи з ланками, що запізнюються, кусково-неперервні функції, зокрема, “східчасті” функції, що на практиці описують скидання або приєднання сталих навантажень.

**Теорема про диференціювання оригіналу.** Нехай функція  $f(t)$  та її похідні  $f'(t), f''(t), f'''(t), \dots, f^{(n)}(t)$  є оригіналами, причому,  $f(t) \rightarrow F(p)$ .

Тоді

$$\begin{aligned} f'(t) &\rightarrow pF(p) - f(0), \\ f''(t) &\rightarrow p^2 F(p) - p f(0) - f'(0), \\ f'''(t) &\rightarrow p^3 F(p) - p^2 f(0) - p f'(0) - f''(0), \\ &\dots \\ f^{(n)}(t) &\rightarrow p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0), \end{aligned} \tag{14}$$

де  $f^{(i)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f^{(i)}(t)$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

Ця теорема є одним з найважливіших обґрунтувань застосування перетворення Лапласа до розв'язування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь і систем таких рівнянь.

**Приклад 9.** Знайти зображення диференціального виразу

$$x''(t) + 5x'(t) - 7x(t) + 2$$

при початкових умовах  $x(0) = 4, \quad x'(0) = 0$ .

*Розв'язання.* Нехай  $x(t) \rightarrow X(p)$ . Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу  $x'(t) \rightarrow pX(p) - 4$ ,  $x''(t) \rightarrow p^2X(p) - 4p - 0$ . За властивістю лінійності  $x''(t) + 5x'(t) - 7x(t) + 2 \rightarrow p^2X(p) - 4p + 5pX(p) - 20 - 7X(p) + \frac{2}{p} = (p^2 + 5p - 7)X(p) - 4(p + 5) + \frac{2}{p}$ . (Тут враховано, що  $2 = 2\eta(t) \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{p}$ ).

**Теорема про інтегрування оригіналу.** Якщо функція  $f(t)$  є оригіналом й  $f(t) \rightarrow F(p)$ , то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}, \quad (15)$$

тобто інтегруванню оригіналу від  $0$  до  $t$  відповідає ділення зображення на  $p$ .

**Приклад 10.** Знайти зображення інтеграла  $\int_0^t (u - \cos u) du$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $f(t) = t - \cos t$  є оригіналом і  $t - \cos t \rightarrow \frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2 + 1}$ ,

то за теоремою про інтегрування оригіналу  $\int_0^t (u - \cos u) du \rightarrow \frac{1}{p} \left( \frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2 + 1}$ .

**Теорема про диференціювання зображення.** Якщо функція  $f(t)$  є оригіналом й  $f(t) \rightarrow F(p)$ , то

$$-t \cdot f(t) \rightarrow F'(p), \quad (16)$$

тобто множенню оригіналу на  $-t$  відповідає диференціювання зображення.

*Доведення.*  $F'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dp} (e^{-pt}) f(t) dt = \int_0^{\infty} (-t) e^{-pt} f(t) dt =$



$$= -\int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) dt \leftarrow -t f(t).$$

Аналогічно

$$F''(p) = \frac{d}{dp} \left( -\int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) dt \right) = -\int_0^{\infty} \frac{d}{dp} (e^{-pt}) t f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^2 f(t) dt \leftarrow t^2 f(t).$$

Послідовне застосування (16) дає

$$-t^3 f(t) \rightarrow F'''(p),$$

.....

$$(-1)^n t^n f(t) \rightarrow F^{(n)}(p).$$

**Приклад 11.** Знайти зображення функцій  $t^n (n \in \mathbb{N})$ ,  $t \sin at$ ,  $t \cos at$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $1 \rightarrow \frac{1}{p}$ , то за (16) маємо  $-t \cdot 1 \rightarrow -\frac{1}{p^2}$ . Далі

знаходимо  $-t^2 \rightarrow \left( \frac{1}{p^2} \right)' = -\frac{2}{p^3}$ , тобто  $t^2 \rightarrow \frac{2!}{p^3}$ . Продовжуючи диференцію-

вання, отримаємо

$$t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Оскільки  $\sin at \rightarrow \frac{a}{p^2 + a^2}$ , то  $\left( \frac{a}{p^2 + a^2} \right)' \rightarrow -t \sin at$ ,

тобто  $-\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2} \leftarrow -t \sin at$ , звідки  $t \sin at \rightarrow \frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$ .

Аналогічно знаходимо  $t \cos at \rightarrow \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$ .

**Теорема про інтегрування зображення.** Якщо  $f(t) \rightarrow F(p)$  і  $\frac{f(t)}{t}$  теж є оригіналом, то

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_p^{\infty} F(q) dq, \quad (17)$$

тобто діленню оригіналу на  $t$  відповідає інтегрування зображення від  $p$  до  $\infty$ .

**Приклад 12.** Знайти зображення функцій  $\varphi(t) = \frac{\sin at}{t}$  й  $\varphi(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ .

*Розв'язання.* Оскільки границя  $\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\sin at}{t} = a$  є скінченною, то

$\varphi(t) = \frac{\sin at}{t}$  є оригіналом. Оскільки  $f(t) = \sin at \rightarrow \frac{a}{p^2 + a^2} = F(p)$ , то, на підставі теореми про інтегрування зображення (17),

$$\frac{\sin at}{t} \rightarrow \int_p^{\infty} \frac{a}{q^2 + a^2} dq = a \cdot \frac{1}{a} \cdot \lim_{B \rightarrow \infty} \arctg \frac{q}{a} \Big|_p^B = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{p}{a}.$$

*Зауваження.* З останнього співвідношення випливає, що

$$\int_p^{\infty} \frac{\sin at}{t} e^{-pt} dt = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{p}{a}. \text{ При } p = 0 \text{ маємо } \int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \text{ Функція}$$

$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$  називається *інтегральним синусом*. Тоді за теоремою про

інтегрування оригіналу (15) маємо  $Si(t) \rightarrow \frac{1}{p} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg p \right)$ .

Щоб викласти наступну властивість, введемо поняття *згортки* функцій.

Нехай функції  $f(t)$  й  $g(t)$  неперервні при  $t \geq 0$ . *Згортою* цих функцій

називається інтеграл  $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ . Згортка позначається  $f * g$ , тобто

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (18)$$

Дія отримання згортки називається *згортанням* функцій. Операція згортання підкорюється законам комутативності, асоціативності і дистрибутивності відносно додавання. Зокрема,  $f * g = g * f$ , звідки

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau. \text{ Крім того, } |f * g| \leq |f| * |g|. \text{ Згортка є}$$

неперервною функцією, а якщо  $f(t)$  й  $g(t)$  є оригіналами з показниками зростання  $s_1$  і  $s_2$ , то їх згортка також є оригіналом з показником зростання  $s_0 \leq \max\{s_1, s_2\}$ .

**Приклад 13.** Знайти зображення згортки функцій  $f(t) = t$  й  $g(t) = e^t$ .

*Розв'язання.* Оскільки обидві функції неперервні при  $t \geq 0$ , то за (18)

$$\begin{aligned} f * g &= \int_0^t \tau \cdot e^{t-\tau} d\tau = \left. \begin{array}{l} u = \tau, \quad dv = e^{t-\tau} d\tau, \\ du = d\tau, \quad v = -e^{t-\tau} \end{array} \right|_0^t = -\tau \cdot e^{t-\tau} \Big|_0^t + \int_0^t e^{t-\tau} d\tau = \\ &= -t \cdot e^0 - e^{t-\tau} \Big|_0^t = -t - 1 + e^t \rightarrow -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}. \end{aligned}$$

**Теорема про множення зображень (теорема Бореля).** Якщо функції  $f(t)$  й  $g(t)$  є оригіналами і  $f(t) \rightarrow F(p)$  й  $g(t) \rightarrow G(p)$ , то

$$f(t) * g(t) \rightarrow F(p) \cdot G(p), \quad (19)$$

тобто згортиці двох функцій відповідає добуток зображень цих функцій.

Так у попередньому прикладі за теоремою Бореля  $t * e^t \rightarrow \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1}$ .

При розв'язуванні задач (зокрема при відшукуванні оригіналів за заданими зображеннями, коли зображення подається у формі добутку з відомими оригіналами множників) корисним може бути зворотнє формулювання:

$$F(p) \cdot G(p) \leftarrow f(t) * g(t),$$

тобто добутку зображень відповідає згортка оригіналів.

**Приклад 14.** Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + a^2)^2}.$$

*Розв'язання.* Оскільки

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + a^2)} \cdot \frac{1}{(p^2 + a^2)}$$

й  $\frac{1}{p^2 + a^2} \leftarrow \frac{1}{a} \cdot \sin at$ , то за теоремою Бореля

$$\begin{aligned} F(p) &\leftarrow \int_0^t \frac{1}{a} \cdot \sin a\tau \cdot \frac{1}{a} \cdot \sin a(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2a^2} \cdot \int_0^t (\cos a(2\tau - t) - \cos at) d\tau = \\ &= \frac{1}{2a^2} \left( \frac{1}{2a} \cdot \sin a(2\tau - t) \Big|_0^t - \cos at \cdot \tau \Big|_0^t \right) = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{1}{a} \sin at - t \cos at \right) = \\ &= \frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cdot \cos at), \text{ тобто } \frac{1}{(p^2 + a^2)^2} \leftarrow \frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cdot \cos at). \end{aligned}$$

**Наслідок (інтеграл Дюамеля).** З теореми про диференціювання оригіналу та теореми Бореля безпосередньо випливає наступне співвідношення, яке називається *інтегралом (формулою) Дюамеля* за ім'ям математика, який уперше (1853 р.) застосував його при розв'язуванні задач динаміки:

$$p \cdot F(p) \cdot G(p) \leftarrow \int_0^t f(\tau) \cdot g'(t-\tau) d\tau + f(t) \cdot g(0). \quad (20)$$

*Доведення.* Інтеграл у правій частині (20) є згорткою функцій  $f(t)$  й  $g'(t)$ ,

тобто  $\int_0^t f(\tau) \cdot g'(t-\tau) d\tau = f(t) * g'(t)$ .

Оскільки за властивістю (14)  $g'(t) \rightarrow pG(p) - g(0)$ , то за властивістю лінійності і теоремою про множення зображень будемо мати

$$g(0) \cdot f(t) + f(t) * g'(t) \rightarrow g(0) \cdot F(p) + F(p) \cdot [p \cdot G(p) - g(0)] = p \cdot F(p) \cdot G(p).$$

З урахуванням комутативності згортки отримуємо ще три аналогічні співвідношення:

$$p \cdot F(p) \cdot G(p) \leftarrow \int_0^t g'(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau + f(t) \cdot g(0), \quad (21)$$

$$p \cdot F(p) \cdot G(p) \leftarrow \int_0^t g(\tau) \cdot f'(t-\tau) d\tau + f(0) \cdot g(t), \quad (22)$$

$$p \cdot F(p) \cdot G(p) \leftarrow \int_0^t f'(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau + f(0) \cdot g(t). \quad (23)$$

З (20) - (23) випливає, що, якщо одна з функцій диференційовна, а друга неперервна, то згортка цих функцій диференційовна. Інтеграл Дюамеля використовуються при відшукуванні оригіналів та зображень, а також при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь з нульовими початковими умовами (*метод Дюамеля*).

**Приклад 15.** Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{2p^2}{(p^2 + 1)^2}.$$

*Розв'язання.* Оскільки

$$\frac{2p^2}{(p^2 + 1)^2} = 2p \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \text{ й } \frac{1}{p^2 + 1} \leftarrow \sin t = f(t), \quad \frac{p}{p^2 + 1} \leftarrow \cos t = g(t),$$

то за формулою Дюамеля (23)

$$\begin{aligned} 2p \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} &\leftarrow 2 \int_0^t \cos \tau \cdot \cos (t - \tau) d\tau + \sin 0 \cdot \cos t = \\ &= 2 \int_0^t \frac{1}{2} (\cos(2\tau - t) + \cos t) d\tau = \frac{1}{2} \sin(2\tau - t) \Big|_0^t + \cos t \cdot \tau \Big|_0^t = \sin t + t \cdot \cos t. \end{aligned}$$

Розглянуті властивості перетворення Лапласа зведені у табл. 1. У табл. 2 наведені деякі основні зображення (більш докладні таблиці можна знайти у відповідній літературі).

Таблиця 1

| ОРИГІНАЛ   | ЗОБРАЖЕННЯ   |
|--|--|
| <i>Лінійність</i>  |  |
| $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t)$                           | $\sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p)$   |
| <i>Подібність</i>  |  |
| $f(\alpha t) \quad (\forall \alpha > 0)$                 | $\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (\forall \alpha > 0)$   |
| <i>Зсуення</i>   |  |
| $e^{-\alpha t} f(t) \quad (\forall \alpha)$              | $F(p + \alpha) \quad (\forall \alpha)$   |
| <i>Запізнювання</i>                                      |  |
| $f(t - t_0) \cdot \eta(t - t_0) \quad (\forall t_0 > 0)$ | $e^{-t_0 p} F(p) \quad (\forall t_0 > 0)$  |
| <i>Диференціювання оригіналу</i>                         |  |
| $f(t)$   | $F(p)$   |
| $f'(t)$  | $pF(p) - f(0)$   |
| $f''(t)$   | $p^2 F(p) - p f(0) - f'(0)$  |
| $f'''(t)$  | $p^3 F(p) - p^2 f(0) - p f'(0) - f''(0)$   |
| .....  | .....  |
| $f^{(n)}(t)$   | $p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0),$<br><br>$f^{(i)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f^{(i)}(t) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$ |
| <i>Інтегрування оригіналу</i>                            |  |
| $\int_0^t f(\tau) d\tau$                                 | $\frac{F(p)}{p}$   |

| <i>Диференціювання зображення</i>   |                           |
|---|---------------------------|
| $f(t)$  | $F(p)$                    |
| $-t \cdot f(t)$   | $F'(p)$                   |
| $t^2 f(t)$  | $F''(p)$                  |
| $-t^3 f(t)$   | $F'''(p)$                 |
| .....   | .....                     |
| $(-1)^n t^n f(t)$   | $F^{(n)}(p)$              |
| <i>Інтегрування зображення</i>  |                           |
| $\frac{f(t)}{t}$  | $\int_p^{\infty} F(q) dq$ |
| <i>Згортка</i>  |                           |
| $f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau$ |                           |
| <i>Теорема Бореля</i>   |                           |
| $f(t) * g(t)$   | $F(p) \cdot G(p)$         |
| <i>Інтеграл Дюамеля</i>   |                           |
| $\int_0^t f(\tau) \cdot g'(t - \tau) d\tau + f(t) \cdot g(0)$   | $p \cdot F(p) \cdot G(p)$ |
| $\int_0^t g(\tau) \cdot f'(t - \tau) d\tau + f(0) \cdot g(t)$   |                           |

Таблиця 2

| ОРИГІНАЛ  | ЗОБРАЖЕННЯ  |
|---|---|
| <p><i>Одинична функція Хевісайда</i></p> $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$             | $\frac{1}{p}$   |
| <p><i>Узагальнена одинична функція</i></p> $\eta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}$ | $e^{-t_0 p} \cdot \frac{1}{p}$                                  |
| $e^{at}$  | $\frac{1}{p - a}$   |
| $t^n$   | $\frac{n!}{p^{n+1}}$  |
| $\sin at$   | $\frac{a}{p^2 + a^2}$   |
| $\cos at$   | $\frac{p}{p^2 + a^2}$   |
| $shat$  | $\frac{a}{p^2 - a^2}$   |
| $chat$  | $\frac{p}{p^2 - a^2}$   |
| $\sin^2 at$   | $\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$                                    |
| $\cos^2 at$   | $\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$                              |
| $\sin at \cdot \cos bt$   | $\frac{a(p^2 + a^2 - b^2)}{[p^2 + (a - b)^2][p^2 + (a + b)^2]}$ |



## Продовження табл. 2

|                        |  |
|------------------------|--|
| $t \cdot \sin at$      | $\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$                        |
| $t \cdot \cos at$      | $\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$                  |
| $t \cdot sh at$        | $\frac{2ap}{(p^2 - a^2)^2}$                        |
| $t \cdot ch at$        | $\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$                  |
| $e^{at} \cdot \sin bt$ | $\frac{b}{(p - a)^2 + b^2}$                        |
| $e^{at} \cdot \cos bt$ | $\frac{p - a}{(p - a)^2 + b^2}$                    |
| $e^{at} \cdot sh bt$   | $\frac{b}{(p - a)^2 - b^2}$                        |
| $e^{at} \cdot ch bt$   | $\frac{p - a}{(p - a)^2 - b^2}$                    |
| $e^{at} t^n$           | $\frac{n!}{(p - a)^{n+1}}$                         |
| $\frac{\sin at}{t}$    | $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{a}$ |

#### 4. Обернене перетворення Лапласа. Способи відновлення оригіналу за відомим зображенням

Перетворення Лапласа (2) кожному оригіналу  $f(t)$  ставить у відповідність одне і тільки одне зображення  $F(p)$ . Доведено, що й обернена задача відновлення оригіналу за зображенням теж розв'язується однозначно. Це може бути здійснено за допомогою *оберненого перетворення Лапласа*, що дається наступною теоремою.

**Теорема обернення.** Якщо функція  $f(t)$  - оригінал з показником зростання  $s_0$  й  $F(p)$  - її зображення, то у будь-якій точці неперервності  $f(t)$  виражається через  $F(p)$  за формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (24)$$

де інтеграл береться по будь-якій прямій  $\operatorname{Re} p = s > s_0$  і розуміється як *головне значення*, тобто

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{s-iR}^{s+iR} e^{pt} F(p) dp.$$

У точках розриву  $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)]$ .

Формула (24) називається *формулою обернення Рімана-Мелліна* і визначає *обернене перетворення Лапласа*.

Відшукання оригіналів безпосередньо за формулою (24) є доволі непростю задачею. Тому на практиці звичайно користуються *наслідками* з теореми обернення – так званими *теоремами розкладання*.

**Перша теорема розкладання.** Якщо функція  $F(p)$  аналітична в нескінченно віддаленій точці,  $F(\infty) = 0$  і в деякому околі цієї точки її розвинення в ряд за степенями  $1/p$  має вигляд

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}},$$

то функція  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$  є оригіналом, що відповідає зображенню  $F(p)$ .

**Друга теорема розкладання.** Якщо зображення  $F(p)$  є однозначною функцією й має лише скінченне число полюсів  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , що лежать у скінченній частині площини, то відповідний оригінал  $f(t)$  дорівнює сумі лишків функції  $e^{pt}F(p)$ , що обчислені в усіх полюсах  $p_k$  функції  $F(p)$ , тобто

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} \{ e^{pt} F(p) \}. \quad (25)$$

Особливе значення для практики має обернене перетворення дробово-раціональних функцій, тобто функцій вигляду  $F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$ , де  $P_m(p)$  й  $Q_n(p)$  – многочлени степенів  $m$  й  $n$  відповідно ( $n > m$ ),  $p_1, p_2, \dots, p_r$  – корені многочлена  $Q_n(p)$  з кратностями  $l_1, l_2, \dots, l_r$ , де  $l_1 + l_2 + \dots + l_r = n$ .

На підставі відомої формули для обчислення лишку функції  $\varphi(z)$  у полюсі  $z_0$  порядку  $n$

$$\operatorname{res} \varphi(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{ (z - z_0)^n \varphi(z) \}$$

з (25) одержуємо

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{l_k-1}}{dp^{l_k-1}} \{ (p - p_k)^{l_k} e^{pt} F(p) \}, \quad (26)$$

де підсумовування виконується по усіх полюсах  $p_k$  зображення  $F(p)$ , тобто по усіх нулях многочлена  $Q_n(p)$ .

Якщо усі полюси  $p_k$  прості, то формула (26) набуває спрощеного вигляду:

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \lim_{p \rightarrow p_k} \{ (p - p_k) e^{pt} F(p) \}. \quad (27)$$

Якщо усі коефіцієнти многочленів  $P_m(p)$  й  $Q_n(p)$  – дійсні числа, то у правій частині (26) корисно об'єднати доданки, що відносяться до взаємно спряжених комплексних коренів: сума кожної пари таких членів дорівнює подвоєній дійсній частині кожного з них.

У частинному випадку, коли усі корені  $p_1, p_2, \dots, p_n$  многочлена  $Q_n(p)$  прості, на підставі формули для обчислення лишку відносно полюса першого порядку отримаємо

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P_m(p_k)}{Q'_n(p_k)} e^{p_k t}. \quad (28)$$

На практиці при відшуванні оригіналу не дуже складного дробово-раціонального зображення (особливо якщо корені знаменника прості) досить розкласти заданий дріб у суму найпростіших раціональних дробів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів, відшукати оригінали, що відповідають кожному з них (за таблицею, із застосуванням тотожних перетворень) і на підставі теореми лінійності записати шуканий оригінал. У більш складних випадках користуються іншими властивостями перетворення Лапласа і теоремами розкладання.

**Приклад 16.** Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+3)}.$$

*Розв'язання.* Розглянемо два способи.

*Перший спосіб.* Розкладемо дріб  $\frac{p+1}{(p-1)(p+3)}$  у суму найпростіших

дробів:

$$F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+3)} = \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p+3)}.$$

За таблицею оригіналів і зображень на підставі теореми лінійності знаходимо:

$$f(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-3t}.$$

*Другий спосіб.* У заданому дробу  $P_m(p) = p + 1$ ,  $Q_n(p) = (p - 1)(p + 3)$ . Оскільки обидва корені знаменника  $p_1 = 1$  й  $p_2 = -3$  прості, то за формулою (27), таблицею оригіналів та зображень і теоремою лінійності маємо:

$$f(t) = \lim_{p \rightarrow 1} \left( (p - 1) \frac{e^{pt}(p + 1)}{(p - 1)(p + 3)} \right) + \lim_{p \rightarrow -3} \left( (p + 3) \frac{e^{pt}(p + 1)}{(p - 1)(p + 3)} \right) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-3t}.$$

В той же час, оскільки  $Q'_n(p) = 2(p + 1)$ , то за формулою (28) маємо той самий результат:

$$f(t) = \frac{p + 1}{2(p + 1)} e^{pt} \Big|_{p=1} + \frac{p + 1}{2(p + 1)} e^{pt} \Big|_{p=-3} = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-3t}.$$

**Приклад 17.** Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{1}{(p - 1)(p + 1)^3}.$$

*Розв'язання.* Розглянемо два способи.

*Перший спосіб.* Розкладемо дріб  $\frac{1}{(p - 1)(p + 1)^3}$  у суму найпростіших дробів:

$$F(p) = \frac{1}{(p - 1)(p + 1)^3} = -\frac{1}{2(p + 1)^3} - \frac{1}{4(p + 1)^2} - \frac{1}{8(p + 1)} + \frac{1}{8(p - 1)}.$$

За таблицею оригіналів і зображень на підставі теореми лінійності знаходимо:

$$f(t) = -\frac{1}{4} t^2 e^{-t} - \frac{1}{4} t e^{-t} - \frac{1}{8} e^{-t} + \frac{1}{8} e^t = \frac{1}{8} [e^t - e^{-t}(2t^2 + 2t + 1)].$$

*Другий спосіб.* У заданому дробу  $P_m(p) = 1$ ,  $Q_n(p) = (p - 1)(p + 1)^3$ . Оскільки  $p_1 = 1$  – простий корень знаменника ( $l_1 = 1$ ),  $p_2 = -1$  – корень кратності  $l_2 = 3$ , то за формулою (26), таблицею оригіналів та зображень і теоремою лінійності маємо:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow -1} \left( \frac{e^{pt}(p+1)^3}{(p-1)(p+1)^3} \right)'' = \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow -1} \left( \frac{e^{pt}}{p-1} \right)'' = \\
 &= \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow -1} \left( t^2 \frac{e^{pt}}{p-1} - 2t \frac{e^{pt}}{(p-1)^2} + \frac{2e^{pt}}{(p-1)^3} \right) = \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2}t^2 e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} - \right. \\
 &\left. - \frac{1}{4}e^{-t} \right) = \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{4}t^2 e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t} - \frac{1}{8}e^{-t} = \frac{1}{8} \left[ e^t - e^{-t} (2t^2 + 2t + 1) \right].
 \end{aligned}$$

Отже, отримали той самий результат, що й першим способом.

**Приклад 18.** Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{pe^{-3p}}{(p^2 - 4)(p^2 + 4p + 8)}.$$

*Розв'язання.* Розкладемо дріб  $\frac{p}{(p^2 - 4)(p^2 + 4p + 8)}$  у суму найпростіших

дрібів:

$$\frac{p}{(p^2 - 4)(p^2 + 4p + 8)} = \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{p-2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{p+2} - \frac{3}{20} \cdot \frac{p + \frac{8}{3}}{p^2 + 4p + 8}.$$

За таблицею основних зображень і за теоремою зсунення з урахуванням лінійності маємо

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{p-2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{p+2} &\leftarrow \frac{1}{40} e^{2t} + \frac{1}{8} e^{-2t}, \\
 -\frac{3}{20} \cdot \frac{p + \frac{8}{3}}{p^2 + 4p + 8} &= -\frac{3}{20} \cdot \frac{p+2 + \frac{2}{3}}{p^2 + 4p + 8} \leftarrow -\frac{3}{20} \cdot e^{-2t} \cos 2t - \frac{1}{20} \cdot e^{-2t} \sin 2t,
 \end{aligned}$$

отже,

$$\frac{p}{(p^2 - 4)(p^2 + 4p + 8)} \leftarrow \frac{1}{40} e^{2t} + \frac{1}{8} e^{-2t} - \frac{3}{20} \cdot e^{-2t} \cos 2t - \frac{1}{20} \cdot e^{-2t} \sin 2t.$$

Тоді за теоремою запізнювання остаточно маємо

$$f(t) = \left[ \frac{1}{40} e^{2t-6} + \frac{1}{8} e^{-2t+6} - \frac{1}{20} \cdot e^{-2t+6} [3 \cos(2t-6) + \sin(2t-6)] \right] \cdot \eta(t-3).$$

## 5. Застосування операційного числення до розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Операційне числення є зручним засобом розв'язування різних задач. Зокрема, за його допомогою можна обчислювати невластні інтеграли, підсумовувати ряди, розв'язувати звичайні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння у частинних похідних, диференціально-різницеві і інтегральні рівняння, до яких приводять задачі про перехідні процеси лінійних фізичних систем електротехніки, радіотехніки, теорії автоматичного регулювання, теплопровідності, гірничої техніки, телемеханіки, теорії слідкуючих систем. Такий спосіб розв'язування отримав назву *операційного методу*. Тут ми розглянемо одне з найважливіших його застосувань, а саме розв'язування задач Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і систем таких рівнянь.

Розглянемо рівняння вигляду

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t), \quad (29)$$

де  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – задані числа (коефіцієнти рівняння),  $f(t)$  – задана функція,  $x = x(t)$  – невідома функція. Треба розв'язати відповідну задачу Коші, а саме, знайти розв'язок цього рівняння, що задовольняє початковим умовам:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \quad (30)$$

де  $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$  – задані числа.

Припустимо, що права частина  $f(t)$  є оригіналом. Доведено, що в цьому випадку розв'язок задачі Коші існує, є єдиним і також є оригіналом. Розв'язання задачі операційним методом полягає у наступному:

1. Здійснюється перехід від функцій  $x(t)$  й  $f(t)$  до відповідних оригіналів  $X(p)$  й  $F(p)$ , причому, до  $X(p)$  – цілковито формально, а до  $F(p)$  – у відповідності з фактичним виразом  $f(t)$ .

2. Застосовуються теореми про диференціювання оригіналу і лінійності, завдяки чому здійснюється перехід від рівняння (29) до рівняння

$$L(p) \cdot X(p) + Q(p) = F(p), \quad (31)$$

яке називається *зображуючим* або *операторним* рівнянням. Многочлен  $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$  називається *характеристичним многочленом* рівняння (29),  $Q(p)$  – деякий многочлен степеня  $n - 1$ , коефіцієнти якого залежать від початкових даних  $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ . Неважко бачити, що, на відміну від диференціального рівняння (30), рівняння (31) є лінійним алгебраїчним відносно  $X(p)$ .

3. Рівняння (31) розв'язується відносно  $X(p)$ :

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}. \quad (32)$$

4. Від знайденого зображення  $X(p)$  будь-яким способом здійснюється зворотний перехід до оригіналу  $x(t)$ , який і буде розв'язком задачі Коші.

*Зауваження 1.* Якщо вважати  $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$  довільними сталими, то знайдений розв'язок буде загальним розв'язком рівняння (29).

*Зауваження 2.* При нульових початкових умовах, тобто при  $x_0 = x'_0 = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$ , многочлен  $Q(p)$  тотожно дорівнює нулю і рівняння (31) набуває вигляду

$$L(p) \cdot X(p) = F(p),$$

звідки

$$X(p) = \frac{F(p)}{L(p)}. \quad (33)$$

Функція  $Z(p) = \frac{1}{L(p)}$  називається *передавальною функцією*. Отже,  $X(p) = Z(p) \cdot F(p)$ . Якщо  $F(p)$  розуміти як зображення збурення (вхідного сигналу), а  $X(p)$  - як зображення відгуку (реакції) системи на це збурення, то зображення відгуку виходить з зображення збурення шляхом простого



множення на передавальну функцію. Це особливо зручно, коли реакція деякої системи є вхідним сигналом для іншої системи і т.д.

**Приклад 19.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t),$$

що задовольняє початковим умовам  $x(0) = -1$ ,  $x'(0) = 1$ .

*Розв'язання.* Нехай  $x(t) \rightarrow X(p)$ . Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу з урахуванням початкових умов маємо

$$x'(t) \rightarrow pX(p) + 1, \quad x''(t) \rightarrow p^2X(p) + p - 1.$$

За таблицею оригіналів і зображень і теоремою лінійності знаходимо

$$\cos t + 2 \sin t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1} + 2 \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{p + 2}{p^2 + 1}.$$

Тоді за теоремою зсуення

$$e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t) \rightarrow \frac{p + 4}{(p + 2)^2 + 1}.$$

Підставивши усі отримані вирази до заданого рівняння, отримаємо операторне рівняння у вигляді

$$p^2X(p) + p - 1 + 4pX(p) + 4 + 4X(p) = \frac{p + 4}{(p + 2)^2 + 1}$$

або, після перетворень,

$$(p^2 + 4p + 4)X(p) + p + 3 = \frac{p + 4}{(p + 2)^2 + 1}.$$

Знайдемо звідси зображення розв'язку:

$$X(p) = - \frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 11}{[(p + 2)^2 + 1](p + 2)^2}.$$

Розклавши дріб у суму найпростіших дробів, отримаємо:

$$X(p) = - \frac{p + 4}{(p + 2)^2 + 1} + \frac{1}{(p + 2)^2} = - \frac{p + 2}{(p + 2)^2 + 1} - 2 \cdot \frac{1}{(p + 2)^2 + 1} + \frac{1}{(p + 2)^2}.$$

Оскільки  $\frac{p}{p^2+1} \leftarrow \cos t$ ,  $\frac{1}{p^2+1} \leftarrow \sin t$ ,  $\frac{1}{p^2} \leftarrow t$ , то за теоремами

зсунення і лінійності остаточно маємо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$\tilde{x}(t) = e^{-2t} (t - \cos t - 2 \sin t).$$

**Приклад 20.** Знайти розв'язок задачі Коші  $x'' - 2x' + x = f(t)$ ,

$$x(0) = 0, x'(0) = 0, \text{ де } f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ -1, & 1 < t < 3, \\ 2, & t > 3. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Права частина рівняння є кусково-неперервною функцією. За формулою (13) зобразимо її у вигляді

$$f(t) = -[\eta(t-1) - \eta(t-3)] + 2\eta(t-3)$$

або

$$f(t) = -\eta(t-1) + 3\eta(t-3).$$

Нехай  $x(t) \rightarrow X(p)$ . Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу з урахуванням початкових умов маємо  $x'(t) \rightarrow pX(p)$ ,  $x''(t) \rightarrow p^2X(p)$ . За таблицею оригіналів і зображень і теоремою лінійності

$$f(t) = -\eta(t-1) + 3\eta(t-3) \rightarrow -\frac{e^{-p}}{p} + 3 \cdot \frac{e^{-3p}}{p}.$$

Підставивши усі отримані вирази до заданого рівняння, отримаємо операторне рівняння у вигляді

$$(p^2 - 2p + 1)X(p) = \frac{3e^{-3p} - e^{-p}}{p},$$

звідки зображення розв'язку

$$X(p) = \frac{3e^{-3p} - e^{-p}}{p(p-1)^2}.$$

Розклавши дріб  $\frac{1}{p(p-1)^2}$  у суму найпростіших дробів, отримаємо:

$$\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Оскільки  $\frac{1}{p} \leftarrow 1$ ,  $\frac{1}{p^2} \leftarrow t$ , то за теоремами зсуення і лінійності

$$\frac{1}{p(p-1)^2} \leftarrow 1 - e^t + te^t.$$

Тоді за теоремами запізнювання і лінійності остаточно маємо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$\tilde{x}(t) = 3\left(1 - e^{t-3} + (t-3)e^{t-3}\right)\eta(t-3) - \left(1 - e^{t-1} + (t-1)e^{t-1}\right)\eta(t-1).$$

**Рівняння з нульовими початковими умовами. Метод Дюамеля.** Нехай треба розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння (29) при нульових початкових умовах  $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$ .

Якщо права частина  $f(t)$  є оригіналом і  $f(t) \rightarrow F(p)$ , то в цьому випадку зображення  $X(p)$  розв'язку задачі Коші має вигляд (33).

Розглянемо допоміжне рівняння

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 1 \tag{34}$$

з тією ж самою лівою частиною, що й в (29), і також нульовими початковими умовами. Оскільки тут  $f(t) = 1 \rightarrow \frac{1}{p}$ , то згідно (33) зображення розв'язку цього

рівняння буде

$$X_1(p) = \frac{1}{pL(p)}.$$

Тоді

$$X(p) = \frac{F(p)}{L(p)} = pF(p)X_1(p).$$

Позначимо розв'язок рівняння (34) через  $x_1(t)$  і у формулі Дюамеля (20) покладемо  $G(p) = X_1(p)$ ,  $g(t) = x_1(t)$ ,  $g(0) = x_1(0) = 0$ . Тоді отримаємо розв'язок рівняння (29) у вигляді

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot x_1'(t - \tau) d\tau. \quad (35)$$

Метод Дюамеля застосовують у випадках “нетабличної” правої частини  $f(t)$ , коли відшукування відповідного зображення  $F(p)$  викликає труднощі. Розв’язування рівняння (29) за допомогою цього методу фактично зводиться до розв’язування більш простого рівняння (34) і застосування формули (35). Отже, якщо відомий відгук системи  $x_1(t)$  на *одиничний* вхідний сигнал, то за формулою (35) можна знайти відгук  $x(t)$  цієї системи на *будь-який інший* сигнал  $f(t)$ .

**Приклад 21.** Знайти розв’язок задачі Коші

$$x'' - x' = \frac{1}{1 + e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

*Розв’язання.* Оскільки права частина рівняння не є “табличною”, то застосуємо метод Дюамеля. Спочатку розв’яжемо допоміжну задачу Коші  $x'' - x' = 1$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ . Позначимо її розв’язок через  $x_1(t)$ , тоді  $x_1(t) \rightarrow X_1(p)$ . Зображуюче рівняння має вигляд

$$(p^2 - p) \cdot X_1(p) = \frac{1}{p},$$

звідки

$$X_1(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Оскільки  $\frac{1}{p^2(p-1)} = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1}$ , то  $x_1(t) = e^t - t - 1$ . Тоді

$x_1'(t) = e^t - 1$  і за формулою (35) розв’язок вихідної задачі Коші має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \int_0^t \frac{1}{1 + e^\tau} (e^{t-\tau} - 1) d\tau = e^t \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{1 + e^\tau} d\tau - \int_0^t \frac{1}{1 + e^\tau} d\tau = \\ &= e^t - 1 - (e^t + 1) \left( t + \ln \frac{2}{e^t + 1} \right). \end{aligned}$$

Зауваження. Тут  $\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{1+e^\tau} d\tau = \int_0^t \left( \frac{1}{e^\tau} - \frac{1}{1+e^\tau} \right) d\tau = 1 - e^{-t} - \int_0^t \frac{d\tau}{1+e^\tau},$

$$\int_0^t \frac{d\tau}{1+e^\tau} = \int_2^{1+e^t} \frac{dz}{z(z-1)} = \ln \left| \frac{z-1}{z} \right| \Big|_2^{1+e^t} = t + \ln \frac{2}{1+e^t}.$$

## 6. Розв'язання систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розв'язання таких систем операційним методом принципово не відрізняється від розв'язування одного рівняння. Відміна полягає лише в тому, що замість одного операторного рівняння отримуємо систему таких рівнянь. Кожне з них буде лінійним алгебраїчним відносно зображень оригіналів, що утворюють розв'язок задачі, тому ці зображення у багатьох випадках доцільно знаходити за формулами Крамера.

**Приклад 22.** Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} - x - 2y + 9t = 0 \\ \dot{y} - 2x - y = 4e^t \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = 2.$$

Розв'язання. Позначимо  $x(t) \rightarrow X(p)$ ,  $y(t) \rightarrow Y(p)$ . Оскільки  $t \rightarrow \frac{1}{p^2}$ ,

$e^t \rightarrow \frac{1}{p-1}$ , то з урахуванням початкових умов за теоремою про

диференціювання оригіналу і теоремою лінійності отримуємо наступну систему операторних рівнянь відносно зображень  $X(p)$  й  $Y(p)$ :

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 2Y(p) = 1 - \frac{9}{p^2}, \\ -2X(p) + (p-1)Y(p) = 2 + \frac{4}{p-1}. \end{cases}$$

Знайдемо  $X(p)$  й  $Y(p)$  за формулами Крамера:  $X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta}$ ,  $Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta}$ ,

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3 = (p-3)(p+1),$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} \frac{p^2-9}{p^2} & -2 \\ \frac{2p+2}{p-1} & p-1 \end{vmatrix} = \frac{p^4 + 2p^3 - 4p^2 + 18p - 9}{p^2(p-1)},$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p-1 & \frac{p^2-9}{p^2} \\ -2 & \frac{2p+2}{p-1} \end{vmatrix} = \frac{2p^3 + 4p^2 - 18}{p^2}.$$

$$\text{Отже, } X(p) = \frac{p^4 + 2p^3 - 4p^2 + 18p - 9}{p^2(p-1)(p-3)(p+1)}, \quad Y(p) = \frac{2p^3 + 4p^2 - 18}{p^2(p-3)(p+1)}.$$

Розкладемо зображення у суму найпростіших дробів, користуючись другою теоремою розкладання:

$$X(p) = \frac{5}{p} - \frac{3}{p^2} - \frac{2}{p-1} + \frac{2}{p-3} - \frac{4}{p+1}, \quad Y(p) = -\frac{4}{p} + \frac{6}{p^2} + \frac{2}{p-3} + \frac{4}{p+1}.$$

Відновимо оригінали, застосувавши таблицю і теорему лінійності. Отже, розв'язок задачі має вигляд:

$$x(t) = 5 - 3t - 2e^t + 2e^{3t} - 4e^{-t}, \quad y(t) = -4 + 6t + 2e^{3t} + 4e^{-t}.$$

## 7. Задачі для самостійного виконання

Знайти зображення заданих функцій.

1.  $e^{5t-5}$ . 2.  $t^2 e^{t-3}$ . 3.  $e^{-t}(t+2)^3$ . 4.  $e^{2t} \sin 3t \cos 5t$ . 5.  $(t-3)^2 \eta(t-3)$ .

6.  $(t-3)e^{5t-5} \eta(t-1)$ . 7.  $e^{-2t+10} \sin^2(t-5) \eta(t-5)$ . 8.  $t \sin^3(2t-2) \eta(t-1)$ .

9.  $\begin{cases} 2-t, & 0 < t < 2, \\ 2t-4, & 2 < t < 3, \\ 0, & t < 0, \quad t > 3 \end{cases}$  10.  $\begin{cases} 2t, & 0 < t < 3, \\ t-3, & 3 < t < 6, \\ 0, & t < 0, \quad t > 6 \end{cases}$  11.  $\begin{cases} t, & 0 < t < 2, \\ 4-t, & 2 < t < 4, \\ 0, & t < 0, \quad t > 4 \end{cases}$

12.  $t^3 \cos \frac{t}{2}$ . 13.  $\frac{1-e^{4t}}{te^t}$ . 14.  $\frac{\sin^2 t}{t}$ . 15.  $\frac{ch3t - ch2t}{t}$ . 16.  $\frac{e^{3t} - e^{2t}}{t}$ .

17.  $\frac{\cos t - \cos 2t}{t}$ . 18.  $e^{-2t} \frac{\sin^3 t}{t}$ . 19.  $\frac{sh^2 3t}{t} e^{-2t}$ . 20.  $\frac{\sin 4t \cdot \sin 6t}{t}$ .

Відновити оригінал за заданим зображенням.

21.  $F(p) = \frac{2p+1}{(p+2)(p-1)^2}$ . 22.  $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$ .

23.  $F(p) = \frac{p+10}{p^3-6p^2+10p}$ . 24.  $F(p) = \frac{p+1}{p^3-2p^2-5p+6}$ .

25.  $F(p) = \frac{2p-1}{p^2+2p+7} e^{-p/2}$ . 26.  $F(p) = \frac{p+3}{p^2+8p+17} e^{-4p}$ .

Розв'язати задачу Коші.

27.  $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t^2 e^t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ .

28.  $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^t \cos \frac{t}{2}$ ,  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

29.  $\ddot{x} - 9x = \sin t - \cos t$ ,  $x(0) = -3$ ,  $\dot{x}(0) = 2$ .

30.  $\ddot{x} + 4x = 4e^{2t} + 4t^2$ ,  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 2$ .

31.  $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \frac{e^{-2t}}{t^2 + 1}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$  Вказівка: застосувати метод

Дюамеля.

32.  $\ddot{x} - 4x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 2, & t > 3, \\ 1, & 1 < t < 3, \\ 0, & t < 1. \end{cases}$

33.  $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & t > 4, \\ 2, & 2 < t < 4, \\ 0, & t < 2. \end{cases}$

34.  $\ddot{x} + 9x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad f(t) = \begin{cases} t-1, & 1 < t < 2, \\ -t+3, & 2 < t < 3, \\ 0, & t < 0, \quad t > 3. \end{cases}$

Розв'язати задачу Коші.

35.  $\begin{cases} \dot{x} - 2x - 4y = \cos t, \\ \dot{y} + x + 6y = \sin t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$

36.  $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^t, \end{cases} \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 2.$

37.  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

38.  $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2 \cos t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$

39.  $\begin{cases} \dot{x} + 3x - 4y = 9e^{2t}, \\ \dot{y} + 2x - 3y = 3e^{2t}, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$



## ЛІТЕРАТУРА

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1967. – 780 с.
2. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – М.: Наука, 1969. – 344 с.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – Ч.2. – 416 с.
6. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
7. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1975. – 407 с.
8. Иоффе П.С. Элементы операционного исчисления. – М.: Машиностроение, 1967. – 107 с.
9. Канторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. – М.: Советское радио, 1975. – 319 с.
10. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1981. – 304 с.
11. Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения: Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1964. – 104 с.
12. Мартыненко В.С. Операционное исчисление. – Киев.: Высшая школа, 1973. – 267 с.

13. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2-х ч. – К.: Техніка, 2000. – Ч.2. – 792 с.
14. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2001. – 445 с.
15. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. В 2-х т.: Учебное пособие для втузов. – М.: Наука, 1985. – Т. 2. – 560 с.
16. Письменный Д.Г. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2003. – Ч.2. – 256 с.
17. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / Под ред. А.И.Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.
18. Римский-Корсаков Б.С. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1960. – 146 с.
19. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. Учебное пособие для втузов / Под ред. Г.И.Кручковича. – М.: Высшая школа, 1970. – 512 с.
20. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Болгов В.А., Ефимов А.В., Каракулин А.Ф. и др.; под ред. А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 368 с.
21. Шелковников Ф.А., Токайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1976. – 184 с.
22. Шостак Р.Я. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1972. – 280 с.
23. Штоколо И.З. Операционное исчисление. – Киев.: Наукова думка, 1975. – 300 с.
24. Эйдерман В.Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

**Навчальне видання**

**Павленко Анатолій Васильович**

**Кагадій Лариса Петрівна**

**Копорулін Володимир Львович**

## **ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ**

**Навчальний посібник**

Тем. план 2012, поз. 96

Підписано до друку 20.02.2012. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.  
Облік.-вид. арк. 2,47. Умов. друк. арк. 2,44. Тираж 100 пр. Замовлення № 14.

Національна металургійна академія України  
49600, м. Дніпропетровськ- 5, пр. Гагаріна, 4

---

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ