МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Л.П. КАГАДІЙ, А.В. ПАВЛЕНКО, К.У. ЧУДНОВ

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЧАСТИНА 1

Затверджено на засіданні Вченої ради академії як навчальний посібник

Дніпропетровськ НМетАУ 2010

УДК 517 (07)

Кагадій Л.П., Павленко А.В., Чуднов К.У. Вища математика. Частина 1: Навчальний посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2010. - 86 с.

Навчальний посібник містить один з перших розділів дисципліни “Вища математика” (“Лінійна алгебра і аналітична геометрія”), структурований за модульним принципом, а також приклади залікових модулів.

Призначений для підготовки та здачі модулів студентами усіх спеціальностей за умов використання кредитно-модульної системи організації навчального процесу.

Іл. 32. Бібліогр.: 6 найм.

Відповідальний за випуск А.В.Павленко, д-р фіз.-мат.наук,проф.

Рецензенти: Л.Я. Фомичова ,канд. техн.наук, доц.. (НГУ)
А.В.Сясєв , канд. фіз.-мат. наук ,доц. (ДНУ)

ВСТУП

Навчальний посібник структурований за модульним принципом. Перша частина охоплює матеріал курсу дисципліни «Вища математика», що за існуючими програмами викладається в першому семестрі. Вона містить повний лекційний курс, детально розв'язані типові задачі та приклади, певну кількість ретельно підібраних задач для самостійної роботи, а також зразки білетів залікових модулів: №1- лінійна алгебра, №2 – векторна алгебра та її застосування, №3 – аналітична геометрія на площині, №4 – аналітична геометрія у просторі.

1. МОДУЛЬ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1. Визначення матриці. Окремі види матриць

Означення 1. Матрицею розмірів m на n називається сукупність $m \cdot n$ чисел, які розміщені у вигляді прямокутної таблиці, що містить m рядків і n стовпців.

Будемо записувати матрицю у вигляді

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

або скорочено $A = \|a_{ij}\|, \ (i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n})$. Символи $\|\cdot\|$ або $(\cdot), [\cdot]$ – є символами матриці. Числа a_{ij}, які утворюють дану матрицю, називаються її елементами. Перший індекс елемента вказує номер рядка, а другий – номер стовпця, на перетину яких знаходиться даний елемент.

Матриця, яка складається з одного рядка, називається *однорядковою матрицею*. Матриця, що має один стовпець, називається *одностовпцевою*. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається *нульовою* матрицею і позначається через 0.

Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпців, то матриця називається *квадратною.* Квадратну матрицю, яка має n рядків і k стовпців, називають *матрицею* $n-$*го порядку*.

Сукупність елементів квадратної матриці, які розташовані на лінії, що сполучає лівий верхній кут з правим нижнім, називається головною діагоналлю. Квадратні матриці, у яких відмінні від нуля лише елементи головної діагоналі, називаються *діагональними матрицями*. Діагональна матриця, у якої всі елементи діагоналі дорівнюють 1, називається *одиничною матрицею* и позначається буквою E .

$$E = \begin{Vmatrix} 1\,0 & \dots & 0 \\ 0\,1 & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ 0\,0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матриця $A^T = \|a_{ij}^T\|$ називається транспонованою щодо матриці $A = \|a_{ij}\|$, якщо її елементи $a_{ij}^T = a_{ji}$ (стовпці матриці A є рядками матриці A^T). Коли $A = A^T$, то матриця A називається *симетричною*.

Дві матриці однакового розміру $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ називаються рівними $A = B$, якщо $a_{ij} = b_{ij}$ при всіх i, j.

Скорочене позначення сум

У математиці часто трапляється сума великої кількості додатків $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, які відрізняються між собою тільки індексами. Для спрощення запису такої суми використовується символ $\sum\limits_{k=1}^{n}$, після якого стоїть деякий вираз зі змінним індексом k. Цей символ означає суму таких виразів для всіх значень індексу k від 1 до n. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Зауважимо, що вираз $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ означає те саме, що й $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, тобто змінний індекс можна позначати довільною буквою. Скорочене позначення має прості властивості, які викликають з відомих властивостей додавання, а саме:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} ca_i = c\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$;   2) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i + \sum\limits_{i=m+1}^{n} a_i, \quad m < n;$

3) $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i$.

1.2. Дії над матрицями

Нехай матриці $A=\|a_{ij}\|$ і $B=\|b_{ij}\|$ – одного розміру. *Сумою* двох матриць A та B називається матриця $C=\|c_{ij}\|$, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A і B, наприклад,

$$C=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{12}+b_{22} \end{Vmatrix}.$$

Добутком матриці $A=\|a_{ij}\|$ на число α називається матриця, елементи якої отримуються із відповідних елементів матриці A множенням на число α, наприклад,

$$\alpha A=\alpha\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{22} & \alpha a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Різницею матриць A і B, $(A-B)$ називається сума матриць A і $-B$.
Операції додавання матриць і множення на число мають такі властивості:

1) $A+B=B+A;$
2) $A+(B+C)=(A+B)+C;$
3) $A+0=A;$
4) $A+(-A)=0;$
5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B.$

Множення матриць

Добуток $A\cdot B$ матриці A на матрицю B визначається тільки за умови, що кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

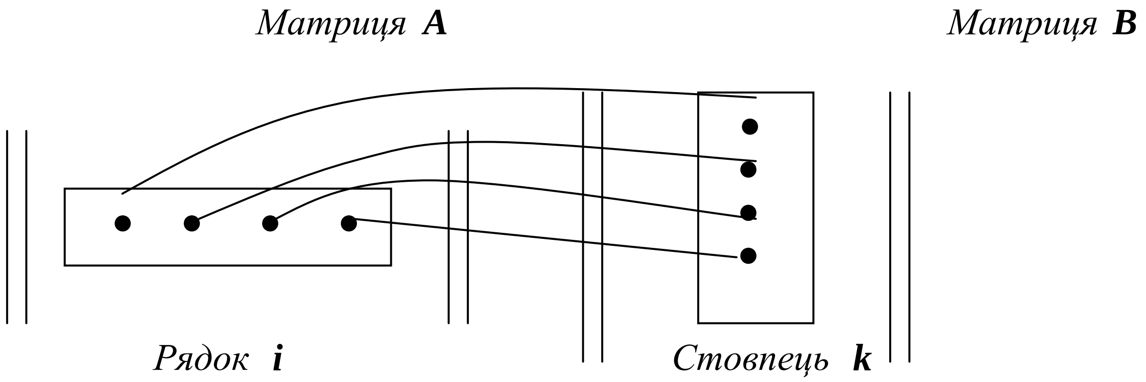
Наприклад, надані матриця A розміру $m\times n$ і матриця B розміру $n\times p$:

$A=\|a_{ij}\|,\ B=\|b_{ij}\|,$ де $i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n};\ k=\overline{1,p}$.

Добутком $\boldsymbol{AB}$ матриці $\boldsymbol{A}=\left\|\boldsymbol{a_{ij}}\right\|$ та $\boldsymbol{B}=\left\|\boldsymbol{b_{jk}}\right\|$, записаних у визначеній послідовності ($\boldsymbol{A}$ – перша, $\boldsymbol{B}$ – друга), називається матриця $\boldsymbol{C}=\left\|\boldsymbol{c_{ik}}\right\|$, елементи $\boldsymbol{c_{ik}}$ якої визначаються за таким співвідношенням:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}, \text{ де } i=\overline{1,m}; \quad k=\overline{1,p}.$$

Отже, елементи матриці-добутку визначаються так: елемент c_{ik}, який знаходиться на перетину i – го рядка і k – го стовпця матриці C, дорівнює сумі добутків елементів i – го рядка матриці A на відповідні елементи k – го стовпця матриці B.



П р и к л а д

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{Vmatrix}$$

Відзначимо, що добуток двох прямокутних матриць – це прямокутна матриця, кількість рядків якої дорівнює кількості рядків першої матриці, а кількість стовпців дорівнює кількості стовпців другої матриці.

З означення добутку матриць зрозуміло, що з можливості множення матриці $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$ не випливає можливість множення $\boldsymbol{B}$ на $\boldsymbol{A}$. Так, в розглянутому прикладі не можна утворити добуток $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ тому, що кількість стовпців матриці $\boldsymbol{B}$ не дорівнює кількості рядків матриці $\boldsymbol{A}$.

Добутки AB і BA одночасно існують, якщо A і B – квадратні матриці одного і того ж порядку.

Відзначимо ще одну важливу властивість: множення матриць не комутативне, тобто для довільних матриць A і B порядку $n>1$ $AB \neq BA.$

Приклад.

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$AB=\begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad BA=\begin{Vmatrix} 2 & -2 \\ 7 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Проте для матриці A та B можливо, що $A \cdot B = B \cdot A$. Такі матриці назвемо *переставними.* Наприклад, E і O – переставні з будь-якою матрицею того ж порядку. Маємо $E \cdot A = A \cdot E = A, \quad O \cdot A = A \cdot O = O.$

Множення матриць має такі властивості:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$
2. $\alpha(AB) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B);$
3. $C(A+B) = CA + CB;$
4. $(A+B) \cdot C = AC + BC,$

де A, B, C – матриці, а α – число.

Приклад.

Знайти **AB** та **BA,** якщо це можливо де $A=\begin{Vmatrix} -1 & 8 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}$.

Розв'язок. Добуток $A \cdot B$ не можливий, проте

$$B \cdot A = \begin{Vmatrix} -7+3 & 56+2 \\ 4+9 & -32+6 \\ -5+27 & 40+18 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -4 & 58 \\ 13 & -26 \\ 22 & 58 \end{Vmatrix}.$$

1.3. Визначник матриці. Властивості визначників

Визначник або детермінант квадратної матриці – це число, яке ставиться у відповідність матриці і може бути виражене через її елементи.

Нехай дана матриця $A = \begin{Vmatrix} a_n a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{24} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{Vmatrix}$.

Визначник матриці A будемо позначати $det\, A$ або Δ

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_n a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{24} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення 2. Детермінантом матриці $A = \|a_{ij}\|$ $n-$го порядку $(n > 1)$ називається число

$$det\, A = \sum_{n=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k},$$

де $M_{1k}-$детермінант матриці порядку $(n-1)$, утвореної з матриці A викреслюванням першого рядка і $k-$го стовпця.

Число M_{1k} називається мінором елемента a_{1k} матриці A.

Матриця порядку 1 складається з одного числа і її детермінант вважається таким, що дорівнює цьому числу.

Застосуємо введене означення визначника до матриць 2 і 3 порядків. Для матриці

$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$ маємо $M_{11} = a_{22}$, $M_{12} = a_{21}$. Тому її визначник

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Для матриці третього порядку

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

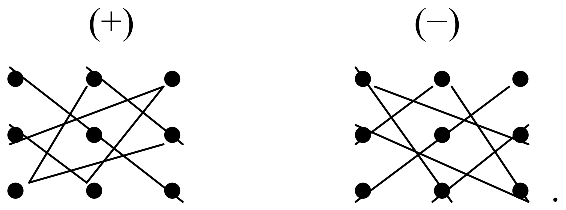
$$det\, A = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1K},$$

де $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Отож $$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Отриманий результат проілюструємо схемою.



Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці A називається детермінант матриці, утвореної з матриці A викреслюванням $i-$го рядка та $j-$го стовпця. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці A називається добуток $(-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} – мінор елемента a_{ij}.

Отже, *детермінант матриці* – це число, яке дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення, тобто

$$\det A = \sum_{k=1}^{k} a_{1k} A_{1k}.$$

Можно показати, що

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Доведемо властивості визначників для матриць другого порядку, але вони вірні для квадратних матриць любого порядку.

1. При транспонуванні матриці значення її визначника не змінюється

$$\det A = \det A^T.$$

Нехай $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$. Тоді $\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$.

Внаслідок цієї властивості всі твердження, які будуть доведені далі, однаково справедливі як для рядків, так і для стовпців матриці.

2. При перестановці двох рядків (стовпців) матриці знак її визначника змінюється на протилежний, а його абсолютне значення не змінюється.
Справді,

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. Визначник матриці, що має два однакові рядки (стовпця), дорівнює нулю.

Справді, якщо поміняти місцями ці два однакові рядки (стовпці), то визначник не зміниться. З іншого боку, після перестановки двох рядків (стовпців) визначник міняє знак. Отже, маємо $\det A = -\det A$. Звідси випливає, що $\det A = 0$.

4. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника мають спільний множник m, то його можна винести за знак визначника.

$$\begin{vmatrix} ma_{11}a_{12} \\ ma_{21}a_{22} \end{vmatrix} = ma_{11}a_{12} - ma_{12}a_{21} = m(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5. Якщо кожен елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох додатків, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників за формулою

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Доводиться перевіркою.

6. Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення дорівнює визначнику, а сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} \det A, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на деяке число

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+\lambda \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Властивості 6 і 8 дають можливість перетворити в нуль усі елементи рядка (стовпця), крім одного, і тим самим звести обчислювання визначника $n-$ го порядку до визначника $(n-1)-$го порядку і т.д.

Приклад. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Додамо до другого рядка перший, помножений на -2; до третього – перший, помножений на -3, а до четвертого – перший, помножений на -4. Отримаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

Тепер розкладемо визначник за елементами першого стовпця

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}.$$

Винесемо спільний множник елементів другого рядка і другого стовпця:

$$\Delta = (-2)\cdot(-2)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 5 \\ -7 & 5 & -13 \end{vmatrix}.$$

У новому визначнику легко отримати нулі в першому стовці. Додамо перший рядок до другого, а до третього – перший, помножений на -7. Тоді визначник набере вигляд:

$$\Delta = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 36 \end{vmatrix}.$$

Розклавши визначник за елементами першого стовпця, отримаємо

$$\Delta = 4(-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 36 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-36 - 4) = 160.$$

2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Розв’язування систем лінійних рівнянь за правилом Крамера

Системою n лінійних рівнянь з n невідомими — це система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Коефіцієнти a_{ij} при невідомих x_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ називаються коефіцієнтами системи і мають два індекси. Перший індекс вказує порядковий номер рівняння, в якому знаходиться цей коефіцієнт, другий індекс – номер невідомого, біля якого стоїть цей коефіцієнт. Величини $b_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ називаються вільними членами. Сукупність чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ називається розв’язком системи, якщо заміна x_j на x_j^0 перетворює кожне рівняння на тотожність. Система, яка має розв’язок, називається сумісною, а коли не має його – несумісною. Система з одним розв’язком – визначена система. Система з нескінченною кількістю розв’язків – це система невизначена.

Перейдемо до розв’язку системи рівнянь. Розв’яжемо спочатку систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на a_{22}, друге на $(-a_{12})$ і додамо перше до другого.

$$
\begin{array}{l}
+\begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1a_{22} \\ -a_{21}a_{12}x - a_{12}a_{22}y = -a_{12}b_2 \end{cases} \\
\hline
x(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \ .
\end{array}
$$

Одержимо

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Позначимо $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – визначник системи, який складається із коефіцієнтів при невідомих; $\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ – визначник, який отримуємо із визначника системи Δ, замінивши в ньому 1-й стовпець стовпцем із вільних членів. Тоді, $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$.

Аналогічно, $$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{11} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Формули $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ називаються формулами Крамера.

При розв'язку системи можливі наступні випадки:

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то система має розв'язок (сумісна). С геометричної точки зору, прямі, які є графіками рівнянь перетинаються в одній точці.
2. Якщо $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$, або $\Delta_y \neq 0$, або $\Delta_x \neq 0$ і $\Delta_y \neq 0$, то система не має розв'язку (несумісна). Прямі паралельні.
3. Якщо $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, то система невизначена, вона має нескінченну кількість розв'язків. Прямі зливаються.

Систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

можна розв'язати за допомогою формул Крамера

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$, де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – визначник системи,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0,$ то система має розв'язок, (сумісна).

Якщо $\Delta = 0$, а хоч би один із $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z \neq 0,$ то система не має розв'язку (несумісна).

Якщо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0,$ то система або несумісна, або невизначена.

П р и к л а д . Розв'язати за допомогою формул Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

Визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Отже,

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Система (2.1) n лінійних рівнянь з n невідомими розв'язується за допомогою формул Крамера $x_i = \dfrac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$, где $\left(i = \overline{1, n}\right)$, Δ – визначник системи,

Δ_{x_i} – визначник, який отримуємо із визначника Δ системи, замінивши в ньому i – й стовпець стовпцем із вільних членів.

2. 2. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним способом

Обернена матриця

Квадратна матриця A називається невиродженою або неособливою, якщо її визначник відмінний від нуля, тобто $\det A \neq 0.$

Квадратна матриця зветься оберненою до квадратної матриці, якщо виконується нерівність $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$ де E – одинична матриця того ж порядку, що A і $A^{-1}.$

Нехай маємо не вироджену матрицю

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix},$$ тобто її визначник $$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Оберненою матрицею є матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix},$$ де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A. Обернена матриця існує тільки для не виродженої матриці. Перевіряється обчисленням добутка $AA^{-1} = E,$ або $A^{-1}A = E.$

Нехай дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Матриця системи $$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}; \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$$ – матриця-стовпець з невідомих.

$$B=\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix} -$$ матриця-стовпець з вільних членів.

Використовуючи операцію множення матриць, систему можна записати у вигляді $A \cdot X = B.$

Це матрична форма запису даної системи рівнянь.

Якщо $\Delta = det\, A \neq 0,$ то матричне рівняння має розв'язок. Помножимо рівняння зліва на матрицю A^{-1}, отримаємо

$$A^{-1} A \cdot X = A^{-1} B, \quad \text{або} \quad X = A^{-1} B \qquad \left(A^{-1} A = E\right).$$

Приклад. Розв'язати матричним способом систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 20 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -8 \end{cases}.$$

Маємо $$A=\begin{Vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & -7 & 8 \\ 4 & 5 & -7 \end{Vmatrix}, \quad X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 4 \\ 20 \\ -8 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки визначник матриці A

$$\Delta = det\, A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & -7 & 8 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 440 \neq 0,$$

матриця A невироджена і має обернену

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix},$$ де $A_{ij} -$ алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}.

У нашому прикладі $$A^{-1} = \frac{1}{440}\begin{Vmatrix} 9 & 41 & 52 \\ 67 & -37 & -4 \\ 53 & -3 & -36 \end{Vmatrix}.$$

Тому

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{440} \begin{Vmatrix} 9 & 41 & 52 \\ 67 & -37 & -4 \\ 53 & -3 & -36 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 \\ 20 \\ -8 \end{Vmatrix} = \frac{1}{440} \begin{Vmatrix} 440 \\ -440 \\ 440 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Звідси отримуємо

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 1.$$

Зразок білета залікового модуля №1

1. Розв'язати систему: $\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

   а) матричним методом **(4 бали);**

   б) за формулами Крамера **(4 бали).**

2. Знайти **AB** та **BA**, якщо це можливо

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 8 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}.$$ **(1 бал) .**

3. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$ **(3 бали)** .

3. МОДУЛЬ 2 . ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

3.1. Означення вектора

Величини, з якими ми зустрічаємося у механіці, фізиці та інших прикладних дисциплінах, бувають двоякого роду. Одні з них (наприклад, температура, робота, об'єм та інші) повністю визначаються за своїм числовим значенням у тій системі, яку ми вибрали, а інші (наприклад, сила, швидкість т. ін.) визначаються тільки тоді, коли відомі їх числові значення та напрямок у просторі. Величини першого роду звуться *скалярними* або *скалярами*. Величини другого роду звуться *векторними*. Векторну величину (або *вектор*) можна відобразити у вигляді відрізка у просторі, якщо домовитися про одиницю масштабу. При цьому такий відрізок буде орієнтованим, тобто у нього повинні бути вказані початок і кінець.

Абстрагуючись від конкретних властивостей, фізичних векторних величин, які зустрічаються у природі, ми дістаємо поняття *геометричного вектора* або взагалі вектора.

Напрямлений відрізок (або теж саме упорядковану пару точок) будемо звати *вектором.*

Нульовим називають такий вектор, у якого довжина дорівнює нулю, тобто початкова точка збігається з кінцевою. Напрям для нульового вектора не має сенсу.

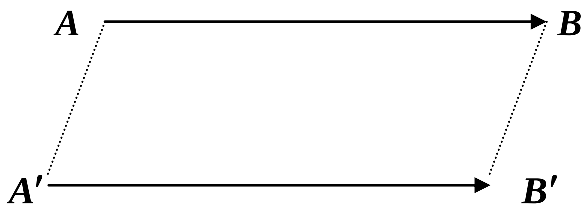
Напрям на відрізку позначають двома буквами $\overline{\boldsymbol{AB}}$ ($\boldsymbol{A} -$початок, $\boldsymbol{B} -$кінець) або однією буквою $\overline{\boldsymbol{a}}$ з рискою (стрілкою) вгорі.

Відстань між початком та кінцем вектора називають його *довжиною* або *модулем* і позначають $\left|\overline{\boldsymbol{AB}}\right|$ або $\left|\overline{\boldsymbol{a}}\right|$.

Вектори $\overline{\boldsymbol{a}}$ $\boldsymbol{i}$ $\overline{\boldsymbol{b}}$ називаються *колінеарними*, якщо вони розташовані на одній прямій, або на паралельних прямих. Тобто вектори колінеарні, якщо існує пряма, якій вони паралельні.

Вектори $\overline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{c}}$ називають *компланарними*, якщо існує площина, якій вони паралельні.

Два вектора *рівні*, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені та мають однакові довжини. З останнього визначення дістаємо, що, якщо ми виберемо будь-яку точку $\boldsymbol{A'}$, то зможемо побудувати (і тільки один) вектор $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$, який є рівним якомусь заданому вектору $\overline{AB}$, або, як кажуть перенесемо вектор $\overline{AB}$ в точку A' .



3.2. Лінійні дії (операції) над векторами

До лінійних операцій над векторами відносять добуток вектора на скаляр та суму (і пов’язану з нею різницю) векторів.

Добутком вектора $\bar{a}$ на дійсне число α називається вектор $\bar{b}$, який визначається так:

1) $|\bar{b}| = |\alpha| \cdot |\bar{a}|$;
2) вектор $\bar{b}$, колінеарний вектору $\bar{a}$;
3) вектори $\bar{b}$ і $\bar{a}$ напрямлені однаково, якщо $\alpha < 0$. Якщо $\alpha = 0$, то з умови (1) дістаємо, що $\bar{b} = 0$. Добуток вектора $\bar{a}$ на число α означається $\alpha\,\bar{a}$.

Розглянемо властивості лінійних операцій.:

1. Для будь-яких чисел α і β та будь-якого вектора $\bar{a}$ справедлива рівність $\alpha(\beta\,\bar{a}) = (\alpha\,\beta)\bar{a}$.

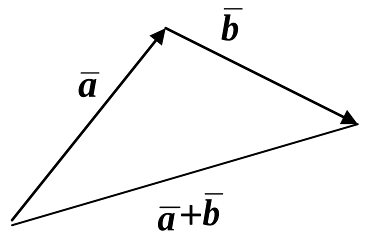
Дійсно, вектори, які є в обох частинах рівності, яку ми доводемо, мають одну і ту ж довжину (модуль) $|\alpha||\beta||\bar{a}|$. Вони колінеарні і однаково напрямлені, тому що їх напрямок співпадає з напрямком $\bar{a}$, якщо α і β одного знака, і протилежні напрямку $\bar{a}$, якщо α і β мають різні знаки.

Властивість доведена.

2. Нехай є вектор $\bar{a}$, який не дорівнює нулю. Для будь-якого колінеарного йому вектора $\bar{b}$ існує і притому тільки одне число λ, яке задовольняє рівності $\bar{b} = \lambda\bar{\alpha}$.

Дійсно, цим числом є $\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$, або $-\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$ в залежності від того, напрямлені вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ однаково чи протилежно. Якщо $\bar{b} = 0$, то $\lambda = 0$. Єдиність множника λ очевидна: при помноженні $\bar{a}$ на різні числа одержуємо різні вектори.

Сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, що з'єднує початок вектора $\bar{a}$ з кінцем вектора $\bar{b}$ за умови, що кінець вектора $\bar{a}$ збігається з початком вектора $\bar{b}$.

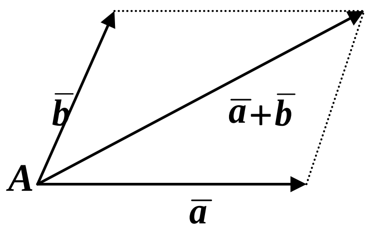


Правило за цим визначенням називають "правилом трикутника". Легко перевірити такі правила складання векторів:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a};$ 2) $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c};$

3) $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\,\bar{a} + \beta\,\bar{b};$ 4) $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\,\bar{a} + \beta\,\bar{a}.$

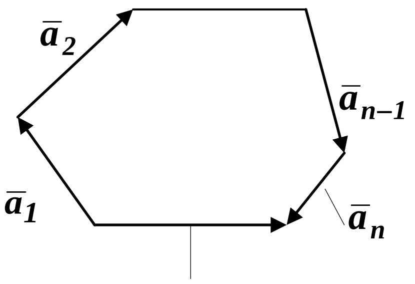
Зауваження. Відомі з механіки закони складання векторних величин (сил, швидкостей, прискорень і.т.д.) є висновком ще одного правила складання векторів, яке називається *"правилом паралелограма"*:



Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ прикладені до їх спільного початку A і на цих векторах побудований паралелограм, то їх сума $\bar{a} + \bar{b}$ (або $\bar{b} + \bar{a}$) є діагональ отриманого паралелограма, яка виходить з їх спільного початку A.

Правило трикутника можна поширити на будь-яке число доданків: щоб побудувати суму будь-якого числа векторів, треба з кінця першого вектора-доданка відкласти другий, з кінця другого – третій і т.д.

Вектор, який з'єднує початок першого і кінець останнього,



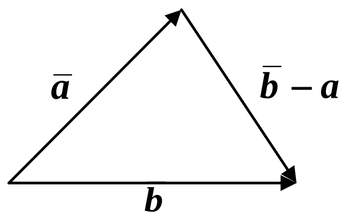
і є сумою, яку ми розшукували.

Це правило називають “*правилом замикання ламаної до многокутни ка”.*

$a_1 + a_2 + ... + a_n$

Вектор, який колінеарний до даного вектора $\bar{a}$, рівний йому за довжиною і протилежно напрямлений (тобто $(-1)\bar{a}$), називається *протилежним* вектором до вектора $\bar{a}$. Він позначається $-\bar{a}$.

Різницею $\bar{b} - \bar{a}$ векторів $\bar{b}$ і $\bar{a}$ є сума векторів $\bar{b}$ і $-\bar{a}$. Очевидно, що $\bar{a} - \bar{a} = \bar{a} + (-\bar{a}) = 0$ для будь-якого вектора.



Якщо вектори $\bar{b}$ і $\bar{a}$ мають спільне начало, то їх різниця є відрізок, який з’єднує їх кінці і “напрямлений від від’ємника” $\bar{a}$ до “зменшуваного”. Таким чином, ми розглянули операцію віднімання векторів, як обернену операції складання. Її властивості випливають із властивостей доданка і тому окремо ми їх не будемо формулювати.

3.3. Лінійна залежність векторів

Розглянемо декілька векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k$. Будь-який вектор $\bar{b}$ у вигляді $b = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + ... + \alpha_k\bar{a}_k$, де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ –якісь числа, називається лінійною комбінацією даних векторів. Числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ називаються коефіцієнтами лінійної комбінації. Лінійна комбінація декількох векторів називається тривіальною, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулю. Отож, тривіальна лінійна комбінація будь-яких векторів дорівнює нулю. Лінійна комбінація нетривіальна, якщо хоча б один з її коефіцієнтів відрізняється від нуля.

Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k$ *називаються лінійно залежними, якщо існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів; інакше, якщо існують такі коефіцієнти* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k$, *що* $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + ... + \alpha_k\bar{a}_k = 0$ *і* $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_k^2 \neq 0$.

У протилежному випадку, тобто коли тільки тривіальна лінійна комбінація векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k$ дорівнює нулю, ці вектори називаються лінійно незалежними. Якщо вектори лінійно незалежні, то з рівності $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\alpha_1 \bar{a}_1} + \boldsymbol{\alpha_2 \bar{a}_2} + \ldots + \boldsymbol{\alpha_k \bar{a}_k} = \boldsymbol{0}$ дістаємо $\boldsymbol{\alpha_1} = \boldsymbol{\alpha_2} = \ldots \boldsymbol{\alpha_n} = \boldsymbol{0}$.

Відзначимо, що:

1. Будь-які два колінеарних вектори лінійно залежні, і навпаки, два неколінеарних вектори лінійно незалежні.
2. Три компланарних вектори завжди лінійно залежні, і навпаки, три некомпланарні вектори лінійно незалежні.
3. Кожні чотири вектори лінійно залежні.

Приклад. З'ясувати, чи будуть вектори $\bar{\boldsymbol{a}}_1 = (-3{,}1{,}5)$ і $\bar{\boldsymbol{a}}_2 = (9,-3,-15)$ лінійно залежними?

Розв'язок. Два вектори є лінійно залежними, якщо існують такі два числа α_1, α_2 (хоча б одне з яких не дорівнює нулю), для яких справджується рівність $\alpha_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$, або $\boldsymbol{\alpha_1} \cdot (-3;1;5) + \boldsymbol{\alpha_2} \cdot (9;-3;-15) = \boldsymbol{0}$,

$$(-3\alpha_1 + 9\alpha_2; \alpha_1 - 3\alpha_2; 5\alpha_1 - 15\alpha_2) = (0;0;0).$$

Звідси отримуємо систему

$$\begin{cases} -3\alpha_1 + 9\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 5\alpha_1 - 15\alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

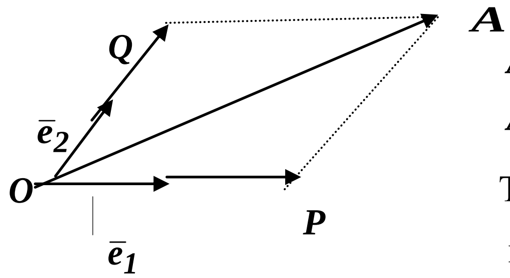
Маємо $\alpha_1 = 3\alpha_2$. Отже при довільному $\alpha_2 \neq 0$ для векторів $\bar{\boldsymbol{a}}_1$ і $\bar{\boldsymbol{a}}_2$ справедлива рівність $3\alpha_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$, тобто $\boldsymbol{a_2} = -3 \cdot \boldsymbol{a_1}$. Отже, вектори $\bar{\boldsymbol{a}}_1$ і $\bar{\boldsymbol{a}}_2$ - лінійно залежні.

3.4. Розкладання вектора за базисом

Якщо вектор є лінійною комбінацією яких-небудь, то кажуть, що він розкладається за даними векторами.

Теорема 1*.* Нехай є два неколінеарних вектора $\bar{\boldsymbol{e}}_1$ і $\bar{\boldsymbol{e}}_2$. Будь-який компланарний з ними вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ розкладається за ними і це розкладання єдине.

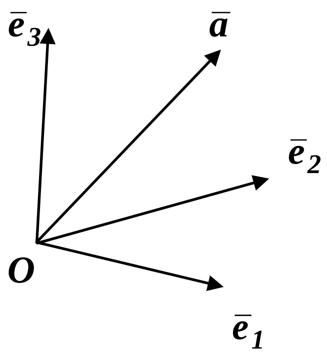
Д о в е д е н н я. Примітимо, що обидва вектори $\bar{\boldsymbol{e}}_1$ і $\bar{\boldsymbol{e}}_2$ ненульові, тому що, якби хоч один з них дорівнював нулю, то вони були б колінеарними. В загальному випадку перенесемо усі три вектори у спільну точку $\boldsymbol{O}$. Через кінець



A вектора $\overline{OA} = \bar{a}$ проведемо прямі AP та AQ, паралельно до векторів $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$. Тоді $\bar{a} = \overline{OQ} + \overline{OP}$, причому, вектори $\overline{OP}$ і $\overline{OQ}$ колінеарні до векторів $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$ відповідно.

Із другої властивості лінійних операцій (добутку вектора на число) дістаємо, що існують і визначаються єдино такі числа α_1 і α_2, що $\overline{OP} = \alpha_1\bar{e}_1$, $\overline{OQ} = \alpha_2\bar{e}_2$. Таким чином, $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2$, і т.д. Припустимо, що існує друга лінійна комбінація $\beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2$, яка дорівнює $\bar{a}$, причому, наприклад, $\alpha_1 \neq \beta_1$. Тоді $\beta_1\bar{e}_1 = \overline{OP} = \overline{\alpha_1 e_1}$, тому що інакше ми отримали б дві прямі, які проходять через точку A, паралельно вектору $\bar{e}_2$. З останньої рівності дістаємо, що $\alpha_1 = \beta_1$ і, таким чином, ми приходимо до протиріччя.

Теорема 2. Нехай дані три некомпланарних вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Будь-який вектор $\bar{a}$ розкладається за ними і це розкладання єдине.



Тобто вектор $\bar{a}$ може бути єдиним чином розкладеним по векторам $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ у вигляді

$$\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3 .$$

Доведення цієї теореми аналогічно доведенню теореми 1.

Базисом у просторі називають три некомпланарних вектори, які взяті у визначеному порядку.

Таким чином, базис дозволяє однозначно зіставити кожному вектору упорядковану трійку чисел – координати розкладання цього вектора по векторам базиса. Навпаки, кожній упорядкованій трійці чисел $\alpha_1\alpha_2, \alpha_3$ за допомогою базиса можемо зіставити вектор, якщо складемо лінійну комбінацію $\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$, де $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – вектори базиса.

Базисом на площині називають два неколінеарні вектори цієї площини, які взяті у визначеному порядку.

Якщо на площині вибраний базис, то тим самим кожному вектору однозначно зіставлена упорядкована пара чисел, і , навпаки, кожній упорядкованій парі чисел однозначно зіставляється вектор.

Якщо $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – базис і $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$, то числа $\alpha_1\alpha_2, \alpha_3$ називаються *компонентами* (або координатами вектора $\bar{a}$ у даному базисі). Так само визначаються координи вектора на площині.

Якщо у заданому базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ вектор $\bar{a}$ має координати $\alpha_1\alpha_2, \alpha_3$, то будемо записувати так

$$\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

У аналітичній геометрії геометричні міркування про вектори зводяться до обчислень, у яких приймають участь компоненти цих векторів.

Наступні два правила показують, як діються відомі нам операції з векторами, якщо задані їх компоненти.

1. При помноженні вектора на число усі його компоненти помножаються на це число.

Дійсно, якщо $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$, то

$$\lambda\bar{a} = \lambda(\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3) = (\lambda_1\alpha_1)\bar{e}_1 + (\lambda_1\alpha_2)\bar{e}_2 + (\lambda_1\alpha_3)\bar{e}_3.$$

2. При додаванні (відніманні) векторів додаються (віднімаються) їх відповідні компоненти.

Дійсно, якщо $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$ і $\bar{b} = \beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \beta_3\bar{e}_3$, то

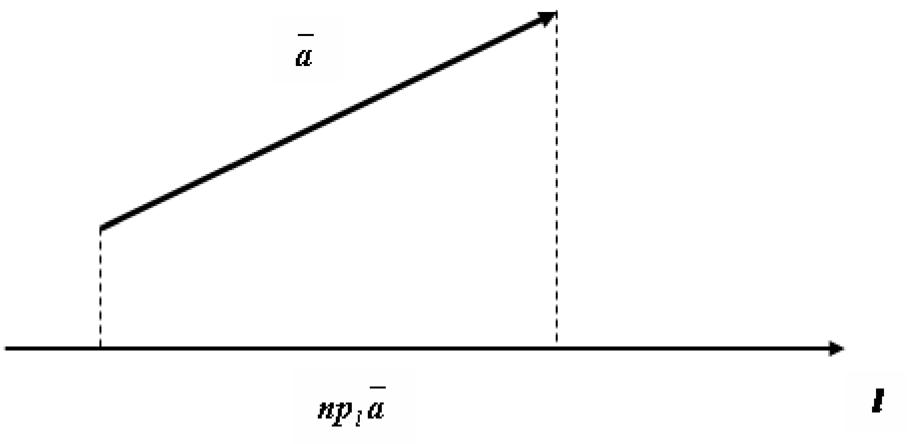
$$\bar{a} \pm \bar{b} = (\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3) \pm (\beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \beta_3\bar{e}_3) = (\alpha_1 \pm \beta_1)\bar{e}_1 +$$

$$+ (\alpha_2 \pm \beta_2)\bar{e}_2 + (\alpha_3 \pm \beta_3)\bar{e}_3.$$

3.4.1. Проекція вектора на вісь

Проекцією вектора $\bar{a}$ на вісь l називається число, що дорівнює довжині відрізка осі l, який міститься між проекцією початкової точки і кінцевої, взяте зі знаком «+», якщо напрямки вектора $\bar{a}$ та осі l збігаються, і зі знаком «-», якщо ці напрямки протилежні.

Проекція на вісь позначається так: $\pi\rho_l \bar{a}$.



$$\pi\rho_l \bar{a} = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\varphi.$$

Основні властивості проекції вектора на вісь полягають у тому, що лінійні операції над векторами приводять до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів, а саме:

$$\pi\rho_l\left(\alpha\bar{a}\right) = \alpha \cdot \pi\rho_l\left(\bar{a}\right), \qquad \pi\rho_l\left(\bar{a}+\bar{b}\right) = \pi\rho_l\left(\bar{a}\right) + \pi\rho_l\left(\bar{b}\right).$$

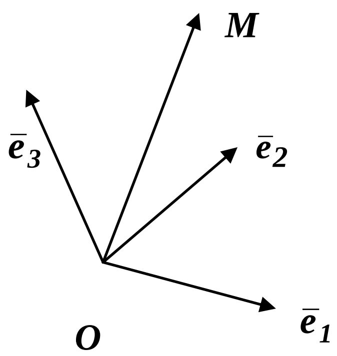
Приклад. Знайти $\pi\rho_l\left(\bar{a}+\bar{b}\right)$, якщо $\left|\bar{a}\right| = 2, \left|\bar{b}\right| = 4, \varphi = 30^0$.

Розв'язок. Згідно з формулами

$$\pi\rho_l\left(\bar{a}+\bar{b}\right) = 2\cdot\cos 30^0 + 4\cdot\cos 30^0 = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

3.5. Системи координат. Декартова система координат

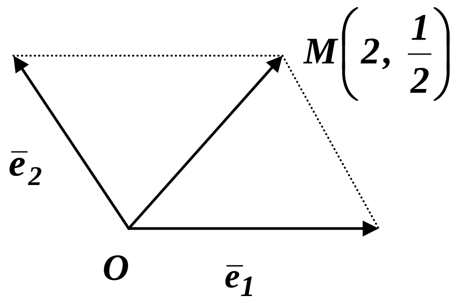
Зафіксуємо у просторі точку O і розглянемо будь-яку точку M . *Радіусом-вектором* точки M по відношенню до точки O називається вектор $\overline{OM}$. Якщо у просторі, крім точки O, вибраний якийсь базис, то точці M можна зіставити упорядковану трійку чисел – координати її радіуса-вектора.



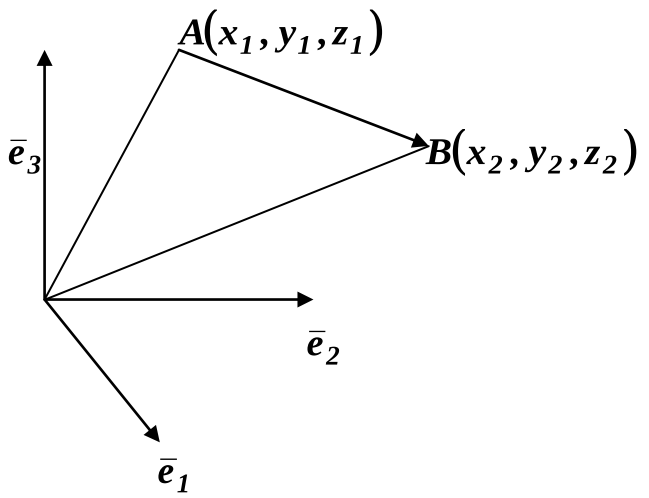
Декартовою системою координат у просторі називається сукупність точки та базиса.

Точка називається *початком координат*; прямі, які проходять через початок координат у напрямку базисних векторів, називаються о*сями координат*. Перша пряма – віссю абсцис, друга – віссю ординат, третя – віссю аплікат. Площини, які проходять через осі координат, називаються *координатними площинами*.

Координати радіуса-вектора точки M по відношенню до початку координат, називаються *координатами* точки M у системі координат, яку ми розглядаємо. Перша координата називається абсцисою, друга – ординатою, третя – аплікатою. Аналогічно визначаються декартові координати на площині.Тільки тепер точка M буде вже мати дві координати – абсцису та ординату. Координати точки звичайно записують у дужках після букви, яка означає точку.



Наприклад ,запис $M\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ означає, що точка M має координати 2 і $\frac{1}{2}$ у системі координат, яку ми вибрали на площині.



Розглянемо дві точки A і B, координати яких відносно якоїсь декартової системи координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ відповідно дорівнюють x_1, y_1, z_1 та $x_2 y_2 z_2$, тобто $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.Поставимо задачу знайти координати вектора $\overline{AB}$.

Очевидно, що $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Координати радіусів-векторів $\overline{OB}$ і $\overline{OA}$ відповідно дорівнюють $\overline{OB} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{OA} = (x_1, y_1, z_1)$. За правилом додавання (віднімання) векторів, які задаються своїми координатами, дістаємо, що $\overline{AB}$ має координати: $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Цим доказано таке твердження:

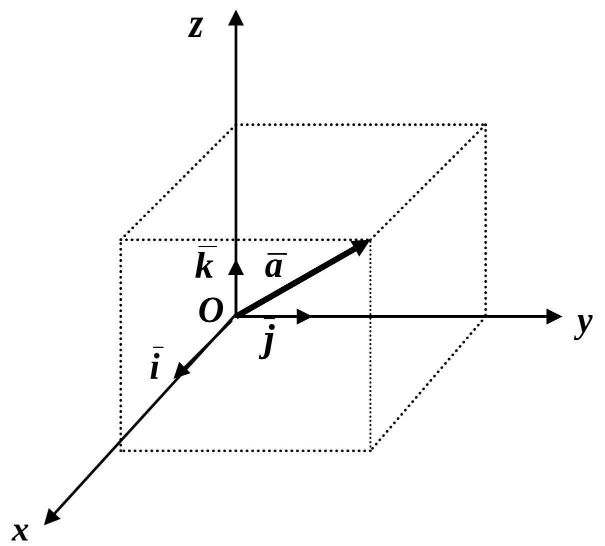
Для того, щоб одержати координати (компоненти) вектора, треба з координат його кінця відняти координати його початку.

Якщо вектори, які прийняті за основу системи координат, мають одиничну довжину і взаємно перпендикулярні, то система координат називається *декартовою прямокутною системою координат* (сам базис називається ортонормованим).

У цьому випадку базисні вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ заведено позначати $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Таким чином, кожен з векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ має довжину, рівну одиниці, причому, всі ці три вектори взаємно ортогональні. Осі координат, які співпадають з напрямком базисних векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, будемо позначати відповідно через Ox, Oy, Oz. Самі декартові координати точки будемо позначати літерами x, y, z.

За результатами, отриманими раніше, робимо висновок, що кожен вектор $\bar{a}$ може бути (і притому єдиним чином) розкладений за декартовим прямокутним базисом $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, тобто для кожного вектора $\bar{a}$ знайдеться (і притому єдина) трійка чисел x, y, z така, що справедлива рівність

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x, y, z).$$



Числа x, y, z називають декартовими прямокутними координатами вектора $\bar{a}$. Якщо M – будь-яка точка простору, то декартові прямокутні координати цієї точки співпадають з декартовими прямокутними координатами вектора $\overline{OM}$.

Декартові прямокутні координати x, y, z вектора $\bar{a}$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі Ox, Oy, Oz відповідно.

Позначимо літерами α, β, γ *кути нахилу* вектора $\bar{a}$ до осей Ox, Oy, Oz відповідно. Три числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називають напрямними косинусами вектора $\bar{a}$.

Далі ми, в основному, будемо користуватися прямокутною декартовою системою координат, яку будемо називати просто декартовою системою координат.

А зараз розглянемо одну із задач на декартові координати.

3.6. Ділення відрізка за даним відношенням

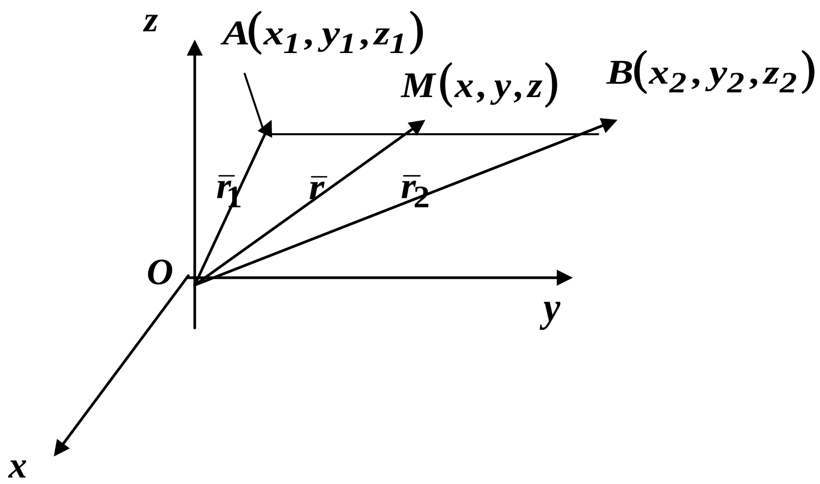


Рис. 3.1

Нехай задані дві точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 3.1). Треба знайти координати точки M на відрізку AB, яка поділяє цей відрізок у будь-якому співвідношенні λ. Тобто, $\lambda = \frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MB}|}$ або $\lambda = -\frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MB}|}$. Маємо

$\bar{r}_1 = x_1\bar{i} + \bar{y}_1 j + z_1\bar{k}, \quad z_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$. Через те, що $\overline{AM} \,//\, \overline{MB}$, одержуємо $\overline{AM} = \lambda\overline{MB}$. Вектори $\overline{AM}$ і $\overline{MB}$ мають координати: $\overline{AM}(x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z)$. З векторної рівності $\overline{AM} = \lambda\overline{MB}$ одержуємо $x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$, звідкіля знаходимо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \tag{3.1}$$

або у векторному вигляді $\bar{r} = \dfrac{\bar{r}_1 + \lambda\bar{r}_2}{1+\lambda}$.

Формули (3.1) відомі під назвою формул ділення відрізка за даним відношенням .

Якщо $\lambda = 1$, то точка M ділить відрізок AB навпіл. Формули, які ми при цьому отримуємо з (3.1) називаються формулами ділення відрізка навпіл і мають вигляд:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Для додатніх значень λ точка M розташована між точками A і B (і в цьому випадку, як видно із рис. 3.1, вектори $\overline{AM}$ і $\overline{MB}$ направлені однаково), а для від'ємних значень λ точка M розташована поза відрізком AB, але на цій же прямій. Співвідношення (3.1) мають саме для будь-яких значень $\lambda \neq -1$.

На площині задача про ділення відрізка вирішується аналогічно, тільки з формул (3.1) залишаються лише дві перші.

Приклад. Відрізок AB з кінцями в точках $A(3,-2)$ і $B(6,4)$ точками C і D розділено на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.

Розв'язок. Нехай точка C - перша точка поділу, а B - друга. Зрозуміло, що $\overline{AC} = \dfrac{1}{2}\overline{CB}$. Тому точка C ділить відрізок $[A, B]$ у відношенні $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Використовуючи формули (3.1), знаходимо координати точки C:

$$x_c = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot 6}{1 + \frac{1}{2}} = 4, \quad y_c = \frac{-2 + \frac{1}{2}\cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = 0.$$

Тобто $C(4,0)$.

Із рівності $\overline{AD} = 2\overline{DB}$ випливає, що точка D ділить відрізок $[A, B]$ у відношенні $\lambda = 2$. Тому координати точки D:

$$x_D = \frac{3 + 2 \cdot 6}{1 + 2} = 5, \quad y_D = \frac{-2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = 2, \quad D(5,2).$$

3.7. Полярна система координат

Декартові системи координат – це не єдиний спосіб визначати за допомогою чисел положення точки відносно якогось геометричного образу. Для цього використовуються багато типів систем координат.

На площині дуже часто використовується полярна система координат. Вона визначена, якщо задати точку O, яка називається полюсом, та промінь l, який виходе з полюса і який називається полярною віссю (рис. 3.2).

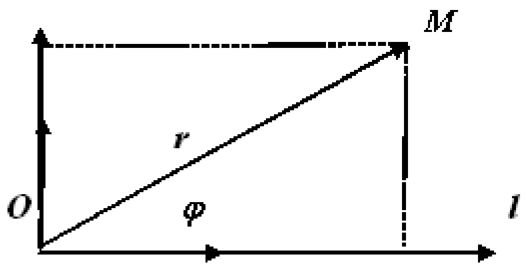


Рис.3.2

Положення точки M на площині визначається двома числами: радіусом $r = |\overline{OM}|$ та кутом φ між полярною віссю та вектором $\overline{OM}$.

Кут φ називається *полярним кутом*. Будемо вимірювати його в радіанах і відлічувати його від полярної осі проти ходу стрілки годинника. У полюса $r = 0$, а $\varphi -$ невизначено. У інших точок $r > 0$, а φ визначається з точністю до доданка, кратного 2π. Це означає, що, наприклад, пара чисел (r, φ), $(r, \varphi + 2\pi)$ і взагалі $(r, \varphi + 2k\pi)$, де k будь-яке ціле число становлять полярні координати однієї і тієї ж точки. Інколи обмежують полярний кут якимись умовами, наприклад, $0 \le \varphi \le 2\pi$ або $-\pi < \varphi \le \pi$. Це ліквідує невизначеність, проте запроваджує інші незручності.

Нехай дається полярна система координат та упорядкована пара чисел (r, φ), перше з яких невід'ємне. Ми можемо порівняти цій парі точку площини, для якої ці числа будуть полярними координатами. А саме, якщо $r = 0$, то ми порівняємо пару з полюсом. Якщо ж $r > 0$, то пару (r, φ) ми порівнюємо з точкою, радіус-вектор якої має довжину (модуль) r і утворює з полярною віссю кут φ. При цьому пари чисел (r,φ) і (r_1,φ_1) порівнюються з однією і тією ж точкою, якщо $r = r_1$, а $\varphi - \varphi_1 = 2\pi k$, де $k -$ціле число.

Виберемо тепер на площині декартову прямокутну систему координат, розташувавши її початок в полюсі O і взявши за вектори $\bar{i}, \bar{j}$ вектори довжини 1, які направлені відповідно вздовж осі l, та під кутом $\pi/2$ до l (кут відраховується проти ходу стрілки годинника). Розглядаючи рис.3.2 , бачимо, що декартові координати точки M відбиваються через її полярні координати так:

$$x = r, \cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{3.2}$$

Для того, щоб знайти полярні координати точки, якщо відомі її декартові, піднесемо до степеня обидві частини кожної з рівності (3.2), а потім додамо їх. Одержуємо

$$x^2 + y^2 = r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r^2, \text{ тобто}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.3}$$

З рівності (3.2) одержимо, якщо розділимо другу рівність на першу

$$tg\varphi = \frac{y}{x}. \tag{3.4}$$

За формулою (3.4) визначається тангенс полярного кута φ: при цьому одержуємо два різні значення кута φ $(-\pi < \varphi < \pi)$, які розташовані в різних четвертях. Через те, що $y = r\sin\varphi$ з цих двох значень кута φ треба вибрати те, для якого синус має такий же знак, як і y.

П р и к л а д . Точка M має декартові координати $x = 1,\ y = -1.$ Знайти її полярні координати.

Розв'язання. $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};\ tg\varphi = -1.$ З двох значень $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ і $-\frac{\pi}{4}$ треба взяти $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, через те що $\sin\varphi$ у даному випадку повинен мати від'ємне значення. Таким чином, полярні координати точки M: $r = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

3.8. Скалярний добуток двох векторів

Під кутом між двома векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ми розуміємо кут між векторами, які дорівнюють даним і які мають спільний початок (рис. 3.3)

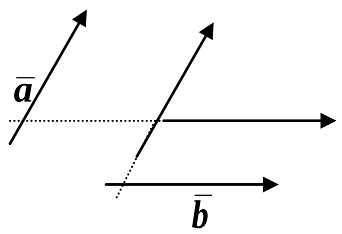


Рис. 3.3

У деяких випадках ми будемо вказувати від якого вектора і в якому напрямку кут відлічується. Якщо таке не зроблено, то кутом між векторами вважають той з кутів, який не перевищує π.

Скалярний добуток двох векторів є число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Якщо хоча б один з векторів нульовий, то кут між ними не визначений і скалярний добуток за означенням вважається рівним нулю.

Скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ позначають $(\bar{a},\bar{b})$, або $\bar{a}\bar{b}$. Таким чином, можемо записати

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi,$$ де

$\varphi -$ кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Очевидні такі властивості скалярного добутку:

1) скалярний добуток є комутативним, тобто для будь-яких векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ виконується рівність $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$;

2) $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2$ для будь-якого вектора;

3) скалярний добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вектори ортогональні або хоч один із них дорівнює нулю;

4) для будь-яких векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ і будь-яких чисел α і β виконується рівність $(\alpha\bar{a}+\beta\bar{b})\cdot\bar{c}=\alpha(\bar{a}\cdot\bar{c})+\beta(\bar{b}\cdot\bar{c})$. Частково, $(\alpha\bar{a})\cdot\bar{c}=\alpha(\bar{a}\cdot\bar{c})$ і $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$, тобто скалярний множник можна виносити за знак скалярного добутку, та скалярний добуток володіє *розподільною* властивістю.

Нехай є якийсь базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Дослідимо, яким виявиться скалярний добуток двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ через їх компоненти $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ та $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. За властивістю (4) у добутку $\bar{a} \cdot \bar{b} = (\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3) \cdot$ $\cdot (\beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2 + \beta_3 \bar{e}_3)$ можна розкрити дужки. Після приведення подібних отримаємо

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \alpha_1 \beta_1 (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) + \alpha_2 \beta_2 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2) + \alpha_3 \beta_3 (\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3) + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \cdot$$

$$\cdot (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2) + (\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1)(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3) + (\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2)(\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3). \qquad (3.5)$$

Якщо базис ортонормований $(\bar{e}_1 = \bar{i},\ \bar{e}_2 = \bar{j},\ \bar{e}_3 = \bar{k})$, то за означенням скалярного добутку маємо: $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = \bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1;$ $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = 0.$

Отож, якщо базис ортонормований, то скалярний добуток векторів виражається формулою

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 . \qquad (3.6)$$

Це дозволяє записати вираз модуля вектора через його компоненти у ортонормованному базисі (при $\bar{a} = \bar{b}$)

$$|a| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}, \qquad (3.7)$$

а також вираз кута між векторами через їх компоненти у ортонормованному базисі

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\ \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}} . \qquad (3.8)$$

Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ в декартовій прямокутній системі мають координати $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то формули (3.6)-(3.8) будуть мати вигляд: $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 x_2 + y_2 y_2 + z_1 z_2;$ $\quad |\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2};$

$$\cos\varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_2^2}\sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z_2^2}} .$$

Формула (3.7), за якою визначається довжина вектора, дає можливість знайти відстань між двома точками у просторі. Нехай $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Тоді $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

І тому $\left|\overline{AB}\right| = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Якщо $\bar{b} = \bar{i}$, то $\left|\bar{b}\right| = 1,\ \ x_2 = 1,\ \ \ y_2 = z_2 = 0$ і ми одержуємо

$\cos\alpha = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$, де через α ми означили кут між вектором $\bar{a}$ і віссю Ox.

Аналогічно, взявши послідовно $\bar{b} = \bar{j}$ та $\bar{b} = \bar{k}$, отримаємо

$$\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,y\right) = \cos\beta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}; \qquad \cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,z\right) = \cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^1 + z_1^2}}.$$

Тобто, ми отримали можливість виразити напрямні косинуси вектора через його координати.

Якщо ми піднесемо до квадрату обидві частини виразів для $\cos\alpha, \cos\beta$ та $\cos\gamma$, а потім додамо їх, то отримаємо, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$ тобто сума квадратів напрямних косинусів будь-якого вектора дорівнює одиниці.

Приклад. Знайти напрямні косинуси вектора $\bar{a} = \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

Розв'язок. Знайдемо довжину вектора $\bar{a}$; $\quad \left|\bar{a}\right| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{3}{5}$.

Тому $\cos\alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{3}$.

Приклад. Обчислити $\left(\bar{a} + \bar{b}\right)^2$, якщо $\left|\bar{a}\right| = 3, \left|\bar{b}\right| = 4, \varphi = \left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язок..

$$\left(\bar{a} + \bar{b}\right)^2 = \left(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b}\right) = \left(\bar{a}, \bar{a}\right) + \left(\bar{a}, \bar{b}\right) + \left(\bar{b}, \bar{a}\right) + \left(\bar{b}, \bar{b}\right) = \left|\bar{a}\right|^2 + 2\left(\bar{a}, \bar{b}\right) + \left|\bar{b}\right|^2 = 9 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2} + 16 = 37,$$

тобто $\left(\bar{a} + \bar{b}\right)^2 = 37$.

Приклад. Визначити, при якому значенні α вектори $\bar{a}_1 + \alpha\overline{a_2}$ і $\bar{a}_1 - \alpha\overline{a_2}$ будуть перпендикулярними, якщо $\left|\bar{a}_1\right| = 3, \left|\bar{a}_2\right| = 5$.

Розв'язок. Згідно із властивістю скалярного добутку маємо $\left(\bar{\boldsymbol{a}}_1+\alpha\overline{\boldsymbol{a}_2},\bar{\boldsymbol{a}}_1-\alpha\overline{\boldsymbol{a}_2}\right)=\mathbf{0}$. Але $\left(\bar{\boldsymbol{a}}_1+\alpha\overline{\boldsymbol{a}_2},\bar{\boldsymbol{a}}_1-\alpha\overline{\boldsymbol{a}_2}\right)=\left|\bar{\boldsymbol{a}}_1\right|^2-\alpha^2\cdot\left|\bar{\boldsymbol{a}}_2\right|^2$. Для знаходження α ми отримали рівняння $\mathbf{9}-\alpha^2\mathbf{25}=\mathbf{0}\Rightarrow\alpha_1=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}},\alpha_2=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$.

Приклад. Знайти $\cos(\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}};\wedge 3\bar{\boldsymbol{a}}-\bar{\boldsymbol{b}})$, якщо $\bar{\boldsymbol{a}}=(-2;-1;1),\bar{\boldsymbol{b}}=(0,-2,6)$.

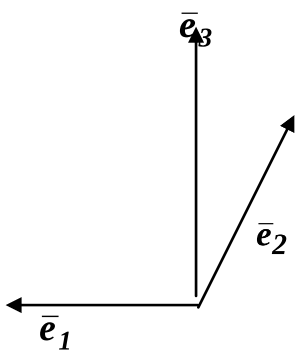
Розв'язок. $\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}}=(-2;-3;7)$, $\quad 3\bar{\boldsymbol{a}}-\bar{\boldsymbol{b}}=(-6;-1;-3)$.

Тоді $\cos(\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}};\wedge 3\bar{\boldsymbol{a}}-\bar{\boldsymbol{b}})=\dfrac{\mathbf{12+3-21}}{\sqrt{\mathbf{4+9+49}}\cdot\sqrt{\mathbf{36+1+9}}}=-\dfrac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{713}}}$.

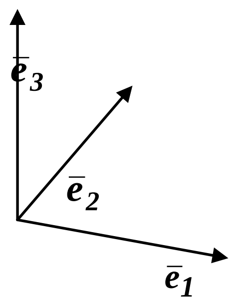
3.9. Праві та ліві трійки векторів

Раніше ми вже відзначили, що три вектори називаються *упорядкованою* трійкою (або просто *трійкою*), якщо вказано, який з цих векторів є першим, який другим і який – третім. Таку трійку некомпланарних векторів ми назвали базисом у просторі.

Упорядочена трійка некомпланарних векторів називається правоорієнтованою або просто правою, якщо з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого до другого ми бачимо проти стрілки годинника. У противному разі, тобто, коли з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого до другого ми бачимо за стрілкою годинника, трійка зветься лівоорієнтованою або просто лівою (початок векторів трійки припускається спільним) (рис. 3.4).



ліва трійка



права трійка

Будь-яка третя трійка належить до цих двох класів.

Рис. 3.4

Декартова система координат є правою (лівою), якщо три базисних вектора утворюють праву (ліву) трійку.

Домовимося далі розглядати тільки праві системи координат.

3.10. Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який позначається так: $\bar{c}=[a,b]$ (або $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$) і задовольняє таким трьом умовам:

1) модуль вектора $\bar{c}$ дорівнює добутку модулів векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ на синус кута φ між ними; тобто

$$|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\varphi\ \left(\sin\varphi\geq 0,\quad 0\leq\varphi\leq\pi\right);$$

2) вектор $\bar{c}$ є ортогональним до векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$;

3) вектор $\bar{c}$ напрямлений так, що трійка векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ є правою, тобто з кінця вектора $\bar{c}$ найкоротший поворот від $\bar{a}$ до $\bar{b}$ ми бачимо проти ходу стрілки годинника (рис. 3.5).

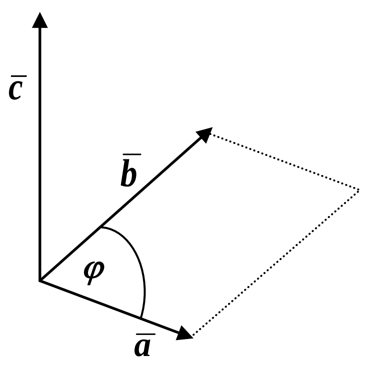


Рис. 3.5

Отже, за означенням маємо, що модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, який побудований на векторах – співмножниках (якщо вони мають спільний початок), тому що площа паралелограма дорівнює добутку довжин суміжних сторін на синус кута між ними.

Векторний добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли співмножники колінеарні (нульовий вектор враховують колінеарним будь-якому вектору).

П р и к л а д . Нехай $\bar{\boldsymbol{i}}, \bar{\boldsymbol{j}}, \bar{\boldsymbol{k}}$ – правий ортонормований базис. Тоді
$\bar{\boldsymbol{i}} \times \bar{\boldsymbol{j}} = \bar{\boldsymbol{k}};\quad \bar{\boldsymbol{j}} \times \bar{\boldsymbol{i}} = \bar{\boldsymbol{i}};\quad \bar{\boldsymbol{k}} \times \bar{\boldsymbol{i}} = \bar{\boldsymbol{j}};\quad \bar{\boldsymbol{i}} \times \bar{\boldsymbol{i}} = \bar{\boldsymbol{j}} \times \bar{\boldsymbol{j}} = \bar{\boldsymbol{k}} \times \bar{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}$.

Основні властивості векторного добутку

1. Векторний добуток антикомутативний, тобто завжди $\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}} = -\bar{\boldsymbol{b}} \times \bar{\boldsymbol{a}}$.

Дійсно, за визначенням маємо, що модуль векторного добутку не залежить від порядку співмножників, а вектор $\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}}$ колінеарний вектору $\bar{\boldsymbol{b}} \times \bar{\boldsymbol{a}}$. Однак, переставляючи співмножники, ми повинні змінити напрямок добутку, щоб виконувалась умова 3 за означенням.

2. Для будь-яких векторів $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}$ та будь-яких чисел $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ має місце рівність

$$\left(\lambda\bar{\boldsymbol{a}} + \mu\bar{\boldsymbol{b}}\right) \times \bar{\boldsymbol{c}} = \lambda\left(\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{c}}\right) + \mu\left(\bar{\boldsymbol{b}} \times \bar{\boldsymbol{c}}\right).$$

Зокрема, $\left(\lambda\bar{\boldsymbol{a}}\right) \times \bar{\boldsymbol{c}} = \lambda\left(\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{c}}\right)$ (властивість відносно числового співмножника, тобто, щоб помножити векторний добуток векторів на число, достатньо помножити на це число один співмножник);

$\left(\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}}\right) \times \bar{\boldsymbol{c}} = \bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{c}} + \bar{\boldsymbol{b}} \times \bar{\boldsymbol{c}}$ (розподільна властивість відносно суми векторів).

П р и к л а д . Довести, що $\left(\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}}\right) \times \left(\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}}\right) = \boldsymbol{2}\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}}$ та визначити геометричний зміст цієї рівності, зображуючи вектори $\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}}$ та $\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}}$ діагоналями паралелограма (рис.3.6).

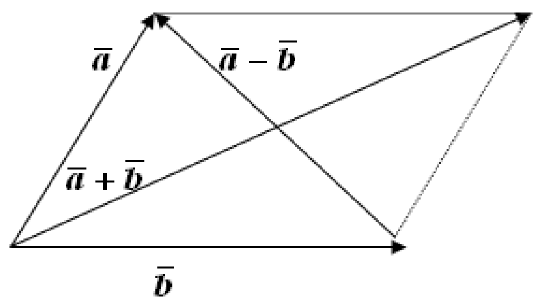


Рис. 3.6

Дійсно $\left(\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}}\right) \times \left(\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}}\right) =$
$\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}} \times \bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}} - \bar{\boldsymbol{b}} \times \bar{\boldsymbol{b}} =$
$= \boldsymbol{2}\left(\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}}\right)$, через те що $\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0};$
$\bar{\boldsymbol{b}} \times \bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0}.$

Геометрично доведена рівність означає, що удвоєна площа паралелограма дорівнює площі паралелограма, побудованого на його діагоналях.

Векторний добуток у декартових координатах

Нехай два вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами: $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$. Тоді векторний добуток цих векторів має вигляд: $\bar{a}\times\bar{b}=\left(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}\right)\times\left(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}\right)=$

$=x_1x_2\cdot\left(\bar{i}\times\bar{i}\right)+y_1x_2\left(\bar{j}\times\bar{i}\right)+z_1x_2\left(\bar{k}\times\bar{i}\right)+x_1y_2(i\times j)+$

$+y_1y_2\left(\bar{j}\times\bar{j}\right)+z_1y_2\left(\bar{k}\times\bar{j}\right)+x_1z_2\left(\bar{i}\times\bar{k}\right)+y_1z_2\left(\bar{j}\times\bar{k}\right)+z_1z_2\left(\bar{k}\times\bar{k}\right).$

Через те що i, j, k – правий ортонормований базис, то $\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=0$, $\bar{i}\times\bar{j}=k$, $\bar{j}\times\bar{i}=-k$, $\bar{j}\times\bar{k}=i$, $\bar{k}\times\bar{j}=-i$, $\bar{k}\times\bar{i}=j$, $\bar{i}\times\bar{k}=-j$ і тому

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(y_1z_2-y_2z_1\right)i+\left(z_1x_2-z_2x_1\right)\bar{j}+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\bar{k}. \qquad (3.9)$$

Формулу (3.9) можна записати у другому вигляді, якщо використати символ визначника 3-го порядку

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \qquad (3.10)$$

Розкладаючи визначник за елементами першого рядка, отримаємо розклад (3.9) вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ за базисом $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Умова $\bar{a}\times\bar{b}=0$ колінеарності векторів $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$ і $\bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$ може бути відбита рівностями:

$$y_1z_2-y_2z_1=0, \quad z_1x_2-z_2x_1=0, \quad x_1y_2-x_2y_1=0$$

або

$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$, тобто, якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні і навпаки.

П р и к л а д . Знайти площу трикутника ABC, який має вершини в точках $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$ (рис. 3.7).

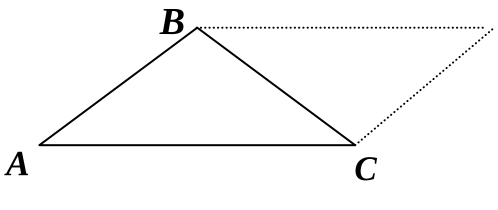


Рис. 3.7

Розв'язок.

Через те, що вектор $\overline{AB}$ має координати $AB=\left(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\right)$, а вектор $\overline{AC}=\left(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1\right)$, маємо

$$\overline{AB}=(4;-5;0),\qquad \overline{AC}=(0;4;-3).$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}=15i+12j+16k.$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{225+144+256}=\frac{25}{2}=12{,}5.$$

3.11. Мішаний добуток трьох векторів

Нехай дані три будь-яких вектора $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$. Якщо вектор $\overline{a}$ векторно множиться на вектор $\overline{b}$, а потім отриманий при цьому вектор $\overline{a}\times\overline{b}$ скалярно множиться на вектор $\overline{c}$, то у результаті отримаємо число $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}$, яке називається змішаним добутком векторів $\overline{a},\overline{b}$ і $\overline{c}$ і позначається так: $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$.

Геометричний зміст мішаного добутку такий (рис. 3.8).

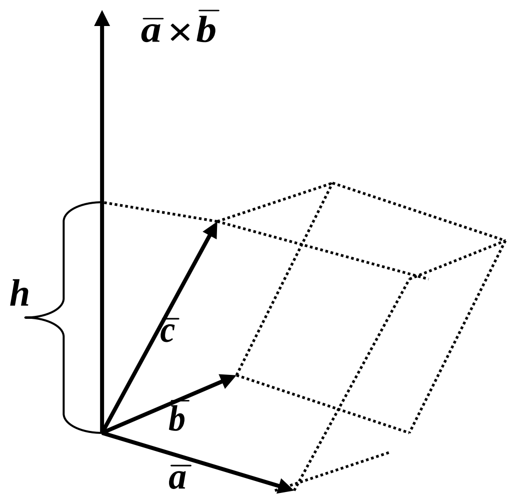


Рис.3.8

Мішаний добуток некомпланарних векторів $\overline{a},\overline{b}$ і $\overline{c}$ по модулю дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах-співмножниках. Він додатній, якщо трійка $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ права, і від'ємний, якщо трійка ліва.

Тобто $V_{пар}=\left|\left(a,b,c\right)\right|$.

Дійсно: $\left|\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}\right|=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi\left|\overline{c}\right|\left|\cos\theta\right|$,

де $\varphi-$ кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$, а $\theta-$ кут між векторами $\overline{c}$ і $\overline{a}\times\overline{b}$.

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}, \bar{b}$ і $\bar{c}$, дорівнює добутку площі основи $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$ на висоту $h = |\bar{c}| \cos\theta$. Таким чином перше ствердження доведено. Знак змішаного добутку співпадає зі знаком $\cos\theta$, і тому змішаний добуток додатній, коли вектор $\bar{c}$ направлений у той же бік від площини векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, що і вектор $\bar{a} \times \bar{b}$, тобто коли трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – права. Аналогічно доводимо, що змішаний добуток від'ємний, коли трійка векторів ліва.

Об'єм піраміди, побудованої на тих же векторах, дорівнює однієї шостої об'єму паралелепіпеда

$$V_{nip} = \frac{1}{6} |(a, b, c)|.$$

Якщо $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – ортонормований базис, то $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) = 1$ або $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) = -1$, якщо базис лівий.

Основні властивості мішаного добутку

1. При циклічній перестановці співмножників мішаний добуток не змінюється, тобто $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a}) = (\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b})$, тому що за такою перестановкою не змінюється ні паралелепіпед, ні "зміст" трійки векторів. При перестановці тільки двох співмножників знак змішаного добутку змінюється

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}).$$

2. Змішаний добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли співмножники компланарні. Дійсно, для компланарних векторів паралелепіпед вироджується в частину площини, тобто має нульовий об'єм.

Мішаний добуток у координатній формі

Якщо три вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами $\bar{a} = (x_1 y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то змішаний добуток дорівнює визначнику, рядки якого відповідно є координати векторів, які перемножуються, тобто

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{3.11}$$

Дійсно, через те що мішаний добуток $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$ дорівнює скалярному добутку векторів $\bar{a}\times\bar{b}$ та $\bar{c}$ і поскільки координати вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ визначаються за формулою (3.9), а координати вектора $\bar{c}$ є $\left(x_3, y_3, z_3\right)$, то згідно з виразом для скалярного добутку векторів у прямокутних координатах, дістанемо

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=x_3\left(y_1z_2-y_2z_1\right)+y_3\left(z_1x_2-z_2x_1\right)+z_3\left(x_1y_2-x_2y_1\right),$$

а це і є визначник (3.11) розкладений за елементами третього рядка.

Приклад. Обчислити об'єм трикутної піраміди $ABCD$, вершини якої знаходяться в точках $A(1,1,1)$, $B(4,4,4)$, $C(3,5,5)$, $D(2,4,7)$.

Розв'язок. $V_{nip}=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)\right|$.

Знайдемо координати векторів $\overline{AB},\overline{AC},$ *і* $\overline{AD},$ які співпадають з ребрами піраміди. Маємо: $\overline{AB}=(3;3;3), \overline{AC}=(2;4;4),$ *і* $\overline{AD}=(1;3;6)$. Тоді

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=18.$$ Згідно з формулою отримаємо

$$V_{nip}=\frac{1}{6}\cdot 18=3.$$

Зразок білета залікового модуля №2

1. Побудувати точку $M(-2;2;5)$ та обчислити напрямні косинуси її радіус-вектора. **(1 бал).**

2. Обчислити $\cos(\bar{b};^{\wedge}\bar{b}-3\bar{a})$, якщо $a=(-2;-3;-1)$ *та* $\bar{b}=(1;-1;2)$. **(1 бал).**

3.Знайти площу трикутника ABC, *якщо* $A(2;5;1)$, $B(3;2;-3)$ *та* $C(5;-7;-2)$. **(1 бал).**

4. Знайти об’єм піраміди ***OKLM*,** якщо О- початок координат, К(0;-1;3), L(4;3;1) та М(0;5;-2). **(1 бал).**

5. Обчислити $\left(2\bar{i}\times 3\bar{i}-\bar{k}\times 2\bar{i}\right)\cdot\left(\bar{j}-2\bar{i}\right)$. **(2 бали).**

6. При яких значеннях змінних x *та* y будуть колінеарними вектори $\overline{AB}$, якщо $A(3;8;-2)$, $B(4;5;1)$, *та* $\bar{c}=(-2;x;1-y)$? **(2 бали).**

7. Сторони трикутника ***ABC*** співпадають з векторами $\overline{AB}=(2;1;-2)$ *та* $\overline{BC}=(3;2;6)$. Обчислити косинуси кутів цього трикутника. **(4 бали).**

4. МОДУЛЬ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

4. 1. Лінії на площині та їх рівняння

Поняття лінії є одним із найскладніших понять математики. Загальне визначення лінії наводиться в спеціальній математичній дисципліні – топології. Воно було дано у 20-х роках XX-го століття математиком П.С.Урисоном. Ми зупинемося лише на означенні рівняння лінії.

Означення 1. Рівнянням лінії L в декартовій системі координат на площині називається рівняння

$$F(x,y)=0, \qquad (4.1)$$

яке задовольняє координатам x і y кожної точки цієї лінії і не задовольняє координати жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Як зрозуміло з означення, сама лінія L розглядається як множина точок, координати x, y яких задовольняють рівнянню (4.1).

Розглянемо декілька простих прикладів визначення характеру лінії за даним її рівнянням.

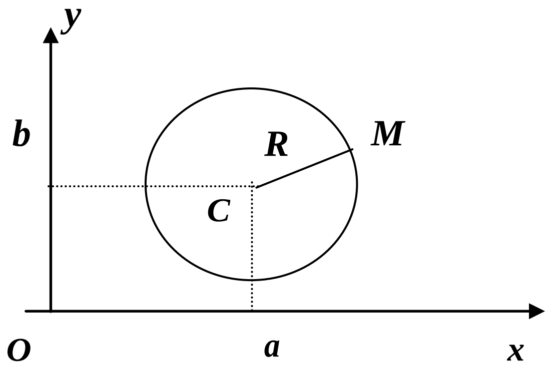
1) Рівняння $x-y=0$, або, що одне й теж, $x=y$ визначає множину точок, однаково віддалених від осей системи координат, тобто бісектрису першого і третього координатних кутів.
2) $2x^2+3y^2=0$ визначає лінію, яка вироджується в точку $O(0,0)$.

3) $\left(x^2-4\right)=0$ або $(x-2)(x+2)=0. \;\Rightarrow x-2=0,\;\; x+2=0.$ Перше рівняння визначає множину точок, які мають одну й ту саму абсцису $x=2$. Воно зображає пряму, паралельну осі $0y$ на відстані 2 від неї. Аналогічно, рівняння $x=-2$ зображає пряму, паралельну осі $0y$ на відстані 2 ліворуч від неї.

Часто лінію задають як геометричне місце точок, тобто за допомогою тієї чи іншої геометричної властивості лінії, спільної для всіх її точок. На її основі треба скласти рівняння даної лінії.

П р и к л а д . Скласти рівняння множини точок, однаково віддалених від сталої точки $C(a;b)$, тобто рівняння кола.

Позначимо довільну точку кола через $M(x,y)$, а його радіус через $R.$ Точка M лежить на колі тоді і тільки тоді, коли $\left|\overline{CM}\right|=R.$ Виразимо цю властивість через координати. Маємо $\overline{CM}=\{x-a;\; y-b\}$ $\left|\overline{CM}\right|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$Отже, для точок кола $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R,$ або



$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$$

Це і є рівняння кола.

Якщо центр кола знаходиться на початку координат, тобто в $O(0,0)$, то рівняння кола набуде вигляду $x^2+y^2=R^2.$

Вигляд рівняння лінії залежить не тільки від самої лінії, а й від вибору системи координат. Рівняння лінії змінюється при переході від одної до другої системи координат. В одній системі координат лінія має простіший вигляд, ніж в іншій.

П р и к л а д . Нехай ось u обертається (проти стрілки годинника) навколо нерухомої точки O і на цій осі рухається точка M так, що довжина r вектора $\overline{OM}$ пропорціональна куту φ повороту осі $u,$ який відлічується від нерухомої осі Ox. Лінія, яку описує точка M, називається спіраль Архимеда.

Її рівняння має вигляд $r = a\varphi$ у полярній системі координат (ось $Ox -$ полярна вісь, точка $O -$ полюс, $\varphi -$ полярний кут, $a -$ коефіцієнт пропорціональності. В декартовій системі координат спіраль Архимеда має рівняння набагато складніше.

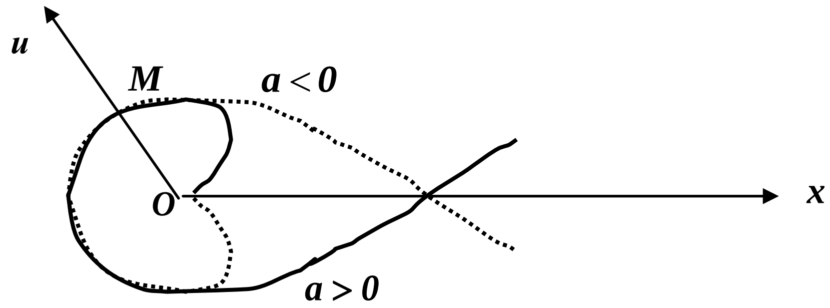


Рис.4.1

Перетин двох ліній.

Щоб знайти координати всіх точок перетину двох ліній $F(x,y)=0$ і $\Phi(x,y)=0$, треба розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ \Phi(x,y)=0 \end{cases}$.

Якщо система не має дійсних розв'язань, то лінії не перетинаються.

4.2. Пряма на площині

Пряма, що проходить через задану точку перпендикулярно до даного вектора

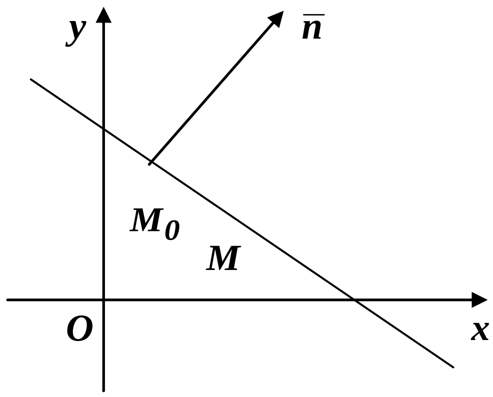


Рис. 4.2

Нехай на площині Oxy задані ненульовий вектор $\bar{n} = \{A; B\}$ і точка $M_0(x_0, y_0)$. Потрібно скласти рівняння прямої, що проходить через точку Mo перпендикулярно до вектора $\bar{n}$. Для довільної точки $M(x,y)$ шуканої прямої вектор $\overline{MoM} = \{x - x_o;\ y - y_o\}$ перпендикулярний вектору $\bar{n}$.

Тому скалярний добуток їх дорівнює нулю: $(\overline{MoM}, \bar{n}) = 0$ або в координатах:

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0. \tag{4.2}$$

Це і є рівняння шуканої прямої. Отже, пряма на площині визначається рівнянням першого степеня відносно декартової системи координат.

Загальне рівняння прямої

Покажемо тепер, що кожне рівняння першого степеня визначає пряму в декартовій системі координат.

Розглянемо довільне рівняння першого степеня

$$Ax+By+C=0, \tag{4.3}$$

(A і B разом не дорівнюють нулю) і нехай $Mo(x_o, y_o)$ є одна з точок вираженої ним лінії. Тоді виконується рівність

$$Ax_o+By_o+C=0.$$

Віднімаючи цю тотожність почленно від рівняння (1.3) отримаємо рівняння

$$A(x-x_0)+B(y-y_o)=0,$$

яке визначає ту саму лінію, що й рівняння (1.2). Рівняння (1.3) називається загальним рівнянням прямої на площині, а вектор $\overline{n}=\{A;B\}$ – нормальним вектором даної прямої.

Дослідимо, як розміщена пряма відносно координатної системи, коли рівняння (4.3) неповне, тобто деякі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Можливі такі випадки:

1. $C=0.$ $Ax+By=0.$ Пряма проходить через початок координат $O(0;0)$.
2. $B=0.$ $Ax+C=0.$ Пряма паралельна осі Oy.
3. $A=0.$ $By+C=0.$ Пряма паралельна осі Ox.
4. $A=C=0.$ Пряма $By=0$ суміщається з віссю Ox, тобто $y=0$ є рівняння осі Ox.
5. $B=C=0.$ Пряма $Ax=0$ суміщається з віссю Oy, тобто $x=0$ є рівнянням осі Oy.

Рівняння прямої “у відрізках”

Нехай всі коефіцієнти A, B і C загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ відмінні від нуля. Тоді це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1,$$

і, прийнявши $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, отримаємо рівняння

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (4.4)$$

яке називається рівнянням прямої “у відрізках”.

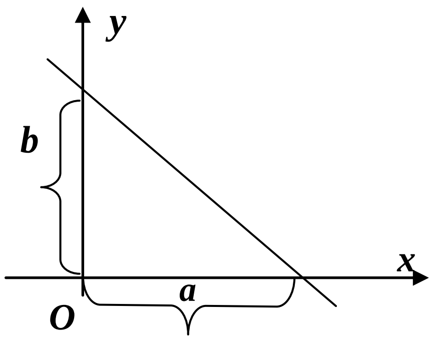


Рис.4.3

Числа a і b мають такий геометричний зміст: вони дорівнюють величинам відрізків, які відтинає пряма відповідно на осях Ox та Oy (відрізки відкладаються від початку координат).

Канонічні і параметричні рівняння прямої

Положення прямої на площині відносно системи координат можна задати будь-якою точкою $Mo(x_o, y_o)$, що належить цій прямій, і напрямком прямої, тобто вектором $\overline{S} = \{m; n\}$, колініарним цій прямій. Ненульовий вектор $\overline{S}$, який паралельний прямій, називається *напрямним вектором прямої*. Через точку $Mo(x_o, y_o)$ можна провести тільки одну пряму, паралельну вектору $\overline{S}$. Складемо її рівняння.

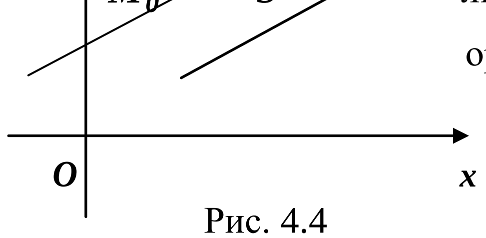


Рис. 4.4

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка прямої. Тоді вектор $\overline{MoM} = \{x - x_0; y - y_o\}$ колінеарному вектору $\overline{S} = \{m; n\}$, тобто координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \qquad (4.5)$$

або $$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_o + nt \end{cases}. \qquad (4.6)$$

Рівняння (4.5) називається канонічним рівнянням прямої, а (4.6) – її параметричними рівняннями.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2 y_2)$ – дві точки прямої. Вони визначають напрямний вектор прямої $\bar{S} = \overline{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$. Враховуючи те, що пряма проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$, отримаємо канонічне рівняння шуканої прямої, яку шукаємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (4.7)$$

Рівняння (4.7) називається рівнянням прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1 y_1)$ і $M_2(x_2 y_2)$.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку, у заданому напрямку

Нехай пряма задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ і кутом φ, який вона утворює з додатним напрямком осі Ox. Її канонічне рівняння $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$, якщо

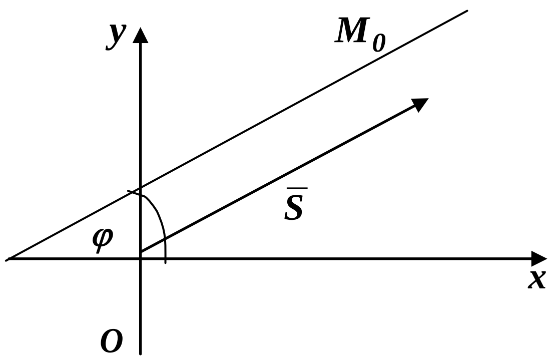


Рис. 4.5

$m \neq 0$ можна записати у вигляді

$$y = \frac{n}{m}(x - x_0) + y_0,$$ де

$$m = np_{ox}\bar{s} = |\bar{s}| \cos\varphi,$$

$n = np_{oy}\bar{s} = |\bar{s}| \sin\varphi$. Звідси

отримаємо, що $\frac{n}{m} = tg\varphi$.

Тангенс кута φ нахилу прямої до осі Ox називається кутовим коефіцієнтом прямої. Позначимо його через k.

$$k = tg\varphi \quad .$$

Тоді рівняння прямої набуває вигляду $y = k(x - x_0) + y_0$, або

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (4.8)$$

Це рівняння називається рівнянням прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку.

Зауваження. При змінному k рівняння (4.8) є рівнянням пучка прямих з центром в заданій точці $M_0(x_0, y_0)$. Пучком прямих на площині з центром у даній точці називається сукупність прямих, що проходять через цю точку.

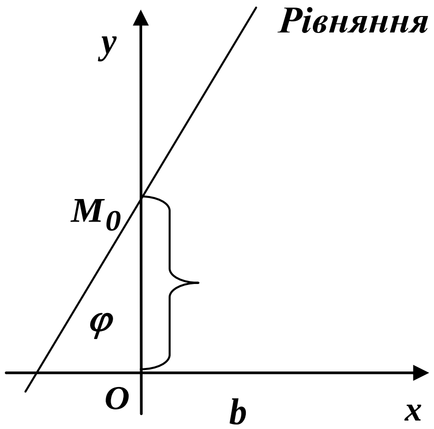


Рис. 4.6

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма перетинає вісь Oy відсікаючи від неї відрізок b (починаючи з початку координат) і утворює кут φ з додатнім на прямком осі Ox. Знайдемо її рівняння. Шукана пряма проходить через точку $M_0(0, b)$ і має кутовий коефіцієнт $k = tg\varphi$. Тому її рівняння

$$y - b = k(x - 0), \quad \text{або}$$

$$y = kx + b. \qquad (4.9)$$

Його називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.

Зауваження. Якщо пряма задана рівнянням $Ax + By + C = 0$, то коли $B \neq 0$, то $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$, або $y = kx + b$, де $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = \dfrac{-C}{B}$.

Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

а) Нехай дві прямі задані загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Кут θ між двома прямими дорівнює кутові між їх нормальними векторами $\bar{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ і $\bar{n}_2 = \{A_2; B_2\}$. Маємо

$$\cos\theta = \cos\left(\bar{n}_1 \hat{\ } \bar{n}_2\right) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_2^1 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (4.10)$$

Умова паралельності: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Умова перпендикулярності: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$

б) нехай дві прямі задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}.$$

Кут θ між двома прямими дорівнює кутові між їх напрямними векторами $\bar{s}_1 = \{m_1; n_1\}$ і $\bar{s}_2 = \{m_2; n_2\}$.

$$\cos\theta = \cos\left(\bar{s}_1 \hat{,}\ \bar{s}_2\right) = \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (4.11)$$

Умова паралельності: $\frac{n_1}{n_2} = \frac{m_1}{m_2}$. Умова перпендикулярності: $n_1n_2 + m_1m_2 = 0.$

в) нехай прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами: $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, $k_1 = tg\varphi_1$, $k_2 = tg\varphi_2$, де φ_1 і φ_2 – кути нахилу прямих до осі Ox.

Тоді, за теоремою про зовнішній кут трикутника маємо $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$.

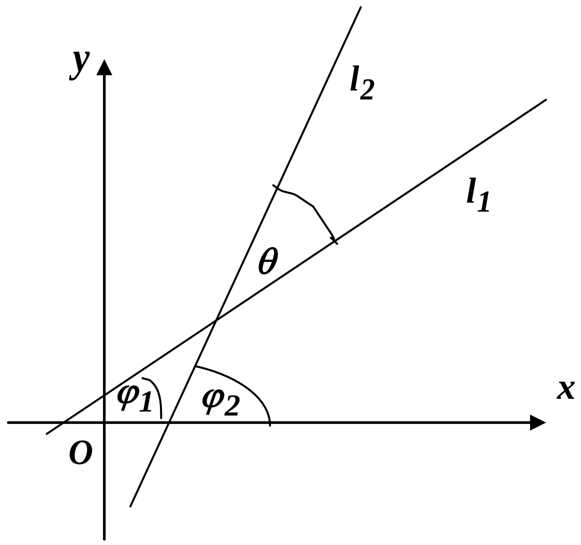


Рис. 4.7

Отже, $tg\theta = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2}$, тобто $$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (4.12)$$

Умова паралельності: $k_1 = k_2$. Умова перпендикулярності: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

(Якщо $\theta = \frac{\pi}{2}$, то $tg\theta$ не існує, $1 + k_1 k_2 = 0$).

Зауваження. Якщо $\theta -$кут між прямими, то $\pi - \theta$ також є кутом між ними.

П р и к л а д . Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2, 3)$ перпендикулярно до прямої $y = 5x + 1.$

Розв'язок. Кутовий коефіцієнт даної прямої $k_1 = 5$. Оскільки шукана пряма перпендикулярна до даної, то її кутовий коефіцієнт $k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{5}$.

Рівняння прямої будемо шукати у вигляді $y - y_1 = k(x - x_0)$, де $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $k = -\frac{1}{5}$.

$$y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 2),$$

або $5y - 15 = -x + 2, \qquad x + 5y - 17 = 0$.

П р и к л а д . Знайти кут між прямими $y = 2x + 1$ і $y = 3x - 2$.

Розв'язок. Для обчислення кута між прямими використовуємо формулу

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad k_1 = 2,\ k_2 = 3.$$

$$tg\theta = \frac{3 - 2}{1 + 3 \cdot 2} = \frac{1}{7}, \quad \theta = arctg\frac{1}{7}.$$

Приклад. З'ясувати, чи будуть перпендикулярними прямі $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ ***та*** AB, ***якщо*** $A(5;0)$, $B(0;2)$.

Розв'язок. Спочатку знайдемо кутовий коефіцієнт першої прямої. Він дорівнює $k_1 = -\frac{5}{2}$. Тепер знайдемо рівняння прямої AB. $\frac{x-5}{0-5} = \frac{y-0}{2-0}$. Звідки $k_2 = -\frac{2}{5}$. Отже $k_1 \cdot k_2 = 1 \neq -1$. Тобто прямі не перпендикулярні.

Нормальне рівняння прямої

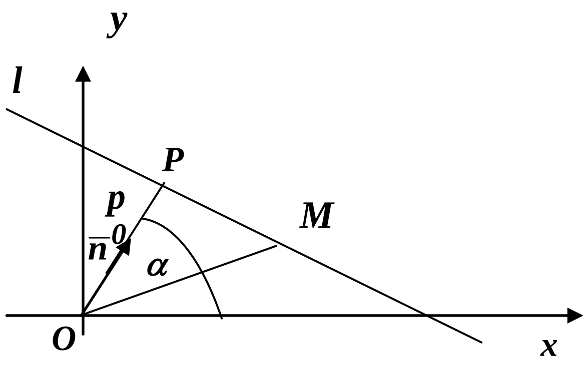


Рис.4.8

Положення прямої на площині можна визначити довжиною перпендикуляра $|OP| = p$, опущеного з початку координат на пряму і $\angle\alpha$ – нахилу його до осі Ox. Напрям перпендикуляра OP визначається одиничним вектором нормалі прямої, проведеним з початку координат, тобто вектором $\bar{n}^0 = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}$.

Візьмемо на прямій довільну точку $M(x, y)$ і позначимо через $\bar{r}$ її радіус-вектор $\bar{r} = \overline{OM} = \{x; y\}$. Тоді $np_{\bar{n}^0}\bar{r} = p$. З іншого боку, $np_{\bar{n}^0}\bar{r} = |\bar{r}|\cos\left(\bar{r}\,\hat{,}\,\bar{n}^0\right) = |\bar{r}|\cdot|\bar{n}^0|\cos(\bar{r}, \bar{n}^0) = (\bar{r}\cdot\bar{n}^0)$. Отже, $\bar{r}\cdot\bar{n}^0 = p$, або

$$\bar{r}\cdot\bar{n}^0 - p = 0, \qquad (4.13)$$

або, в координатній формі,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (4.14)$$

Рівняння (4.14) називається нормальним рівнянням прямої. Рівняння (4.13) записано у векторній формі.

Зауважимо, що 1) $p \geq 0$, оскільки p – це відстань від початку координат; 2) сума квадратів коефіцієнтів в рівнянні (4.14) дорівнює 1.

Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду

Розглянемо загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0$$

і зведемо його до нормального вигляду

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Щоб ці два рівняння були рівнозначні, достатньо, щоб їх коефіцієнти були пропорційні:

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = \frac{-p}{C} = \lambda,$$

або $\cos\alpha = \lambda A,\ \sin\alpha = \lambda B,\ \ -p = \lambda C.$

Звідси визначаємо коефіцієнт пропорційності λ

$$\lambda^2\left(A^2 + B^2\right) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Отже,

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак λ за умовою $\lambda C = -p$ має бути протилежний знакові C, оскільки $p \geq 0$. Число λ називається нормувальним множником.

Отже, щоб звести загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до нормального вигляду (4.14), потрібно помножити його на нормувальний множник.

Відстань точки від прямої

Нехай в площині Oxy задана пряма нормальним рівнянням

$$\bar{r} \cdot \bar{n}^0 - p = 0.$$

і точка $M_0(x_0 y_0)$. Треба знайти відстань d цієї точки від даної прямої. Під відстанню точки від прямої розуміємо довжину перпендикуляра, який опущено з даної точки на дану пряму.

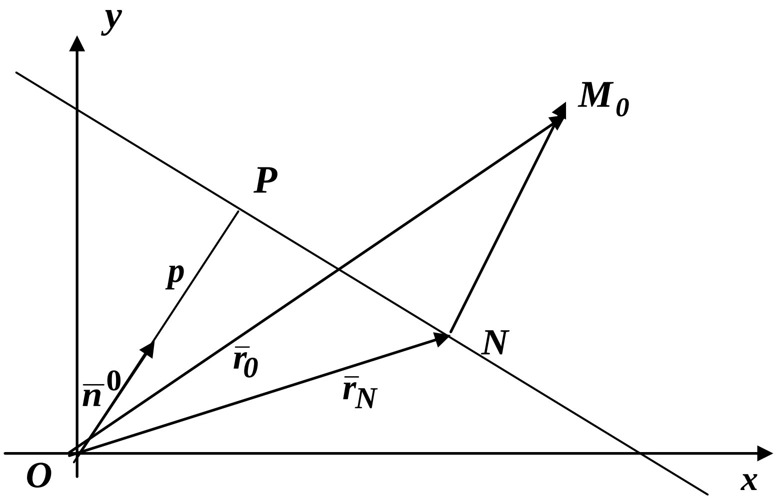


Рис. 4.9

Як бачимо, $d = \left| np_{\bar{n}^0} \overline{NM_0} \right|$. З іншого боку, вектор $\overline{NM_0} = \bar{r}_0 - \bar{r}_N$,

де $\bar{r}_0 = \overline{OM_0}$ – радіус-вектор точки M_0, $\bar{r}_N = \overline{ON}$ – радіус-вектор точки N, яка є основою перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на пряму. Отже

$$np_{\bar{n}^0} \overline{NM_0} = \left(\bar{r}_0, \bar{n}^0\right) - \left(\bar{r}_N, \bar{n}^0\right).$$

Оскільки точка N лежить на даній прямій, то її радіус-вектор $\bar{r}_N$ задовольняє рівняння прямої, тобто

$$\left(\bar{r}_N \cdot \bar{n}^0\right) = p.$$

Враховуючи це, отримаємо

$$np_{\bar{n}^0} \left(\overline{NM_0}\right) = \left(\bar{r}_0 \cdot \bar{n}^0\right) - p.$$

Отже, $d = \left| \left(\bar{r}_0 \cdot \bar{n}_0\right) - p \right|$.

Таким чином, відстань d точки від прямої виражається абсолютним значенням лівої частини нормального рівняння цієї прямої, в якому радіус-вектор цієї точки замінюємо радіусом-вектором даної точки.

Якщо пряма задана в координатній формі рівнянням

$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$, то

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \right|. \qquad (4.15)$$

Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то, щоб визначити d, треба рівняння знормувати, а потім підставити в його ліву частину координати заданої точки, тобто

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \qquad (4.16)$$

П р и к л а д . Дано трикутник ABC, де $A(1,2), B(2,-2), C(6,1)$. Обчислити довжину висоти CD.

Розв'язок . Запишемо рівняння сторони AB, $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{-2-2}$, або $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4}$. Звідси $AB: \; y = -4x + 6$ або $4x + y - 6 = 0$.

Обчислимо довжину висоти CD. Для цього достатньо знайти відстань точки $C(6,1)$ від прямої AB. На основі формули (4.16) маємо

$$d = \left| \frac{4 \cdot 6 + 1 \cdot 1 - 6}{\sqrt{16 + 1}} \right| = \frac{19}{\sqrt{17}}.$$

П р и к л а д. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3;3)$ та відтинає від першого координатного кута трикутник площею 18 кв. одиниць.

Розв'язок . Нехай a *та* b відповідно абсциса та ордината точок перетину нашої прямої з вісями координат. За умовою $ab = 36.$ Рівняння прямої "у відрізках" має вигляд $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$ Згідно з умовою задачи $\frac{3}{a} + \frac{3}{b} = 1.$ Отже маємо систему двох рівнянь $\begin{cases} ab = 36, \\ a + b = \frac{ab}{3}. \end{cases}$ Вирішуючи систему, отримуємо, що $a = b = 6.$ Таким чином, рівняння шуканої прямої буде $x + y = 6.$

5. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5.1. Коло

Найпростішим представником кривих другого порядку є коло.

Коло – це геометричне місце точок площини, однаково віддалених від сталої точки $C(a,b)$, яка називається центром.

Раніше ми вже показали, що рівняння кола с центром у точці $M_0(a;b)$ та радіусом R має вигляд

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (5.1)$$

Розкриваючи дужки, маємо

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \left(a^2 + b^2 - R^2\right) = 0,$$

тобто коло є рівнянням другого степеня відносно координат x та y. Але не всяке рівняння другого степеня є коло. Дійсно, розглядуючи останнє рівняння бачимо, що в рівнянні кола коефіцієнти біля квадратів координат рівні, а добуток координат (xy) відсутній. Отже, по вигляду даного рівняння другого степеня можна вирішити, чи є воно рівнянням кола, чи ні. Наприклад, рівняння $x^2+y^2-4x+4y+4=0$ — коло. Якщо ми хочемо побудувати це коло, ми повинні спочатку знайти координати його центра та радіус. Для цього необхідно привести дане рівняння до виду (2.1), виділяючи повні квадрати відносно змінних: $x^2-4x=(x-2)^2-4;$ $y^2+4y=(y+2)^2-4$. Тоді маємо $(x-2)^2-4+(y+2)^2-4+4=0$ або $(x-2)^2+(y+2)^2=4$. Тут $a=2,$ $b=-2,$ $R=2$. За цими даними можна побудувати коло.

5.2 Еліпс

Еліпс – це геометричне місце точок площини, для яких сума відстаней до двох фіксованих точок F_1 *і* F_2 *цієї площини, що називаються фокусами – є сталою.*

Виберемо на площині декартову прямокутну систему координат таким способом:

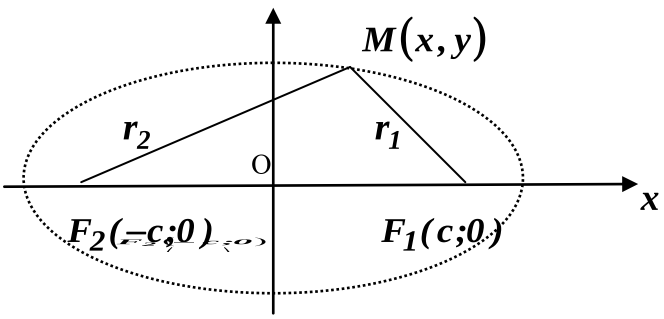


Рис. 5.1

За вісь Ox приймаємо пряму, яка проходить через фокуси F_1 та F_2, вибравши на ній додатній напрямок від F_2 до F_1, а початок координат помістимо посередині між фокусами. Відповідно до вибраної системи координат фокуси будуть мати такі координати $F_2(-c;0)$ і $F_1(c;0)$.

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка еліпса. Позначимо через $r_1=|F_1M|$ та $r_2=|F_2M|$ відстані від точки M до точок F_1 та F_2 відповідно. Тоді $r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. За означенням еліпса додаток r_1+r_2 є величина стала. Позначимо її через $2a$ (очевидно, $2a>2c$ тобто $a>c$; якщо $2c=2a$, тоді еліпс вироджується у відрізок $[F_1F_2]$). Отже, рівність $r_1+r_2=2a$ є необхідною і достатньою умовою розміщення точки $M(x,y)$ на даному еліпсі. В координатах ця рівність має вигляд

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a. \qquad (5.2)$$

Рівняння (2.2) і є рівнянням еліпса в обраній системі координат. Звільняючись від радикалів у (2.2), отримаємо рівняння еліпса у найпростішому вигляді

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (5.3)$$

де $b^2=a^2-c^2$, $(a>c)$.

Рівняння (2.3) називається *канонічним рівнянням* еліпса.

Враховуючи, що рівняння еліпса (5.3) утримує тільки квадрати координат x і y, робимо висновок, що осі координат є осями симетрії еліпса. Вісь симетрії еліпса, на якій знаходяться фокуси, зветься фокальною віссю. Точка перетину осей симетрії зветься центром еліпса. Для еліпса, який задається рівнянням (5.3), фокальна вісь співпадає з віссю Ox, а центром є початок координат. Точки $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ в яких еліпс перетинає осі координат, називаються вершинами еліпса.

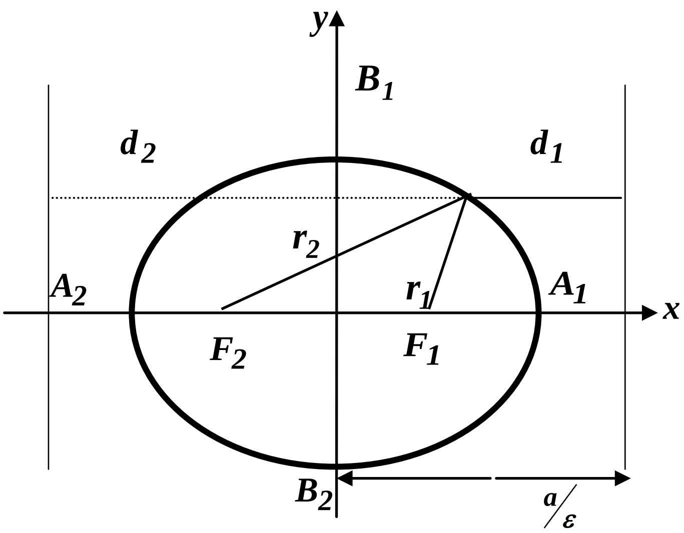


Рис. 5.2

Відрізки A_1A_2 і B_1B_2, які з'єднують протилежні вершини еліпса, а також їх довжини $2a$ та $2b$, звуться відповідно великою та малою вісями еліпса. Еліпс – обмежена крива. Він увесь знаходиться всередині прямокутника $|x|\le a,\ |y|\le b$. Число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ $(\varepsilon<1)$ називають *ексцентриситетом* еліпса (для кола $a = b, c = 0$ і $\varepsilon = 0$). Дві прямі, які перпендикулярні до фокальної осі еліпса і знаходяться на відстані a/ε від його центра, тобто прямі $x = \pm a/\varepsilon$, називаються директрисами еліпса. Вони мають такі властивості:

відношення відстаней будь-якої точки еліпса до фокуса і відповідної директриси є величиною сталою, яка дорівнює ексцентриситету ε

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon .$$

Якщо осі еліпса паралельні до осей координат, а центр еліпса міститься в точці $M_0(x_0; y_0)$, то рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

5.3. Гіпербола

Гіпербола – це геометричне місце точок площини, для яких абсолютна величина різниці відстаней від двох фіксованих точок F_1 *і* F_2 *(фокусів) цієї площини є сталою (меншою за* $|F_1F_2|$*).*

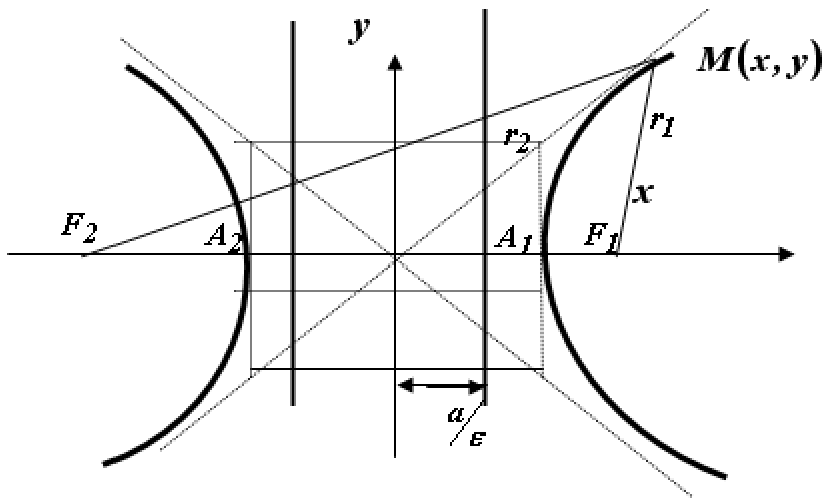


Рис.5.3

Для виведення канонічного рівняння гіперболи цю сталу величину позначимо через $2a\ (a > 0)$, відстань між фокусами $2c(c > 0)$. Систему координат вибираємо так само, як і у випадку еліпса: вісь $0x$ проходе через фокуси у напрямку від F_2 до F_1, вісь Oy поділяє відстань між фокусами навпіл.

Нехай $M(x;y)-$довільна точка гіперболи. За означенням гіперболи рівність $r_2 - r_1 = \pm 2a$ є необхідною і достатньою умовою розміщення точки $M(x,y)$ на даній гіперболі. У правій частині рівності треба вибрати знак “плюс” , якщо $r_2 > r_1$, і знак “мінус”, якщо $r_2 < r_1$. Оскільки $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, то останню рівність можна записати у вигляді:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{5.4}$$

Рівність (2.4) і є рівнянням гіперболи в обраній системі координат. Знову, звільнюючись від радикалів у (2.4), отримуємо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Через те, що $c > a$, різниця $c^2 - a^2$ додатня. Позначимо її через b^2. Тоді отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.5}$$

де $b^2 = c^2 - a^2$.

Рівняння (2.5) називається канонічним рівнянням гіперболи.

Оскільки рівняння гіперболи (5.5) утримує тільки квадрати координат x і y, робимо висновок, що осі координат є осями симетрії гіперболи. Вісь симетрії на якій знаходяться фокуси, є фокальною віссю. Точка перетину осей симетрії – центр симетрії — зветься центром гіперболи. Для гіперболи (5.5) фокальна вісь співпадає з віссю Ox, а центром є початок координат.

Знайдемо точки перетину гіперболи з осями симетрії – вершини гіперболи: при $y = 0$ маємо $x = \pm a$. Отож, точки $A_1(a;0)$ і $A_2(-a;0)-$вершини гіперболи, відстань між якими дорівнює $2a$. При $x = 0$ маємо $y^2 = -b^2 \Rightarrow y = \pm ib$, де $i = \sqrt{-1}$, тобто для y ми отримуємо уявні значення. Це означає, що вісь Oy не перетинає гіперболу.

Вісь симетрії, яка не перетинає гіперболу, називається *уявною* віссю симетрії. Для гіперболи (5.5) дійсною віссю є вісь Ox, уявною – вісь Oy. Відрізок A_1A_2, а також його довжина $2a$ звуться дійсною віссю гіперболи. Якщо на уявній осі симетрії відкласти в обидва боки від центра O гіперболи відрізки OB_1 та OB_2 довжиною b, то відрізок B_1B_2, а також його довжина $2b$ є уявною віссю гіперболи.

З рівняння (5.5) витікає, що $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, тобто x може змінюватися в інтервалі $(-\infty;-a]$ та $[a;+\infty)$. Коли x збільшується від a до $+\infty$, то $|y|$ теж збільшується від 0 до $+\infty$. Крива розташовується поза полосою, яка обмежена прямими $x = \pm a$ і складається з двох окремих гілок. Для будь-якої точки M одної з цих гілок $r_2 > r_1$ і $r_2 - r_1 = 2a$ (права гілка), для будь-якої точки M другої гілки $r_2 < r_1$ і $r_2 - r_1 = -2a$ (ліва гілка).

Для того, щоб ясніше уявити вид гіперболи, розглянемо дві прямі лінії, що тісно з нею зв'язані. Припустимо, що $x > 0$ і $y > 0$, тоді рівняння (5.5) можна записати

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1, \text{ звідки } \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\ .$$

Порівняємо це рівняння з рівнянням прямої лінії, що $y = \frac{b}{a}x$. Будемо називати *відповідними* дві точки $N(x, y)$ та $M(x, y)$, які розташовуються відповідно на цій прямій і на гіперболі і які мають одну і ту ж абсцису x. Очевидно, $Y > y$ і різниця ординат відповідних точок дає відстань між ними, тобто $MN = Y - y$.

Покажемо, що при необмеженому віддаленні точки x по кривій від початку координат її відстань MN від прямої прямує до нуля. Насправді:

$$MN = Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\cdot\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Тобто $MN = \frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$. Ми бачимо, що якщо $x \to \infty$, то $MN \to 0$, тобто коли точка M, пересуваючись по гіперболі у першому квадранті, віддаляється у нескінченність, то її відстань до прямої $y = \frac{b}{a}x$ зменшується і прямує до нуля. Теж саме будемо мати у третьому квадранті (внаслідок симетрії відносно початку координат O).

Внаслідок симетрії гіперболи відносно осі Oy одержимо другу пряму $y = -\frac{b}{a}x$, симетрично розташовану з прямою $y = \frac{b}{a}x$, до якої також буде нескінченно наближатися точка M, яка рухається по гіперболі і віддаляється у нескінченність (у другому і четвертому квадрантах). Ці дві прямі лінії звуться *асимптотами гіперболи* і мають рівняння:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{і} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Очевидно, асимптоти гіперболи розташовуються по діагоналях прямокутника, одна сторона якого паралельна осі Ox і дорівнює $2a$, а друга – паралельна осі Oy і дорівнює $2b$. Центр прямокутника знаходиться на початку координат.

Якщо $b = a$ гіпербола називається рівнобічною, її рівняння має вигляд $x^2 - y^2 = a^2$, а асимптоти є $y = \pm x$.

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ (як і у випадку еліпса) називається *ексцентриситетом* гіперболи. Через те, що $c > a$ ексцентриситет гіперболи $\varepsilon > 1$.

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, які перпендикулярні до фокальної вісі гіперболи і розташовані на відстані a/ε від її центра, називаються *директрисами* гіперболи, які відповідають правому та лівому фокусам. Через те, що для гіперболи $\varepsilon > 1$ відношення $\frac{a}{\varepsilon} < a$; директриси розташовуються між вершинами A_1 і A_2.

Як і для еліпса відношення відстані любої точки гіперболи від фокуса і відповідної директриси є величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε.

Гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ та $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{y^2}=1$ називають *спряженими*. Якщо дійсна вісь гіперболи розміщується на прямій, паралельній вісі абсцис, а точка $M_0(x_0;y_0)$ - центр гіперболи, то її рівняння має вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

5.4. Парабола

Парабола – це геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої прямої (директриси) і фіксованої точки (фокуса).

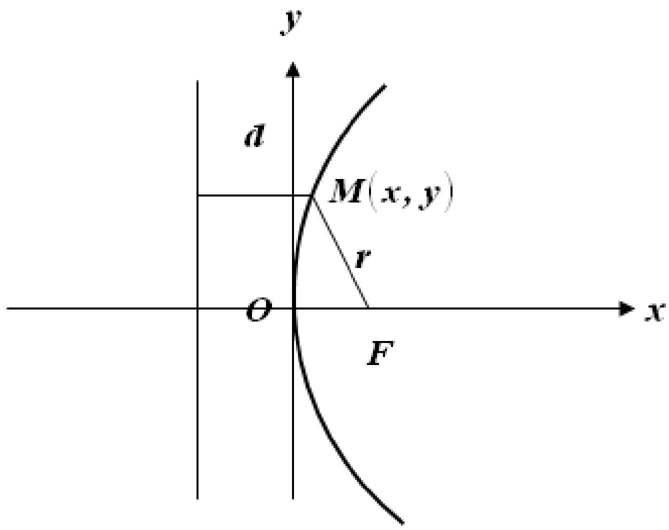


Рис.5.4

Виберемо декартову систему координат таким способом: вісь Ox проведемо через фокус F перпендикулярно до директриси, вибравши додатний напрямок від директриси до фокуса. Початок координат O виберемо посередині відрізка осі Ox від точки F до директриси, довжину якого позначимо через p. Величина p називається *параметром* параболи. Тоді координати фокуса будуть $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Нехай $M(x,y)$ – довільна точка параболи. Позначимо через r відстань від M до F, а через d – відстань від M до директриси ($d=MK$, рис. 4.5). Координати точки $K\left(-\frac{p}{2}; y\right)$. За означенням параболи $r = d$ або

$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$. Це співвідношення є необхідним і достатня умова розташування точки $M(x, y)$ на даній параболі; тому це рівняння є рівнянням параболи. Для того щоб надати йому більш простий вигляд, зведемо обидві його частини у квадрат

$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$, звідки

$$y^2 = 2px. \qquad (5.6)$$

Рівняння (5.6) називається *канонічним рівнянням* параболи.

Для того, щоб дослідити форму параболи, помітим, що x в (5.6) не може приймати від'ємних значень, тому парабола розташована праворуч від осі Oy. Кожному значенню x відповідають два рівнопротилежні значення y: $y = \pm\sqrt{2px}$. Отже, парабола симетрична відносно осі Ox (осі параболи). Якщо $x = 0$, два значення ординати однакові, тому вісь Oy дотикається до параболи на початку координат. Точка перетину параболи з віссю симетрії називається її вершиною. Отже, початок координат є вершиною параболи. Оскільки за означенням параболи відношення $\frac{r}{d} = 1$, тому *ексцентриситет* параболи приймається рівним одиниці.

Рівняння директриси параболи має вигляд: $x = -{}^{p}\!/_{2}$.

Якщо парабола симетрична відносно вісі oy, а вершина міститься в точці $O(0;0)$, то її рівняння має вигляд

$$x^2 = 2py. \qquad (5.7)$$

Якщо парабола симетрична відносно прямої $y = y_0$, а вершина міститься в точці $M_0(x_0; y_0)$, то її рівняння має вигляд

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \qquad (5.8)$$

Якщо парабола симетрична відносно прямої $x = x_0$, а вершина міститься в точці $M_0(x_0; y_0)$, то її рівняння має вигляд

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0). \qquad (5.9)$$

П р и к л а д . Скласти рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстані до точки $A(2;5)$ та відстані до прямої $x-7=0$ дорівнює $\frac{2}{3}$.

Розв'язок. Візьмемо будь-яку точку $M(x,y)$ геометричного місця точок. За умовою $\frac{|MA|}{|MK|}=\frac{2}{3}$, *де* $|MK|$-відстань від прямої.

У координатній формі це відношення має вигляд:

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}}{\sqrt{(x-7)^2}}=\frac{2}{3}.$$

Перетворюючи цей вираз отримаємо:

$$5(x+2)^2+9(y-5)^2=180.$$

Звідки отримуємо

$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-5)^2}{20}=1$. Це канонічне рівняння еліпса, піввісі якого $a=6,\quad b=\sqrt{20}$ відносно нової системи координат з початком у точці $O_1(-2;5)$.

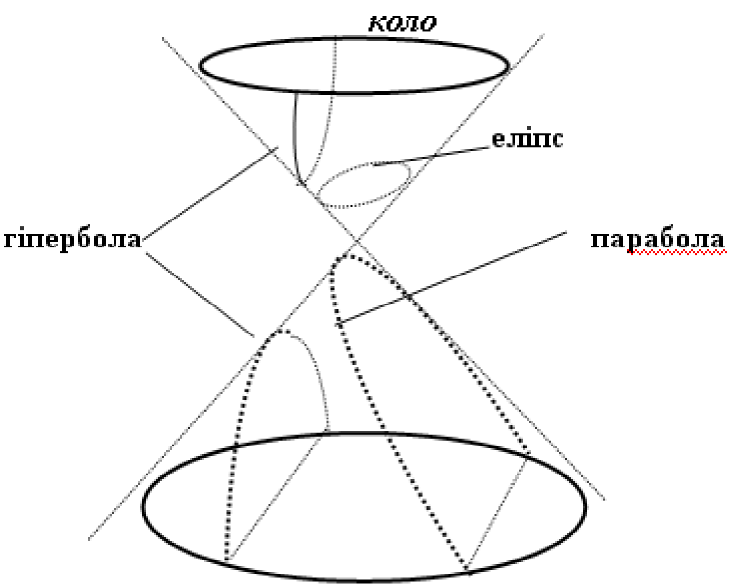


Рис.5.5

Відзначимо, що розглянуті криві уявляють собою лінії перетину кругового конуса з площинами, які не проходять через його вершину (рис.5.5).

На основі результатів, які одержані раніше, ми можемо дати загальне означення конічного перерізу (еліпса, гіперболи, параболи):

Конічний переріз – це геометричне місце точок, відношення відстаней яких до даної точки (фокуса) і до даної прямої (директриси) є величина стала (ε). *При цьому: для еліпса* $\varepsilon < 1$, *для параболи* $\varepsilon = 1$, *для гіперболи* $\varepsilon > 1$.

Отже, ми розглянули канонічні (найпростіші) рівняння кола, еліпса, гіперболи та параболи. Ці рівняння є алгебраїчними рівняннями другого степеня.

Лініями другого порядку на площині називаються лінії, які в декартовій прямокутній системі координат зображаються рівняннями другого степеня вигляду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \qquad (5.10)$$

якщо хоча б один з коефіцієнтів a_{11}, a_{12}, a_{22} не дорівнює нулеві. Якщо $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0,$ то рівняння (5.10) є рівнянням еліптичного типу; при $\Delta < 0 -$ гіперболічного типу, а при $\Delta = 0 -$ параболічного типу.

Приклад. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо:

а) відстань між фокусами дорівнює 8, а мала піввісь $b = 3;$ б) велика піввісь $a = 6, \varepsilon = 0{,}5.$

Розв'язок

а) за умовою задачі $2c = 8,\quad b = 3.$ Із співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$ знаходимо $a^2 = 9 + 16 = 25.$ Отже, рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

б) згідно з умовою $a = 6, \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}.$ Отже, $c = \frac{a}{2} = 3.$ Із співвідношення

$b^2 = a^2 - c^2,\quad b^2 = 27.$ Тому рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1.$

Приклад. Написати рівняння гіперболи, фокуси якої містяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відомо:

а) рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами дорівнює 26;

в) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$, а ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{2}$.

Розв'язок. Рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$ де $a^2 + b^2 = c^2.$

За умовою $c = 13.$ З рівняння асимптот $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}.$ Отже, для визначення a і b маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 13^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{39}{5}, \\ b = \frac{52}{5}. \end{cases}$$

Тому $\frac{x^2}{\left(\frac{39}{5}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{52}{5}\right)^2} = 1$ - шукане рівняння гіперболи.

Приклад. Написати канонічне рівняння параболи, яка проходить через точку $M_0(2;4).$

Розв'язок. Рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px.$ Параметр p знайдемо з умови, що точка M_0 належить параболі, тобто $4^2 = 2 \cdot p \cdot 2.$

Звідсі $p = 4.$ Отже, $y^2 = 8x$ - рівняння параболи.

Приклад. Встановити, що рівняння $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 3$ визначає параболу, знайти координати її вершини і значення параметра $p.$

Розв'язок. Якщо виділити повний квадрат, то отримаємо $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 - 2$ або $(x-2)^2 = -4(y+2).$ Параметр p знаходимо з умови $2p = 4.$ Звідси $p = 2.$ Отже, вершина параболи знаходиться в точці $M_0(2;-2),$ а параметр $p = 2.$

Задачи для самостійної роботи

Приклад. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1;-2)$ перпендикулярно до вектора $\bar{n} = (3;1)$.

Приклад. Знайти кут між прямими $3x - y + 5 = 0$ і $2x + y - 7 = 0$.

Приклад. З'ясувати, чи є перпендикулярними прямі $6x - 15y + 7 = 0$ і $10x + 4y - 3 = 0$.

Приклад. Звести рівняння прямої $2x - 3y - 6 = 0$ до рівняння прямої у "відрізках" і зробити рисунок.

Приклад. Задана пряма $5x + 3y - 3 = 0$. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, яка: а) паралельна заданій прямій; б) перпендикулярна до заданої прямої.

Приклад. Точки $A(0;1), B(6;5), C(12;1)$ є вершинами трикутника. Написати рівняння висоти CD.

Приклад. Знайти відстань від початку координат до прямої $3x - 4y + 10 = 0$.

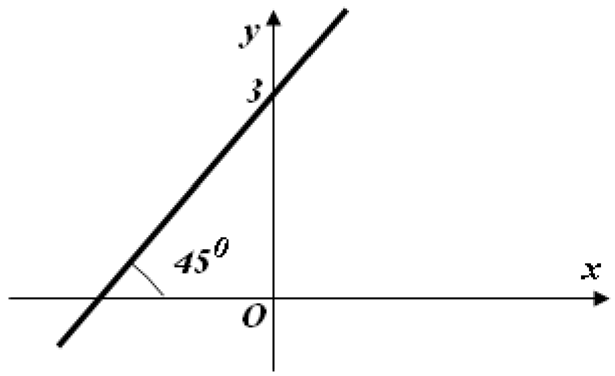
Приклад. Знайти відстань між прямими $4x - 3y - 7 = 0$ і $4x - 3y + 3 = 0$.

Зразок білета залікового модуля №3

1. Побудувати прямі:

а) $y = \frac{x}{3}$; б) $2x + 5y - 10 = 0$; в) $x - 3 = 0$. **(1 бал)**

2. Записати рівняння прямої, зображеної на рисунку. Обчислити відстань від початку координат до цієї прямої. **(1 бал)**

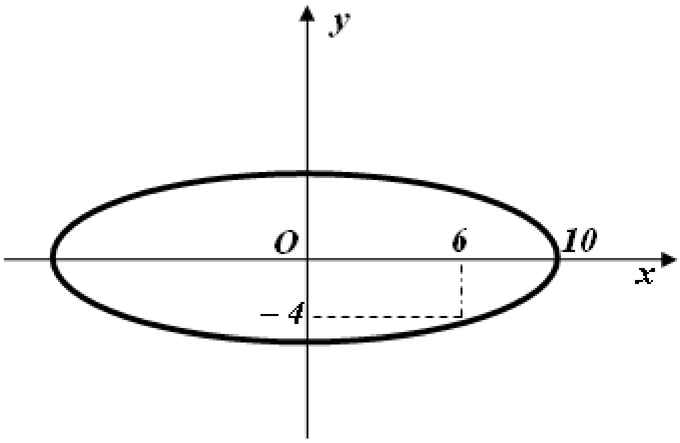


3. З'ясувати, чи будуть паралельними прямі $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$ *та* $AB,$ якщо $A(1;-1)$ *та* $B(-1;2)$? **(1 бал)**

4. Побудувати криву, задану рівнянням $3y^2+8x=0,$ та знайти відстань між її фокусом та директрисою. **(1 бал)**

5. Обчислити тангенс куту, створеного висотою BK та медіаною BM трикутника ABC, якщо $A(1;5),$ $B(7;1)$ *та* $C(9;7).$ **(2 бали)**

6. Записати рівняння лінії, зображеної на рисунку. **(2 бали)**



7. Скласти рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстані від точки $A(2;5)$ та відстані до прямої $x-7=0$ дорівнює $\frac{2}{3}.$ Побудувати лінію та навести її означення. **(4 бали)**

6. МОДУЛЬ 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

6.1. Площина. Загальне рівняння площини

Нехай у просторі задана прямокутна декартова система координат $Oxyz$, а $M_0(x_0, y_0, z_0)-$задана точка на площині (рис.6.1); $\bar{n}-$вектор, який не дорівнює нулю і перпендикулярний до площини. Складемо рівняння цієї площини. Довільна точка $M(x, y, z)$ буде належати до площини, якщо вектори $\overline{M_0M}$ і $\bar{n}$ ортогональні, тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю.

$$\left(\overline{M_0M}, \bar{n}\right)=0. \tag{6.1}$$

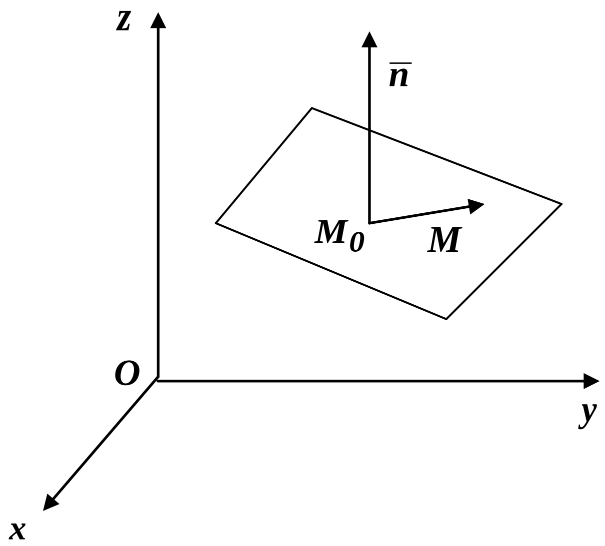


Рис.6.1

Нехай $\boldsymbol{A,B,C}$ – координати вектора $\bar{\boldsymbol{n}}$ відносно базиса $\bar{\boldsymbol{i}}, \bar{\boldsymbol{j}}, \bar{\boldsymbol{k}}$. Через те, що вектор $\overline{\boldsymbol{M_0 M}}$ має координати $\overline{\boldsymbol{M_0 M}} = \left(\boldsymbol{x - x_0 ; y - y_0 ; z - z_0}\right)$,рівняння (6.1) приймає вигляд

$$\boldsymbol{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \qquad (6.2)$$

Це і є рівняння площини, що проходить через точку $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ перпендикулярно вектору $\bar{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{A, B, C})$.

П р и к л а д . Записати рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{A(-2;5;-1)}$ перпендикулярно до вектора $\overline{\boldsymbol{OA}}$, $\boldsymbol{O(0;0;0)}$.

Розв'язок. Знайдемо координати вектора $\boldsymbol{OA = (-2;5;-1)}$. Згідно (6.2) маємо рівняння прямої $\boldsymbol{-2(x+2)+5(y-5)-(z+1)=0}$. Остаточно маємо: $\boldsymbol{2x-5y+z+30=0}$.

Як бачимо, рівняння площини лінійне. Легко довести і обернене твердження. Нехай задано довільне лінійне рівняння

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}, \qquad (6.3)$$

($\boldsymbol{A,B,C}$ одночасно не дорівнюють нулю).

Нехай $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ деяка точка, координати якої задовольняють рівняння (6.3)

$$\boldsymbol{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0}. \qquad (6.4)$$

Віднімаючи від рівняння (3.3) тотожність (3.4), одержуємо рівняння

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ , \qquad (6.5)$$

яке еквівалентно рівнянню (6.3).

Нехай $\bar{n}-$вектор з координатами A,B,C відносно базиса $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ $(\bar{n}=(A,B,C))$, M_0 $-$точка з координатами x_0,y_0,z_0 і M $-$точка з координатами x,y,z. Тоді равняння (3.5) можна записати в еквівалентній формі

$$\left(\overline{M_0M},\bar{n}\right)=0, \qquad (6.6)$$

а це і є рівняння площини (6.1).

Зауважимо, що коефіцієнти A,B,C при x,y,z в рівнянні (6.3) є координати вектора, який перпендикулярний до площини.

Таким чином, площина, яка визначається загальним рівнянням (6.3), ортогональна вектору $\bar{n}=(A,B,C)$. Цей вектор називають *нормальним* вектором площини (6.3).

Рівняння (6.3) називають загальним рівнянням площини.

Загальне рівняння (6.3) називають *повним,* якщо всі його коефіцієнти A,B,C і D не дорівнюють нулю. Якщо хоча б один з цих коефіцієнтів дорівнює нулю, рівняння називають *неповним*.

Повне рівняння площини (6.3) можна записати у вигляді

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (6.7)$$

де $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B,}$ $c=-\dfrac{D}{C}$.

Рівняння (6.7) називається рівнянням площини у “відрізках”. Числа a,b,c мають простий геометричний зміст: вони дорівнюють величинам відрізків, які відтинає площина на осях Ox,Oy,Oz відповідно (відрізки відлічуються від початку координат).

З вищесказаного ми бачимо повну аналогію з прямою на площині (додається лише ще одна змінна).

Тому *нормальне рівняння площини* має вигляд

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0\,, \qquad (6.8)$$

де $p-$відстань площини від початку координат; $\alpha,\beta,\gamma-$кути нахилу перпендикуляра до площини, який проходе через початок координат.

Для приведення загального рівняння площини (6.3) до нормального вигляду (6.8) необхідно помножити рівняння (6.3) на нормувальний множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, знак якого має бути протилежний знаку вільного члена D в загальному рівнянні площини (6.3).

Відхилення d точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ від площини обчислюється за формулою

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p. \tag{6.9}$$

Таким чином, щоб знайти відхилення d точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ від площини, треба в ліву частину нормального рівняння площини підставити замість поточних координат x, y, z координати x_1, y_1, z_1 даної точки M_1.

Для обчислення відстані точки від площини треба взяти абсолютну величину одержаного відхилення.

Відзначимо, що відхилення буде додатнім, якщо точка і початок координат знаходяться з різних боків від площини, і від'ємним, якщо вони знаходяться по один бік від площини.

Рівняння площини, яка проходе через три різні точки, що не належать одній прямій

Виведемо рівняння площини, яка проходе через три різні точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та $M_3(x_3, y_3, z_3)$ і які не належать одній прямій. За умовою вектори $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ та $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ не колінеарні, а звідси будь-яка точка $M(x, y, z)$ буде лежати в одній площині з точками M_1, M_2, M_3 тоді і тільки тоді, коли вектори $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$ і $M_1M = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ компланарні, тобто тоді і тільки тоді, коли змішаний добуток цих трьох векторів дорівнює нулю.

Використовуючи вираз змішаного добутку у координатах, отримуємо необхідну і достатню умову приналежності точки $M(x, y)$ до указаної площини у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (6.10)$$

Рівняння першого степеня (6.10) і є рівнянням площини, яку ми розшукуємо.

Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності площин

Нехай дві площини задаються загальними рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{і} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Кутом між двома площинами будемо називати будь-який з двох суміжних двогранних кутів, утворених цими площинами. Очевидно, питання про визначення кута між вказаними площинами сходить до визначення кута між їх нормальними векторами. Оскільки A_1, B_1, C_1 – координати вектора $\overline{n}_1$, перпендикулярного до першої площини, а A_2, B_2, C_2 – координати вектора $\overline{n}_2$, перпендикулярного до другої площини, то за визначенням скалярного добутку $(\overline{n}_1, \overline{n}_2)=|\overline{n}_1|\,|\overline{n}_2|\cos\varphi$ отримаємо

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (6.11)$$

Умова паралельності площин еквівалентна умові колінеарності векторів $\overline{n}_1$ та $\overline{n}_2$ і має вигляд

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (6.12)$$

Умова перпендикулярності площин може бути отримана з формули (6.11) (при $\cos\varphi=0$), або визначена рівністю нулю скалярного добутку векторів $\overline{n}_1$ та $\overline{n}_2$:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (6.13)$$

6.2. Пряма лінія у просторі. Канонічні та параметричні рівняння прямої

Ми вже домовилися називати будь-який ненульовий вектор, який паралельний даній прямій, *напрямним вектором* цієї прямої.

Виведемо рівняння прямої, яка проходе через дану точку простору $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і яка має заданий напрямний вектор $\bar{q} = (l, m, n)$.

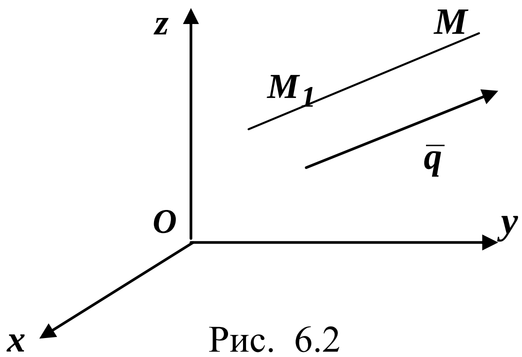


Рис. 6.2

Точка $M(x, y, z)$ належить до вказаної прямої тоді і тільки тоді, коли вектор $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ та $\bar{q} = (l, m, n)$ колінеарні, тобто тоді і тільки тоді, коли координати цих векторів пропорційні

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}. \qquad (6.14)$$

Рівняння (6.14) і є рівняння прямої, яку ми розшукували і яка проходе через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і колінеарні вектору $\bar{q} = (l, m, n)$. Ці рівняння звуться *канонічними рівняннями* прямої у просторі.

Зауважимо, що в канонічних рівняннях (6.14) усі три числа l, m, n одночасно не можуть дорівнюватися нулю, тому що вектор $\bar{q} = (l, m, n)$ ненульовий. Через те, що будь-яку пропорцію $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ми розуміємо як рівність $ad = bc$, тому рівність нулю одного із знаменників у (6.14) означає рівність нулю відповідного чисельника. Наприклад, нехай $l = 0$, а $n \neq 0$. Тоді з пропорції $\frac{x - x_1}{l} = \frac{z - z_1}{n}$, яка еквівалентна рівності $(x - x_1)n = (z - z_1)l$, дістанемо, що $x - x_1 = 0$.

Якщо в рівняннях (6.14) кожне з відношень прирівняти якомусь числу t, то отримаємо

$$\frac{x - x_1}{l} = t, \quad \frac{y - y_1}{m} = t, \quad \frac{z - z_1}{n} = t.$$

Звідки дістанемо
$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases}. \qquad (6.15)$$

Рівняння (6.15) звуться параметричними рівняннями прямої у просторі, а число t – параметром.

Тепер запишемо рівняння прямої, яка проходить через дві різні точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Нехай напрямним вектором буде вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, а пряма проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тоді, згідно з (6.15), отримуємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пряма, як лінія перетину двох площин. Загальні рівняння прямої у просторі

Нехай у канонічних рівняннях прямої

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \qquad (6.16)$$

коефіцієнт n не дорівнює нулю, тобто пряма не паралельна площині xOy. Запишемо ці рівняння окремо у такому вигляді:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{z - z_1}{n}, \quad \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}.$$

Ці рівняння цілком визначають пряму. Але кожне із цих рівнянь окремо визначає площину, причому, перша з них паралельна осі Oy, а друга – осі Oy.

Якщо б коефіцієнт n дорівнював нулю, то обов'язково хоч би один з двох других коефіцієнтів, наприклад l, не дорівнював би нулю, тобто пряма не була б паралельно площині yOz. У цьому разі ми змогли б означити її рівняннями площин, записав їх у канонічному вигляді:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}, \qquad \frac{x - x_1}{l} = \frac{z - z_1}{n}.$$

Таким чином, будь-яка пряма може бути виражена рівняннями двох площин, які проходять через неї. Будь-які дві з них, перетинаючись, визначають пряму у просторі.

Отже, будь-які дві не паралельні між собою площини, які задані загальними рівняннями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{6.17}$$

визначають пряму їх перетину.

Рівняння (6.17), які розглядаються сумісно, звуться *загальними рівняннями* прямої.

Покажемо, як пряму, задану рівняннями (6.17) двох різних і не паралельних площин привести до канонічного виду (6.16). Для цього треба:

1) знайти координати однієї з точок прямої $M_1(x_1, y_1, z_1)$, через яку проходе пряма (3.17);

2) напрямний вектор $\bar{q} = (l, m, n)$ прямої (6.17) .

Координати точки M_1 легко знайдемо із системи (6.17), вибираючи одну з координат довільно, а дві інші – після вирішення системи (6.17) відносно координат, які залишились.

Щоб знайти напрямний вектор прямої, зауважимо, що цей вектор, що направлений вздовж лінії перетину даних площин, повинен бути перпендикулярним до обох нормальних векторів $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ та $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ цих площин. Його знайдемо як векторний добуток нормальних векторів $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$

$$\bar{q} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} . \tag{6.18}$$

Таким чином, для канонічних рівнянь прямої (6.16) за x_1, y_1, z_1 можна взяти будь-який розв’язок системи (6.17), а за l, m, n числа:

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad m = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

П р и к л а д . Привести до канонічного виду рівняння прямої

$$2x - 3y + z = 0, \quad 3x + y - 2z - 4 = 0.$$

Розв’язок. Вибираємо довільно одну з координат. Нехай, наприклад,

$$z=1. \text{ Тоді } \begin{cases} 2x-3y=4 \\ 3x+y=6 \end{cases}, \text{ звідки } x=2,\ y=0.$$

Таким чином, ми маємо точку $M(2;0;1)$, яка належить до прямої. Знайдемо тепер координати напрямного вектора:

$$\bar{S}=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \qquad l=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=6-1=5; \qquad l=5.$$

$$m=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=4+3=7; \quad m=7. \qquad n=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2+9=11; \quad n=11.$$

Канонічні рівняння прямої будуть:

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z-1}{11}.$$

Кут між двома прямими у просторі. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай дві прямі L_1 і L_2 у просторі задані своїми канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{і} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Тоді задача визначення кута між цими прямими сходить до визначення кута φ між їх напрямними векторами $\bar{q}_1=(l_1,m_1,n_1)$ і $\bar{q}_2=(l_2,m_2,n_2)$. Використовуючи визначення скалярного добутку векторів $\bar{q}_1$ і $\bar{q}_2$ у координатній формі, дістанемо

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\ \sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \qquad (6.19)$$

Умова паралельності прямих L_1 і L_2 еквівалентна умові колінеарності векторів $\bar{q}_1$ і $\bar{q}_2$ і має вигляд:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}. \qquad (6.20)$$

Умова перпендикулярності прямих L_1 і L_2 може бути отримана з формули (3.19) (при $\cos\varphi=0$), або визначена рівністю нулю скалярного добутку векторів $\bar{q}_1$ та $\bar{q}_2$

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0. \qquad (6.21)$$

П р и к л а д . Скласти рівняння прямої лінії, яка проходить через задану точку $M_1(-2;1;-1)$, паралельно прямій $\frac{x+3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+1}{3}$.

Розв'язок. Рівняння прямої, яку ми розшукуємо, можна записати у вигляді

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}.$$

Оскільки ця пряма паралельна даній, то маємо

$$\frac{l_1}{1}=\frac{m_1}{-2}=\frac{n_1}{3}.$$

Звідки можна взяти $l_1=1, \quad m_1=-2, \quad n_1=3.$

Отже рівняння прямої, яку ми розшукували, будуть:

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}.$$

Умови, при яких дві прямі належать до однієї площини

Дві прямі у просторі L_1 і L_2 можуть: 1) перетинатися; 2) бути паралельними; 3) бути перехресними. У перших двох випадках прямі L_1 і L_2 належать до однієї площини.

Дістанемо умови, при яких дві прямі, які задані канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ і $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$, належать до однієї площини.

Очевидно, що для приналежності двох даних прямих до однієї площини необхідно і достатньо, щоб три вектори $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1), \bar{q}_1=(l_1, m_1, n_1)$ та $\bar{q}_2=(l_2, m_2, n_2)$ були компланарні. Для цього, в свою чергу, необхідно і достатньо, щоб змішаний добуток цих векторів дорівнював нулю. В координатній формі необхідна і достатня умова приналежності двох прямих до однієї площини буде виглядати так:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (6.22)$$

Якщо прямі L_1 і L_2 задовольняють умові (6.22), то вони або перетинаються, або паралельні. Оскільки умова паралельності прямих має вигляд (6.20), то для перетинання двох прямих L_1 і L_2 у просторі необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (6.22) і щоб не виконувалася хоча б одна з пропорцій $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$.

6.3. Пряма лінія та площина у просторі

Кут між прямою та площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Розглянемо площину, яка задана загальним рівнянням

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

та пряму, яка задана канонічним рівнянням

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

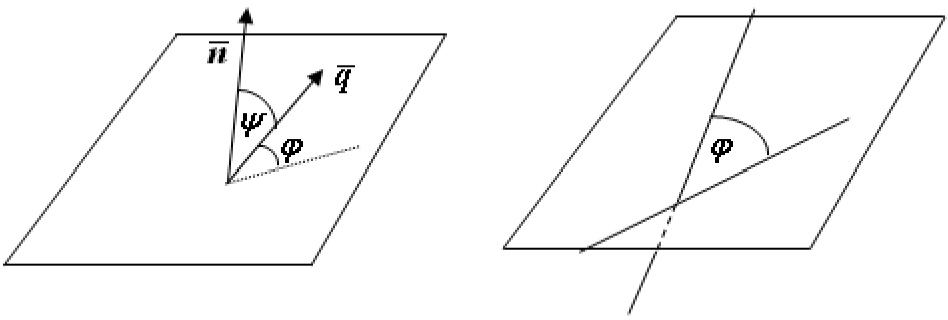


Рис. 6.3

Кут між прямою і площиною – це гострий кут φ між прямою та її проекцією на площину (рис.6.3). Оскільки цей кут доповнює до $\frac{\pi}{2}$ кут ψ між направмним вектором прямої $\bar{q}=(l,m,n)$ і нормальним вектором площини $\bar{n}=(A,B,C)$, тобто $\psi=\frac{\pi}{2}-\varphi$ і $\cos\psi=\sin\varphi$. Використовуючи визначення скалярного добутку векторів $\bar{n}$ і $\bar{q}$ у координатній формі, дістанемо формулу

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+c^2}\,\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (6.23)$$

Пряма і площина паралельні, якщо перпендикулярні вектори $\bar{n}$ і $\bar{q}$, тобто умова паралельності прямої та площини має вигляд

$$Al+Bm+Cn=0. \qquad (6.24)$$

Якщо вектори $\bar{n}$ і $\bar{q}$ паралельні, то пряма буде перпендикулярна до площини, тобто умовою перпендикулярності прямої і площини є

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}. \qquad (6.25)$$

Приклад. Чи будуть перпендикулярними площина $4x+2y+8z=0$ та пряма AB, *якщо* $A(3;2;5), B(1;3;9)$?

Приклад. Знайти кут між прямими $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+5}{0}=\frac{z-1}{1}$ $\quad i \quad$ $x=t-1, y=-2t-2, z=-2t.$

Розв'язок. Щоб застосувати формулу (6.19), необхідно рівняння другої прямої перевести в канонічні . Оскільки $t=x+1=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-2}$, то канонічні рівняння другої прямої мають вигляд $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-2}$, тому

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot(-1)+0\cdot(-2)+1\cdot(-2)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \textit{звідки} \quad \varphi=\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Перетин прямої та площини

Нехай пряма і площина задані рівняннями

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \quad \text{та} \quad Ax+By+Cz+D=0.$$

Координати точки перетину прямої лінії з площиною повинні одночасно задовольняти вказаним рівнянням, а тому для їх обчислення треба сумісно вирішити ці рівняння, враховуючи, що x, y та z – невідомі. Записуючи канонічні рівняння прямої у параметричному вигляді з невідомим параметром t, отримуємо систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \\ z=z_1+nt \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases} \qquad (6.26)$$

Підставляючи значення x, y, z з перших трьох рівнянь в четверте рівняння (6.26), отримаємо

$$A(x_1+lt)+B(y_1+mt)+C(z_1+nt)=0.$$

Звідки знаходимо

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Al + Bm + Cn}. \qquad (6.27)$$

Підставивши знайдене значення t у вираз для x, y та z, отримаємо координати точки перетину прямої та площини, які ми розшукували.

Якщо $Al + Bm + Cn \neq 0$, то t має скінченне значення; отже в цьому разі пряма перетинає площину.

Якщо $Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0$, то пряма паралельна площині (за умовою першої рівності), а точка $M(x_1, y_1, z_1)$, через яку проходе пряма, не належить до площини, отож пряма не має ні одної спільної точки з площиною.

Якщо ж $Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, то пряма паралельна площині (за умовою першої рівності) і проходе через точку (x_1, y_1, z_1), яка належить до даної площини (за умовою другої рівності). Отож, пряма цілком належить до площини.

П р и к л а д. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $M(1;3;5)$ на пряму $\frac{x+30}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+2{,}5}{-1}$.

Розв'язок. Рівняння площини, яка проходить через точку $M(1;3;5)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+30}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+2{,}5}{-1}$ має вигляд:

$6(x-1) + 2(y-3) - (z-5) = 0$ або $6x + 2y - z - 7 = 0.$ Знайдемо точку перетину даної площини із даною прямою. Для цього необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6x + 2y - z - 7 = 0, \\ x = 6t - 30, \\ y = 2t, \\ z = -t - 2{,}5. \end{cases}$$

Одержимо точку $M_1(-3;9;-7)$. Шуканий перпендикуляр – це пряма, що проходить через дві точки $M(1;3;5)$ і $M_1(-3;9;-7)$. Запишемо його рівняння

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-5}{-12} \quad \textit{або} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-5}{6}.$$

Рівняння пучка площин

Нехай рівняння даної прямої є

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

Складемо рівняння першого степеня

$$Ax+By+Cz+D+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D)=0, \qquad (6.28)$$

яке при будь-якому значенні сталого λ визначає площину. Якщо точка належить до даної прямої, то її координати разом задовольняють обидва рівняння цієї прямої і відповідно рівняння (6.28) при будь-якому значенні λ. Таким чином, рівняння (6.28) визначає площини, які проходять через дану пряму. Обернено, усяка така площина визначається одною точкою $M_1(x_1,y_1,z_1)$, яка не належить даній прямій лінії, значення сталого λ, відповідного цій площині, знайдуться з умови:

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D+\lambda(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)=0,$$

якщо тільки

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1\neq 0 .$$

Таким чином, рівняння (6.28) при відповідному виборі λ визначає будь-яку площину, яка проходить через задану пряму, за винятком лише однієї із цих заданих площин, а саме

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

Пучком площин називають сукупність всіх площин, які проходять через дану пряму.

Тоді рівняння (6.22) є рівнянням пучка площин, тому що воно визначає всі площини пучка (крім другої з даних площин).

П р и к л а д . Скласти рівняння площини, яка проходе через пряму $x + y - z = 0$, $x - y + z - 1 = 0$ і точку $(1;1;-1)$.

Розв'язок. Рівняння будь-якої площини, яка проходе через дану пряму, є

$$x + y - z + \lambda(x - y + z - 1) = 0 .$$

Оскільки площина, яку ми розшукуємо, проходе через точку $(1;1;-1)$, то

$$1 + 1 + 1 + \lambda(1 - 1 - 1 - 1) = 0; \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} .$$

Рівняння площини, яку ми розшукуємо, буде

$$x + y - z + \frac{3}{2}(x - y + z - 1) = 0 .$$

$$2x + 2y - 2z + 3x - 3y + 3z - 3 = 0 .$$

Остаточно $$5x - y + z - 3 = 0 .$$

Задачи для самостійної роботи

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;1;-1)$ перпендикулярно до вектора $\bar{a} = (1;2;3)$.

Приклад. Площина проходить через точки $M_1(1;2;-1)$ та $M_2(-3;2;1)$ і відтинає на осі ординат відрізок $b = 3$. Скласти рівняння цієї прямої у "відрізках".

Приклад. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(3;0;4), M_2(5;2;6), M_3(2;3;-3)$.

Приклад. Обчислити відстань від точки $M(-1;1;-2)$ до площини $2x - 3y + 6z - 11 = 0$.

Приклад. Обчислити відстань між паралельними площинами

$$3x - y + \frac{3}{2}z - 9 = 0 \quad i \quad -6x + 2y - 3z + 4 = 0.$$

Приклад. Скласти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3;2;1)$ паралельно до вектора $\bar{s} = (2;-1;4)$.

Приклад. Знайти напрямні косинуси прямої $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

Приклад. Скласти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(3;-2;1)$ та $M_2(1;2;-1)$.

Приклад. Звести до канонічного вигляду загальне рівняння прямої

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$$

Приклад. Знайти кут між прямими $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+5}{0}=\frac{z-3}{1}$ і $x=t-1, y=-2t-2, z=-2t.$

Приклад. Знайти кут між прямою $x=9+t, y=5-2t, z=-1-t$ і площиною $4x-2y+2z+7=0.$

Приклад. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$

І площини $3x-2y+z-3=0.$

Зразок білета залікового модуля №4

1. Побудувати площини :

$a)$ $x-z-5=0,$ $б)$ $2x+y-z+4=0.$ **(1 бал)**

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1;3;5)$ перпендикулярно до площини $x-2y+5z-3=0.$ **(1 бал)**

3. Чому дорівнює кут між прямими $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-5}{6}$ та $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=2t, \\ z=-t+1. \end{cases}$?

(1 бал)

4. З'ясувати, чи будуть перпендикулярними площини $x-2y+2z=0$ та $2x-2y-2z+3=0$? **(1 бал)**

5. Записати канонічні рівняння прямої $\begin{cases} 3x+5y-7z-3=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$ **(2 бали)**

6. Знайти відстань між площинами $6x-3y+2z+5=0$ та $6x-3y+2z+-9=0.$ **(2 бали)**

7. Знайти відстань між прямими $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}\,та\,\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}.$

(4 бали)

ЛІТЕРАТУРА

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. Изд. 26-М.: Гостехиздат. физ-мат. литературы, 1961.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.- М.: Наука, 1971.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра.- М.: Наука, 1978.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.- М.: Наука, 1980.
5. Рудовський Л.П., Костробій та ін. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. -Львів: Державний університет, Львівська політехніка, 1999.
6. Рудовський Л.П., Костробій та ін. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. -Львів: Державний університет, Львівська політехніка, 1999.

З М І С Т

Навчальне видання

ЛАРИСА ПЕТРІВНА КАГАДІЙ
АНАТОЛІЙ ВАСИЛЬОВИЧ ПАВЛЕНКО
КОСТЯНТИН УСТИМОВИЧ ЧУДНОВ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА 1

Тем. план 2010, поз. 47

Редактор

Підписано до друку 22.03.2010. Формат 60х84 1/16 . Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид.арк. 5,06. Умов.друк.арк. 4,95. Тираж 100 пр. Замовлення № .

Національна металургійна академія України
49600, Дніпропетровськ-5, пр.Гагаріна,4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ