МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

РОБОЧА ПРОГРАМА,

методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 136 – металургія (бакалаврський рівень вищої освіти)

Частина 2

Дніпро НМетАУ 2017

УДК 517(07)
Робоча програма, методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 136 – металургія (бакалаврський рівень вищої освіти). Частина 2 / Укл.: В.Л. Копорулін, О.А. Дісковський, О.А. Мельник. – Дніпро: НМетАУ, 2017. – 90 с.

Наведені робоча програма до вивчення дисципліни «Вища математика» у другому семестрі, список рекомендованої літератури, методичні вказівки, супроводжені розв'язанням типових прикладів з докладними поясненнями, та варіанти контрольних завдань.

Призначені для студентів першого курсу спеціальності 136 – металургія заочної форми навчання (бакалаврський рівень вищої освіти).

Укладачі: В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.
О.А. Дісковський, д-р. техн. наук, доц.
О.А. Мельнік, ст. викл.

Відповідальний за випуск В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.

ЗМІСТ

ВСТУП

Вища математика без перебільшення є однією з найважливіших складових практично усіх природознавчих і технічних дисциплін. Тому її вивчення вкрай важливе для фундаментальної фахової підготовки сучасного інженера.

Лекції і практичні заняття, які проводяться для студентів заочної форми навчання, носять переважно оглядовий характер. Їх мета – створити уяву щодо загальної схеми побудови даного розділу математики, ознайомити з основними теоретичними відомостями і методами розв’язання типових задач. Головною ж формою навчання студента-заочника є самостійна робота. Вивчення теоретичних положень доцільно супроводжувати самостійним розв’язанням відповідних задач і лише після вироблення достатніх практичних навичок приступати до виконання завдань контрольної роботи. Необхідні консультації протягом навчального семестру надаються викладачами академії згідно із затвердженим розкладом.

Сьогодні в Інтернеті неважко знайти величезну кількість літератури з будь-якої теми, в тому числі і з вищої математики. Тому до списку рекомендованої літератури увійшли лише деякі з найбільш уживаних на думку авторів джерел. Рекомендації щодо їх використання дані у методичних вказівках до виконання кожної контрольної роботи. Консультації відносно інших підручників студент може отримати у викладача.

Р О Б О Ч А   П Р О Г Р А М А
навчальної дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

ІІ семестр

Розподіл навчальних годин

<table>
<tr><th colspan="5">Кількість годин</th><th rowspan="3">Кількість контр. робіт</th><th rowspan="3">Форма звітності</th></tr>
<tr><th rowspan="2">УСЬОГО</th><th colspan="3">Аудиторних занять</th><th rowspan="2">Самостійної роботи</th></tr>
<tr><th>Усього</th><th>Лекцій</th><th>Практичних занять</th></tr>
<tr><td>180</td><td>32</td><td>16</td><td>16</td><td>148</td><td>1</td><td>екзамен</td></tr>
</table>

Зміст програми

9. Диференціальні рівняння першого порядку

27. Задачі геометричного і фізичного змісту, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку: основні поняття і означення.

28. Диференціальні рівняння з відокремлюваними та подільними змінними. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та такі, що до них приводяться.

29. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та рівняння Бернуллі.

10. Диференціальні рівняння вищих порядків

30. Диференціальні рівняння вищих порядків: загальні поняття і означення.

31. Рівняння, які допускають зниження порядку.

32. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами: загальні поняття і означення.

33. Розв’язування рівнянь другого порядку. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків: теорема про структуру загального розв’язку, принцип суперпозиції частинних розв’язків. Розв’язування рівнянь зі сталими коефіцієнтами: метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа), підбір

частинного розв’язку та його відшукання методом невизначених коефіцієнтів у випадку “спеціальної” правої частини.

11. Числові ряди

34. Числові ряди: основні поняття і означення. Необхідна умова збіжності. Основні властивості збіжних рядів.

35. Достатні умови (ознаки) збіжності числових рядів з додатними членами: ознака порівняння, ознака Д`Аламбера, "радикальна" ознака Коші, "інтегральна" ознака Кощі.

36. Збіжність знакопочережних рядів (ознака Лейбніца). Абсолютна і умовна збіжність знакозмінних числових рядів.

12. Функціональні і степеневі ряди та їх застосування

37. Означення функціональні ряди. Мажоровні ряди.

38. Степеневі ряди: теорема Абеля, обчислення радіуса, інтервалу й області збіжності. Основні властивості степеневих рядів.

39. Розвинення функцій у ряди Тейлора і Маклорена.

40. Обчислення значень тригонометричних функцій логарифмів, інтегралів. Приклади застосування степеневих рядів до розв`язання диференціальних рівнянь.

13. Основи теорії ймовірностей

41. Простір елементарних подій: випадкові події та дії над ними. Відносна частота події. Класичне означення ймовірності та її основні властивості.

42. Теореми додавання та множення ймовірностей. Умовна ймовірність події.

43. Формула повної ймовірності та формула Байєса.

44. Послідовні незалежні випробування. Формули Бернулі та Пуасона. Локальна та інтегральна теореми Лапласа.

45. Випадкові величини: закони розподілу дискретної та неперервної випадкових величин, функція розподілу та щільність розподілу.

46. Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення та їх властивості.дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

14. Основи математичної статистики

47. Елементи математичної статистики: генеральна та вибіркова сукупність, статистичний ряд розподілу, числові характеристики вибірки.

48. Обробка результатів вимірювання: статистичне оцінювання параметрів розподілу. Спроможні та незміщені оцінки. Надійні інтервали для математичного сподівання та дисперсії.

49. Кореляційна залежність. Коефіцієнт кореляції та його властивості. Функції та лінії регресії кореляційного поля.

50. Лінійна парна регресія. Складання вибіркових рівнянь регресії за даними кореляційної таблиці та їх аналіз: зв`язок між коефіцієнтом кореляції та коефіцієнтом лінійної регресії.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

ПІДРУЧНИКИ І НАВЧАЛЬНІ ПОСІБНИКИ

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 479 с.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.

4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.

7. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.

ЗБІРНИКИ ЗАДАЧ

8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 405 с.

9. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004. – 480 с.

10. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / Под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 592 с.

11. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 4: Учеб. пособие для втузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

Виконання контрольної роботи треба починати з вивчення теоретичних положень за наведеними посиланнями, причому це необхідно поєднувати з самостійним розв'язанням рекомендованих задач. До виконання контрольних завдань доцільно приступати тільки після вироблення достатніх практичних навичок. Типові приклади наведені з метою допомогти в цьому.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

Рекомендується (скориставшись одним або двома з наведених нижче джерел)

– вивчити теоретичні положення за **[1]**, гл. 1, 2, 3, §§ 3.1-3.4, 4, 5, 6, §§ 6.1-6.3, гл. 7, §§7.1, 7.5-7.7, гл. 11, §§ 11.1-11.7; **[2]**, гл. 1-8, 10, 11, гл. 12, §§ 1-7, гл. 13, 15, гл. 16, §§ 1-19, гл. 17, §§ 1-2, 4-7, гл. 18, §§ 1-9, гл. 19, §§ 1-7, 22-24; **[4]**, гл. 8, §§1.1-1.5, 2, 3, 4.1, 4.2, гл. 9, §§ 1.1-1.5, 2.1-2.6; **[5]**, гл. X, §§ 47, 48.1-48.4, 49, 50, 51.1-51.4, гл. XIII, XIV; **[6]**, гл. 1, 2, гл. 3, §§ 3.1, 3.4-3.5, гл. 5, § 5.5, гл. 7, 8; **[7]**, гл. 15, §§ 1.1-1.6, 2-4, гл. 14, §§ 1-5;

– розібрати розв'язання задач у **[3]**, гл. IV, §§ 1-4, гл. III, §§ 1, 3-6, гл. V, §§ 1-6, 8-11, 14, 16-18;

– самостійно розв'язати задачі: **[3]**, №№ 301, 302, 304, 305, 307, 308, 310, 311, 314, 368, 374, 377, 391, 392, 394, 416, 419, 423, 435, 515, 516, 523, 550, 551, 554, 568, 570, 603, 605, 611, 645, 647, 651, 652, 659, 660, 685, 686, 696, 697, 698, 703, 704, 721, 723, 725, 743, 744, 764, 766, 812-814, 832, 834, 837, 843, 846, 859, 866, 870, 871, 874, 883, 886, 898, 906, 912, 953; **[8]**, №№ 5, 21, 28, 45, 51, 57, 82, 85, 93, 94, 99, 101, 112, 121, 126, 133, 146, 171, 173, 180, 193, 211, 220, 257, 260, 269, 272, 276, 296, 309, 329, 351, 442, 445, 447, 449, 450, 459, 502, 509, 536, 636, 640; **[9]**, гл. 8, №№ 2, 4, 43, 44, 48, 61, 66, 84, 86, 103, 105, 115, 121, 124, 133, 140, 206, 213, 214, 215, 217, 221, 227, 246-а, 246-б, 270 – 273, 291, 308 – 310, 315, 322, 339, 345, 350, 373, 376, 378, гл. 9, №№ 2, 4, 41, 43, 50, 52, 54, 56, 59, 64, 66, 68, 71, 75, 77, 80, 131, 136, 140, 143, 154, 211, 214, 216, 229, 233, 250, 293, 294, 302, 303, 307, 314, 316, 332, 338, 343, 348, 351, 353, 357, 359; **[10]**, №№ <u>1.1.</u>12, 13, 20, 21, 24, 25, 29, 30, 37, 39, 40, 42, 44, 46-49, 51, 53, <u>1.2.</u>7, 8, 12, 14, 16, 18, <u>1.3.</u>7, 8, 10, 20, 34, 35, <u>2.1.</u>2 (а, б), 16, 19, 23, 25, 40, 64, <u>2.2.</u>2, 4, 10, 27, <u>2.3.</u>2, 3, 5, 12, 23, <u>2.6.</u>2, 4, 7, 9, 12, 13, 17, 24, 27, 28, 30, <u>2.7.</u>4, 6, 19, 26, 34, 38-40, 44, 45, 49, 58, 61, 78, 79, 81, 86, 87, <u>6.1.</u>4, 6, 12, 18, 23, 24, <u>6.3.</u>4, 5, 6, 18, <u>6.4.</u>4, 14, 16, 24, 35, <u>6.5.</u>3, 5, 10, <u>6.6.</u>5, <u>6.7.</u>4, 10, 16, <u>6.8.</u>4, 9, <u>6.9.</u>4, 8, <u>6.10.</u>3, 4, <u>6.11.</u>2, 3, 4, 8, 59; **[11]**, гл. 18, №№ 66, 68, 78, 84, 87, 164, 191, 196, 226, 244, 258-260, 271, 312, 352, 361, 362, гл. 19, №№ 1, 7, 24, 49, 160, 293, 294, 307.

<u>Приклад 1.</u> З'ясувати, чи буде функція $y = x\arcsin x$ розв'язком рівняння $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Якщо функція є розв'язком рівняння, то її підстановка до цього рівняння повинна перетворити його на вірну тотожність. Перевіримо це.

Підставимо $y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ разом із $y = x\arcsin x$ до рівняння:

$$x\arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - x\arcsin x = xtg\frac{x\arcsin x}{x}.$$

З урахуванням того, що $tgx = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ й $\sin(\arcsin x) = x$, отримуємо вірну тотожність $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Отже, задана функція справді задовольняє рівнянню, тобто є його розв'язком.

<u>Приклад 2.</u> Скласти рівняння кривої, якщо відомо, що вона проходить через точку $M_0(0,1)$, а кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої в кожній точці дорівнює $k(x,y) = x\sqrt[3]{y}$.

Розв'язання. Як відомо, кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = y(x)$ в довільній точці $M(x, y)$ є $k(x, y) = y'$. Отже, маємо рівняння $y' = x\sqrt[3]{y}$. Поділимо змінні і отримаємо $\dfrac{dy}{\sqrt[3]{y}} = xdx$, звідки $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{C}{2}$ або $y^2 = \left(\dfrac{x^2+C}{3}\right)^3$. Отриманий загальний розв'язок є рівнянням сім'ї кривих. Шукана крива проходить через точку M_0, отже, її рівняння визначається значенням $C = C^*$, знайденим з умови $y(x_0) = y_0$, тобто, в даному випадку, з умови $y(0) = 1$. Отже, $1^2 = \left(\dfrac{0+C^*}{3}\right)^3$, звідки $C^* = 3$. Таким чином, рівняння шуканої кривої є $y^2 = \left(\dfrac{x^2}{3}+1\right)^3$. Графік додатної гілки кривої наведений на рис. 1.

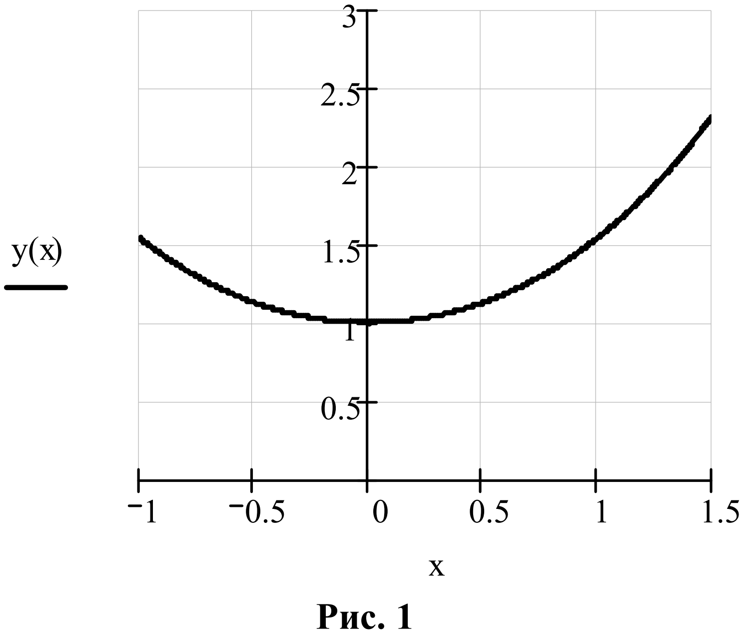

Рис. 1

Приклад 3. Розв'язати рівняння

а) $2xy^2dx - ydy = yx^2dy - 6xdx$; б) $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$;

в) $y' = \frac{2x + y - 4}{x - y + 1}$; г) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$ (застосувати метод Бернуллі).

Розв'язання.

а) Перетворимо рівняння до вигляду $2x(y^2+3)dx = y(x^2+1)dy$. Отже, маємо *рівняння з відокремлюваними змінними* $X_1(x)Y_1(y)dx + X_2(x)Y_2(y)dy = 0$. Поділимо обидві частини рівняння на добуток $(y^2+3)(x^2+1)$. Оскільки обидва множники не дорівнюють нулю (а саме, додатні), то при цьому частинні (або особливі) розв'язки рівняння не загублюються. Таким чином, дістаємо рівняння з відокремленими змінними $\frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{y}{y^2+3}dy$. Після інтегрування отримуємо загальний інтеграл заданого рівняння $\ln(x^2+1) = \frac{1}{2}\ln(y^2+3) + \ln|C|$, $C \neq 0$, який після потенціювання і використання властивостей логарифмів набуває вигляду $\frac{x^2+1}{\sqrt{y^2+3}} = C$;

б) Маємо *однорідне* диференціальне рівняння першого порядку $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, тому що функції $P(x,y) = x - y\cos\frac{y}{x}$ й $Q(x,y) = x\cos\frac{y}{x}dy$ є однорідними одного й того самого виміру. Справді, $P(\lambda x,\lambda y) = \lambda x - \lambda y\cos\frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda \cdot P(x,y)$, $Q(\lambda x,\lambda y) = \lambda x\cos\frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda \cdot Q(x,y)$.
Оскільки $x \neq 0$, то рівняння приводиться до вигляду

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}}{\cos\frac{y}{x}}$. Застосуємо підстановку $y = ux$. Тоді $y' = u'x + u$ і

$u'x + u = \frac{u\cos u - 1}{\cos u}$; $u'x = \frac{u\cos u - 1}{\cos u} - u$; $u'x = -\frac{1}{\cos u}$; $\frac{du}{dx}x = -\frac{1}{\cos u}$;

$\cos u du + \frac{dx}{x} = 0$. Інтегрування отриманого рівняння з відокремленими змінними дає загальний інтеграл $\sin u+\ln|x|=C$, який після повернення до вихідної змінної y набуває остаточного вигляду $\sin\dfrac{y}{x}+\ln|x|=C$;

в) Дане рівняння відноситься до типу $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$. Такі рівняння у випадку $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ зводяться до однорідних за допомогою підстановки $x=x_0+u$, $y=y_0+v$, де x_0, y_0 є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$. Розв'язком системи $\begin{cases} 2x+y-4=0, \\ x-y+1=0 \end{cases}$ є $x_0=1$, $y_0=2$.

Зробимо підстановку $x=1+u$, $y=2+v$. Тоді $dx=du$, $dy=dv$, $y'=\dfrac{dv}{du}$.

Отримуємо однорідне рівняння $\dfrac{dv}{du}=\dfrac{2u+v}{u-v}$. Розв'яжемо це рівняння за допомогою підстановки $v=zu$, $\dfrac{dv}{du}=u\dfrac{dz}{du}+z$. Маємо

$$u\frac{dz}{du}+z=\frac{2+z}{1-z};\quad u\frac{dz}{du}=\frac{2+z^2}{1-z};\quad \frac{1-z}{2+z^2}dz=\frac{du}{u}.$$

Після інтегрування дістаємо загальний інтеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{z}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln(2+z^2)=\ln|u|+C.$$

Повертаючись до вихідних змінних за формулами $z=\dfrac{v}{u}$, $v=y-2$, $u=x-1$, остаточно отримуємо $\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y-2}{x-1}\right)-\dfrac{1}{2}\ln\left[2+\left(\dfrac{y-2}{x-1}\right)^2\right]=\ln|x-1|+C$;

г) Маємо *лінійне* диференціальне рівняння першого порядку $y'+p(x)y=q(x)$. Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді добутку двох невідомих функцій $y=uv$, отже, $y'=u'v+uv'$. Підставимо y та y' у рівняння і отримаємо $u'v+uv'+uv\cos x=e^{-\sin x}$ або $u'v+u(v'+v\cos x)=e^{-\sin x}$ $(*)$. Невідому функцію $v=v(x)$ будемо шукати з умови $v'+v\cos x=0$ $(**)$, отже, $\dfrac{dv}{dx}=-v\cos x$ або $\dfrac{dv}{v}=-\cos x dx$. Інтегруючи, знаходимо $\ln|v|=-\sin x$, звідки $v=e^{-\sin x}$ (для зручності беремо частинний розв'язок, якому відповідає нульове значення довільної сталої). Підставимо знайдену функцію v в рівняння (*) і з урахуванням (**) отримаємо $u'e^{-\sin x}=e^{-\sin x}$. Оскільки $e^{-\sin x}\neq 0 \quad \forall x$, то $u'=1$ або $u=x+C$. Таким чином, загальний розв'язок має вигляд $y=(x+C)\,e^{-\sin x}$.

<u>Приклад 4.</u> Розв'язати задачу Коші $xy'+y=y^2\ln x$, $y(1)=-\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $x>0$, то без втрати розв'язку перетворимо рівняння до вигляду $y'+\frac{y}{x}=y^2\frac{\ln x}{x}$. Отримали рівняння Бернуллі $y'+p(x)y=y^r q(x)$, де $r\neq 0$, $r\neq 1$. Розв'яжемо його однойменним методом: $y=uv$, $y'=u'v+uv'$,

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=u^2v^2\frac{\ln x}{x};\quad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=u^2v^2\frac{\ln x}{x}\quad (*);\quad v'+\frac{v}{x}=0\quad (**);$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x};\qquad \ln|v|=-\ln|x|;\qquad v=\frac{1}{x};\qquad u'\frac{1}{x}=u^2\frac{1}{x^2}\frac{\ln x}{x};\qquad \frac{du}{u^2}=\frac{\ln x}{x^2}dx;$$

$-\frac{1}{u}=-\frac{\ln x+1}{x}-C$; $\quad u=\frac{x}{\ln x+1+Cx}$. Загальний розв'язок $y=uv$, таким чином, має вигляд $y=\frac{1}{\ln x+1+Cx}$. Розв'язок поставленої задачі Коші $\tilde{y}$ визначається значенням довільної сталої C^*, знайденим з початкової умови: $-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+C^*}$, $\quad C^*=-3$. Отже, шуканий розв'язок має вигляд $\tilde{y}=\frac{1}{\ln x+1-3x}$.

<u>Приклад 5.</u> Розв'язати задачу Коші

а) $y''=\frac{1}{1+x^2}$, $y(0)=-3$, $y'(0)=2$; б) $x(y''+1)+y'=0$, $y(1)=\frac{1}{4}$, $y'(1)=0$;

в) $y''tgy=2y'^2$, $y(1)=\frac{\pi}{4}$, $y'(1)=-\frac{1}{2}$; г) $y''=\sqrt{1-y'^2}$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$;

д) $2y''=y'+y'^3$, $y(0)=\frac{\pi}{2}$, $y'(0)=1$; е) $3y'y''=e^y$, $y(-5)=0$, $y'(-5)=1$.

Розв'язання.

а) Рівняння має вигляд $y''=f(x)$, тобто містить тільки старшу похідну і незалежну змінну. Знайдемо його загальний розв'язок шляхом послідовного двократного інтегрування:

$$\frac{d(y')}{dx}=\frac{1}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad d(y')=\frac{dx}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad \int d(y')=\int\frac{dx}{1+x^2}+C_1 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y'=arctgx+C_1 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=arctgx+C_1 \quad\Rightarrow\quad dy=\left(arctgx+C_1\right)dx \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y=\int(arctgx+C_1)dx+C_2 \quad\Rightarrow\quad y=xarctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2.$$

Частинний розв'язок $\tilde{y}=y(x,C_1^*,C_2^*)$ знайдемо, визначивши з початкових умов значення $C_1=C_1^*$ та $C_2=C_2^*$ довільних сталих: $y(0)=-3 \;\Rightarrow\; -3=C_2^*$, $y'(0)=2 \;\Rightarrow\; 2=C_1^*$. Отже, розв'язок поставленої задачі Коші має вигляд $\tilde{y}=xarctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+2x-3$;

б) Рівняння має вигляд $F(x,y',y'')=0$, тобто містить в явному вигляді незалежну змінну, але не містить невідому функцію. Порядок такого рівняння знижується на одиницю за допомогою підстановки $y'=p(x)$. Тоді $y''=p'$ і рівняння набуває вигляду $x(p'+1)+p=0$. Отримали рівняння першого порядку, яке може бути віднесено як до однорідного, так і до лінійного. Вважаючи його однорідним, тобто, $p'+1=-\frac{p}{x}$ зробимо підстановку $p=ux$.

Тоді $p'=u'x+u \Rightarrow u'x+u=-1-u \Rightarrow u'x=-(1+2u) \;\Rightarrow \frac{du}{1+2u}=-\frac{dx}{x} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\ln|1+2u|=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|C_1| \quad\Rightarrow\quad \sqrt{1+2u}=\frac{\sqrt{C_1}}{x} \quad\Rightarrow\quad 1+2u=\frac{C_1}{x^2} \quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow\quad u=\frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{x^2}-1\right) \quad\Rightarrow\quad p=\frac{C_1}{2x}-\frac{x}{2} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{C_1}{2x}-\frac{x}{2}$. Після відокремлення змінних і інтегрування отримуємо загальний розв'язок $y=\frac{C_1}{2}\ln|x|-\frac{x^2}{4}+C_2$.

Враховуючи, що довільні сталі незалежні одна від одної і перепозначивши $\frac{C_1}{2}$

на C_1, остаточно будемо мати $y = C_1 \ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2$. Значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(1) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + C_2^* \Rightarrow C_2^* = \frac{1}{2},\; y'(1) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} + C_1^* \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_1^* = \frac{1}{2}$. Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд $\tilde{y} = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}$;

в) Рівняння має вигляд $F(y, y', y'') = 0$, тобто містить в явному вигляді невідому функцію, але не містить незалежну змінну. Порядок такого рівняння знижується на одиницю за допомогою підстановки $y' = q(y)$. Тоді $y'' = q\frac{dq}{dy}$ і рівняння набуває вигляду $q\frac{dq}{dy}tgy = 2q^2$. Отримали рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Запишемо його у вигляді $q\left(\frac{dq}{dy}tgy - 2q\right) = 0$. Прирівнюючи до нуля кожен з множників, будемо мати $q = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = C;\; \frac{dq}{dy}tgy - 2q = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} = 2ctgydy \Rightarrow \ln|q| = 2\ln|\sin y| + \ln|C_1| \Rightarrow$$

$\Rightarrow q = C_1 \sin^2 y \Rightarrow y' = C_1 \sin^2 y \Rightarrow \frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 dx$. Отже, загальний інтеграл рівняння має вигляд $ctgy = C_1 x + C_2$ (знак « - » врахований). Бачимо, що розв'язок $y = C$ не є особливим, оскільки утворюється з загального при $C_1 = 0$. Значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow ctg\frac{\pi}{4} = C_1^* + C_2^*, \quad y'(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2}\right) = C_1^* \Rightarrow \quad C_1^* = 1,$$

$C_2^* = 0$. Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд $ctgy = x$;

г) Рівняння має вигляд $F(y', y'') = 0$, тобто не містить в явному вигляді ані невідому функцію, ані незалежну змінну. Порядок такого рівняння може бути знижений на одиницю за допомогою будь-якої з підстановок $y' = p(x)$ або

$y' = q(y)$. Переважність однієї з них визначається конкретним рівнянням. В даному випадку застосуємо підстановку $y' = p(x)$: $y'' = p'$,

$$p' = \sqrt{1-p^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = dx \quad \Rightarrow \quad \arcsin p = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad p = \sin(x + C_1) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad y' = \sin(x + C_1) \quad \Rightarrow \quad y = C_2 - \cos(x + C_1)$. Значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(0) = 2 \;\Rightarrow\; 2 = C_2^* - \cos C_1^*,\; y'(0) = 1 \;\Rightarrow\; 1 = \sin C_1^* \;\Rightarrow\; C_1^* = \frac{\pi}{2},\; C_2^* = 2.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд $\tilde{y} = 2 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ або $\tilde{y} = 2 + \sin x$;

д) Тип даного рівняння той самий, що й в попередньому прикладі. В даному разі вигідніше застосувати підстановку $y' = q(y)$ (перевірте): $y'' = q\dfrac{dq}{dy}$,

$$2q\frac{dq}{dy} = q(1+q^2) \quad \Rightarrow \quad q = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C,\quad 2\frac{dq}{dy} = 1 + q^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{1+q^2} = \frac{dy}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad arctg q = \frac{y}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad q = tg\left(\frac{y}{2} + C_1\right) \quad \Rightarrow \quad y' = tg\left(\frac{y}{2} + C_1\right) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad ctg\left(\dfrac{y}{2} + C_1\right)dy = dx \quad \Rightarrow \quad 2\ln\left|\sin\left(\dfrac{y}{2} + C_1\right)\right| = x + C_2$ – загальний інтеграл.

Значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(0) = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 2\ln\left|\sin\frac{\pi}{4}\right| = C_2^* \quad \Rightarrow \quad C_2^* = \ln\sin^2\frac{\pi}{4} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2,$$

$y'(0) = 1 \;\Rightarrow\; 1 = tg\left(\dfrac{\pi}{4} + C_1^*\right) \quad \Rightarrow \quad C_1^* = 0$. Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд $2\ln\left|\sin\dfrac{y}{2}\right| = x - \ln 2$, розв'язок $y = C$ є особливим;

е) При розв'язанні задач Коші значення кожної з довільних сталих рекомендується знаходити з початкових умов одразу, як тільки ця стала з'являється в процесі розв'язання. Це демонструє даний приклад.

Рівняння відноситься до типу $F(y, y', y'') = 0$, отже, застосуємо підстановку

$$y' = q(y),\; y'' = q\frac{dq}{dy}:\; 3q^2\frac{dq}{dy} = e^y \quad \Rightarrow \quad 3q^2 dq = e^y dy \quad \Rightarrow \quad q^3 = e^y + C_1 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad y' = \sqrt[3]{e^y + C_1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{\sqrt[3]{e^y + C_1}} = dx$. Спроба інтегрування отриманого рівняння приводить до інтеграла, що “не береться”. Врахуємо обидві початкові умови: $1 = \sqrt[3]{e^0 + C_1^*} \quad \Rightarrow \quad C_1^* = 0$. Зауважимо, що з цього місця шукаємо вже не загальний, а частинний розв’язок. Тоді $\dfrac{dy}{\sqrt[3]{e^y}} = dx \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{y}{3}} dy = dx \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad -3e^{-\frac{y}{3}} = x + C_2$. Врахуємо тепер першу початкову умову і знайдемо значення C_2^*: $-3e^0 = -5 + C_2^* \quad \Rightarrow \quad C_2^* = 2$. Отже розв’язок задачі Коші має вигляд частинного інтеграла $-3e^{-\frac{y}{3}} = x + 2$.

<u>Приклад 6.</u> Розв’язати рівняння

а) $y'' + 3y' - 4y = 0$; б) $y'' - 16y' + 64y = 0$; в) $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Розв’язання.

а) Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$. Його корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$ дійсні і не дорівнюють один одному. Відповідно до цього фундаментальну систему розв’язків утворюють функції $y_1(x) = e^x$ й $y_2(x) = e^{-4x}$, а загальний розв’язок рівняння має вигляд $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$, де C_1 й C_2 – довільні сталі;

б) Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 16\lambda + 64 = 0$. Його корені $\lambda_1 = 8 = \lambda_2$ дійсні і дорівнюють один одному. Отже, фундаментальну систему розв’язків утворюють функції $y_1(x) = e^{8x}$ й $y_2(x) = xe^{8x}$, а загальний розв’язок рівняння має вигляд $y(x) = e^{8x}(C_1 + C_2 x)$;

в) Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$. Його корені $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 25} = 3 \pm 4i$ комплексні спряжені. Отже, фундаментальну систему розв’язків утворюють функції $y_1(x) = e^{3x}\cos 4x$ й $y_2(x) = e^{3x}\sin 4x$, а загальний розв’язок рівняння має вигляд $y(x) = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші

$$y''+12y'+45y=0,\quad y(0)=5,\quad y'(0)=3.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2+12\lambda+45=0$. Його корені $\lambda_{1,2}=-6\pm\sqrt{36-45}=-6\pm 3i$ комплексні спряжені. Отже, фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(x)=e^{-6x}\cos 3x$ й $y_2(x)=e^{-6x}\sin 3x$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд $y(x)=e^{-6x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

Тоді

$$y'(x)=-6e^{-6x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+e^{-6x}(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x).$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші, для чого обчислимо значення C_1^* й C_2^* з початкових умов: $y(0)=5 \quad\Rightarrow\quad e^0(C_1\cos 0+C_2\sin 0)=5$,

$y'(0)=3 \quad\Rightarrow\quad -6e^0(C_1\cos 0+C_2\sin 0)+3e^0(-C_1\sin 0+C_2\cos 0)=3$.

Отже, $C_1^*=5$, $C_2^*=11$ і розв'язок задачі Коші має вигляд

$$\tilde{y}(x)=e^{-6x}(5\cos 3x+11\sin 3x).$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$.

Розв'язання. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x)=e^{-2x}\ln x$, яка неперервна на $(0,+\infty)$. Як відомо, загальний розв'язок такого рівняння має вигляд $y(x)=y_{одн}(x)+y^*(x)$, де $y_{одн}(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $y^*(x)$ – будь-який частинний розв'язок вихідного рівняння.

1) Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння $y''+4y'+4y=0$: оскільки характеристичне рівняння $\lambda^2+4\lambda+4=0$ має корені $\lambda_{1,2}=-2$, то фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(x)=e^{-2x}$ й $y_2(x)=xe^{-2x}$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд $y_{одн}(x)=e^{-2x}(C_1+C_2x)$.

2) Частинний розв’язок знайдемо методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа), згідно з яким $y^*(x)$ подається у вигляді $y^*(x) = D_1(x)y_1(x) + D_2(x)y_2(x)$. Невідомі функції $D_1(x)$ й $D_2(x)$ повинні задовольняти системі рівнянь $\begin{cases} D_1'(x)y_1(x) + D_2'(x)y_2(x) = 0 \\ D_1'(x)y_1'(x) + D_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$, лінійних відносно $D_1'(x)$ й $D_2'(x)$. Оскільки головний визначник цієї системи $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ являє собою визначник Вронського, який відмінний від нуля в даному випадку на $(0, +\infty)$, то система сумісна і має єдиний розв’язок, який знаходиться за правилом Крамера

$$D_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}, \quad D_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}.$$

Після інтегрування отримуємо

$$D_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx \ , \qquad D_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx \ .$$

Отже,

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}(1-2x) \end{vmatrix} = e^{-4x},$$

$$D_1(x) = -\int \frac{xe^{-2x}e^{-2x}\ln x}{e^{-4x}}dx = -\int x\ln x dx = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} \ ,$$

$$D_2(x) = \int \frac{e^{-2x}e^{-2x}\ln x}{e^{-4x}}dx = \int \ln x dx = x\ln x - x$$

(тут під символом інтеграла розуміємо первісну). Таким чином, частинний розв’язок має вигляд

$$y^*(x) = \left(-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\right)e^{-2x} + \left(x\ln x - x\right)xe^{-2x} = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x},$$

а загальний розв’язок є $y(x) = \left(C_1 + C_2x + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$.

Приклад 9. Вказати вигляд (без відшукання коефіцієнтів) частинного розв'язку рівняння.

а) $y'' - y' = x^2 + 3x + 10$; б) $y'' + 6y' + 9y = (x^2 - x - 5)\, e^{-3x}$;

в) $y'' + 9y = (x^3 - 3)\cos 3x$; г) $y'' - 8y' + 15y = 3\cos x - 5\sin x$;

д) $y'' - 8y' + 16y = (2x + 1)e^{4x} \sin 2x$; е) $y'' - 2y' + 2y = e^x (x^2 \cos x + 2\sin x)$.

Розв'язання. В усіх випадках маємо лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами й правими частинами так званого "спеціального" вигляду $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени степенів m й n відповідно. Тоді частинний розв'язок рівняння *підбирається* у вигляді $y^*(x) = x^k e^{\alpha x}[R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x]$, де k – кратність контрольного числа правої частини $\sigma = \alpha + \beta i$ серед коренів характеристичного рівняння, а $R_s(x)$ і $T_s(x)$ – многочлени *одного й того ж самого* степеня $s = \max\{m, n\}$ з *невизначеними* коефіцієнтами. У таблиці наведені вигляди частинного розв'язку в залежності від правої частини (число k залежить також від лівої частини рівняння, а саме, від коренів характеристичного рівняння, і тому визначається окремо).

№	$f(x)$	σ	s	y^*
1.	$P_m(x)$	0	m	$x^k R_m(x)$
2.	$e^{\alpha x} P_m(x)$	α	m	$x^k e^{\alpha x} R_m(x)$
3.	$P_m(x)\cos\beta x$	βi	m	$x^k [R_m(x)\cos\beta x +$ $+ T_m(x)\sin\beta x$
4.	$Q_n(x)\sin\beta x$	βi	n	$x^k [R_n(x)\cos\beta x +$ $+ T_n(x)\sin\beta x$
5.	$P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$	βi	$\max\{m, n\}$	$x^k [R_s(x)\cos\beta x +$ $+ T_s(x)\sin\beta x$
6.	$e^{\alpha x} P_m(x)\cos\beta x$	$\alpha + \beta i$	m	$x^k e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x +$ $+ T_m(x)\sin\beta x$
7.	$e^{\alpha x} Q_n(x)\sin\beta x$	$\alpha + \beta i$	n	$x^k e^{\alpha x}[R_n(x)\cos\beta x +$ $+ T_n(x)\sin\beta x$
8.	$e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x +$ $+ Q_n(x)\sin\beta x]$	$\alpha + \beta i$	$\max\{m, n\}$	$x^k e^{\alpha x}[R_s(x)\cos\beta x +$ $+ T_s(x)\sin\beta x$

а) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Судячи з правої частини, маємо випадок 1 (див. таблицю), де $f(x) = P_2(x) = x^2 + 3x + 10$, тобто $m = 2$. Оскільки $\sigma = 0$, то $k = 1$; $s = m = 2$. Отже, $y^* = x\,(Ax^2 + Bx + C)$;

б) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Судячи з правої частини, маємо випадок 2 (див. таблицю), де $f(x) = (x^2 - x - 5)\,e^{-3x}$, тобто $m = 2$. Оскільки $\alpha = -3$, $\beta = 0$, то $\sigma = -3$, а $k = 2$; $s = m = 2$. Отже, $y^* = x^2\,e^{-3x}(Ax^2 + Bx + C)$;

в) Корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Судячи з правої частини, маємо випадок 3 (див. таблицю), де $f(x) = (x^3 - 3)\cos 3x$, тобто $m = 3$. Оскільки $\alpha = 0$, $\beta = 3$, то $\sigma = 3i$, а $k = 1$; $s = m = 3$. Отже, $y^* = x\,[(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos 3x + (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)\sin 3x]$;

г) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Судячи з правої частини, маємо випадок 5 (див. таблицю), де $f(x) = 3\cos x - 5\sin x$, тобто $m = n = 0$. Оскільки $\alpha = 0$, $\beta = 1$, то $\sigma = i$, а $k = 0$; $s = 0$. Отже, $y^* = A\cos x + B\sin x$;

д) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Судячи з правої частини, маємо випадок 7 (див. таблицю), де $f(x) = (2x+1)e^{4x}\sin 2x$, тобто $n = 1$. Оскільки $\alpha = 4$, $\beta = 2$, то $\sigma = 4 + 2i$, а $k = 0$; $s = n = 1$. Отже, $y^* = e^{4x}[(Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x]$;

е) Корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Судячи з правої частини, маємо випадок 8 (див. таблицю), де $f(x) = e^x(x^2\cos x + 2\sin x)$, тобто $m = 2$, $n = 0$. Оскільки $\alpha = 1$, $\beta = 1$, то $\sigma = 1 + i$, а $k = 1$; $s = \max\{2, 0\} = 2$. Отже, $y^* = xe^x\,[(Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x]$.

<u>Приклад 10.</u> Розв'язати задачу Коші $y'' + 4y = \sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Розв'язання. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною "спеціального" вигляду $f(x) = \sin 2x$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y(x) = y_{одн}(x) + y^*(x)$, де $y_{одн}(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $y^*(x)$ – будь-який частинний розв'язок вихідного рівняння.

1) Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' + 4y = 0$: оскільки характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, то загальний розв'язок рівняння має вигляд $y_{одн}(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

2) Судячи з правої частини, маємо випадок 4 (див. таблицю), де $f(x) = \sin 2x$, тобто $m = n = 0$. Оскільки $\alpha = 0$, $\beta = 2$, то $\sigma = 2i$, а $k = 1$; $s = 0$. Отже, частинний розв'язок підбираємо у вигляді $y^* = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$. Знайдемо коефіцієнти A й B, для чого підставимо ${y^*}'$ та ${y^*}''$ у рівняння. Оскільки

$$
{y^*}' = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) = (A + 2Bx)\cos 2x + \\
+ (B - 2Ax)\sin 2x,
$$

$$
{y^*}'' = 2B\cos 2x - 2(A + 2Bx)\sin 2x - 2A\sin 2x + \\
+ 2(B - 2Ax)\cos 2x = 4\,[(B - Ax)\cos 2x - (A + Bx)\sin 2x],
$$

то отримуємо рівність

$$4\,[(B - Ax)\cos 2x - (A + Bx)\sin 2x] + 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) = \sin 2x$$

або $4B\cos 2x - 4A\sin 2x = \sin 2x$. Прирівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$ в обох частях рівності: $\begin{array}{r|l} \cos 2x & 4B = 0 \\ \sin 2x & -4A = 1 \end{array}$, звідки $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = 0$. Отже, частинний розв'язок має вигляд $y^* = -\dfrac{x}{4}\cos 2x$, а загальний розв'язок є

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x.$$

3) Знайдемо розв'язок задачі Коші, для чого обчислимо значення C_1^* й C_2^* з початкових умов: $y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$;

$$y'(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x, \; y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2C_2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Отже, $C_1^* = 0$, $C_2^* = \dfrac{1}{8}$ і шуканий розв'язок задачі Коші має вигляд

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x.$$

Приклад 11. Встановити збіжність або довести розбіжність рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n^2}\,arctg\frac{1}{n^2}$.

Розв'язання.

а) Оскільки $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}<\frac{1}{\sqrt{n\cdot n\cdot n}}=\frac{1}{n^{3/2}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ збігається як ряд Діріхле при $\alpha=\frac{3}{2}>1$, то за ознакою порівняння заданий ряд також збігається;

б) Для порівняння оберемо звичайний гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який, як відомо, розбігається. Тоді за граничною ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln n}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}=\infty.$$

Отже, на підставі цієї ознаки, заданий ряд *розбігається*;

в) Для порівняння оберемо ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$, який *збігається*, оскільки $p=2>1$. Тоді за граничною ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}}{\frac{1}{n\ln^2 n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$. Оскільки границя нескінченна, то ознака незастосовна. Це означає, що ряд для порівняння обраний невдало. Порівняння ж з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ показує, що даний ряд *розбігається* (виконайте самостійно);

г) Спроби порівняння даного ряду з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ або збіжним рядом Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ виявляються невдалими (перевірте!). Тому для порівняння оберемо (збіжний) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta}}$, де $1<\beta<2$. Візьмемо, наприклад, $\beta = 3/2$. Тоді за ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Отже, за граничною ознакою порівняння заданий ряд *збігається*;

д) При дослідженні рядів дуже корисною може виявитися ***таблиця еквівалентних нескінченно малих***:

якщо $\alpha(n)\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\sin\alpha(n) \sim \alpha(n),$$
$$\arcsin\alpha(n) \sim \alpha(n),$$
$$tg\,\alpha(n) \sim \alpha(n),$$
$$arctg\,\alpha(n) \sim \alpha(n),$$
$$\ln[1+\alpha(n)] \sim \alpha(n),$$
$$b^{\alpha(n)}-1 \sim \ln b\cdot\alpha(n),$$
$$e^{\alpha(n)}-1 \sim \alpha(n).$$

Оскільки $\frac{1}{n^2}\to 0$ при $n\to\infty$, то на підставі наведеної таблиці, $arctg\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$. Тоді $\sqrt[3]{n^2}\,arctg\frac{1}{n^2} \sim \sqrt[3]{n^2}\,\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^{4/3}}$. Це означає, що якщо за ряд для порівняння обрати *збіжний* ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ $(\alpha=\frac{4}{3}>1)$, то за граничною ознакою порівняння отримаємо $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\,arctg\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{4/3}}}=1$. Тоді за наслідком з цієї ознаки заданий ряд *збігається*.

<u>Приклад 12.</u> Встановити збіжність або довести розбіжність рядів

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg^n\,\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$; д) $\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\ldots$.

Розв'язання.

а) Оскільки $a_n=\frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n+1)}$, то

$$a_{n+1}=\frac{[2(n+1)+1]!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot[(3(n+1)+1]}=\frac{(2n+3)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n+4)}=\frac{(2n+1)!!(2n+3)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}$$

і тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+4}=\frac{2}{3}<1$. Отже, за ознакою Д'Аламбера заданий ряд *збігається*;

б) Оскільки $a_n=\frac{n!3^n}{n^n}$, то $a_{n+1}=\frac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n!(n+1)3^n\cdot 3}{(n+1)^n(n+1)}$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=3\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{3}{e}>1$. Таким чином, за ознакою Д'Аламбера заданий ряд *розбігається*;

в) Оскільки $a_n=\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2}\left\{1^{\infty}\right\}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^a$, де $a=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}-1\right)=-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+6}=-1$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=$

$=e^{-1}=\frac{1}{e}<1$ і за ознакою Коші заданий ряд *збігається*;

г) Оскільки $a_n=arctg^n\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}arctg\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}=$

$=arctg\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}>1$. Отже, за ознакою Коші заданий ряд *розбігається*;

д) Загальний член ряду, як неважко бачити, $a_n = \frac{n}{(n+1)^3}$. За ознакою Д'Аламбера маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{(n+2)^3}}{\frac{n}{(n+1)^3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{n(n+2)^3} = 1$, отже, на підставі цієї ознаки ніякого висновку про збіжність ряду зробити не можна (ознака незастосовна). До того ж самого результату приводить спроба застосування радикальної ознаки Коші.

Будемо розглядати члени ряду як значення функції $f(x) = \frac{x}{(x+1)^3}$ при значеннях аргументу $x = 1, 2, 3, \ldots$. Неважко перевірити, що при $x \geq 1$ функція $f(x)$ додатна, неперервна й монотонно спадна, тобто задовольняє умови інтегральної ознаки. Тому дослідимо на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x}{(x+1)^3}dx$. В даному випадку за означенням маємо:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{x}{(x+1)^3}dx = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_1^{B}\frac{x}{(x+1)^3}dx = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_1^{B}\left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}\right]dx =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right]\Bigg|_1^B = \lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{1}{B+1} + \frac{1}{2(B+1)^2}\right] - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}.$$

Отже, інтеграл набуває скінченного значення, тобто збігається. Тому за інтегральною ознакою одночасно з ним збігається і заданий ряд.

<u>Приклад 13.</u> Встановити характер збіжності або довести розбіжність рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3n)}{(n+1)!}arctg\frac{1}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}$; в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$.

Розв'язання.

а) Дослідимо заданий знакопочережний ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3n)}{(n+1)!}arctg\frac{1}{2^n}$ (*). За ознакою Д'Аламбера маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3n)\cdot(3n+3)}{(n+2)!}arctg\dfrac{1}{2^{n+1}}}{\dfrac{3\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3n)}{(n+1)!}arctg\dfrac{1}{2^{n}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{n+2}=\frac{3}{2}>1$$

(тут враховано, що $arctg\dfrac{1}{2^n}\sim\dfrac{1}{2^n}$ при $n\to\infty$). Отже, ряд (*) розбігається за ознакою Д'Аламбера. Тому заданий ряд *не збігається абсолютно*. А оскільки цей результат отриманий на підставі ознаки Д'Аламбера, то необхідна умова збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ (а з нею і друга умова ознаки Лейбніца) не виконується. Це означає, що заданий ряд *розбігається*;

б) Дослідимо заданий знакопочережний ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}$ (*), складений з абсолютних величин членів заданого ряду. Порівняємо цей ряд зі *збіжним* рядом Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, застосувавши граничну ознаку порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}}{\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}=1.$$ Отже, за наслідком зі згаданої ознаки обидва ряди поводяться однаково, тобто ряд (*) збігається. А це означає, що заданий ряд *збігається абсолютно*;

в) Дослідимо заданий знакопочережний ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{1}{\ln\ln n}$ (*).

Оскільки $\ln n<n$, а $\ln\ln n<<n$, то $\dfrac{1}{\ln\ln n}>>\dfrac{1}{n}$. Тому за ознакою порівняння ряд (*) розбігається, отже, заданий ряд *не збігається абсолютно* (тут ми врахували, що гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ розбігається). Оскільки цей результат отриманий не за ознакою Д'Аламбера або радикальною ознакою Коші, то ми повинні дослідити ряд також на умовну збіжність.

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) нерівність $\dfrac{1}{\ln\ln(n+1)} < \dfrac{1}{\ln\ln n}$ виконується $\forall n \geq 4$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln\ln n} = 0$.

Обидві умови виконуються, отже, за ознакою Лейбніца заданий ряд збігається. А оскільки він не збігається абсолютно, то він *збігається умовно*.

Приклад 14. Знайти радіуси та інтервали збіжності степеневих рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 3^n (x+2)^n}{(2n+1)(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n^3} (x-1)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!(2n)!}{(3n)!} x^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x+5)^n}{n^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{3^n}(x-1)^n$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n \dfrac{(2n)!(x+3)^{2n+3}}{(n!)^2}$.

Розв'язання.

а) Оскільки $|a_n| = \left|\dfrac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)(n+2)}\right| = \dfrac{3^n}{(2n+1)(n+2)}$, то за формулою $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ маємо $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}(2n+1)(n+2)}{(2n+3)(n+3)3^n} = 3$, звідки $R = \dfrac{1}{3}$. Отже, інтервал збіжності даного ряду є $|x+2| < \dfrac{1}{3}$ або $-\dfrac{1}{3} < x+2 < \dfrac{1}{3}$, тобто $-\dfrac{7}{3} < x < -\dfrac{5}{3}$;

б) Оскільки $|a_n| = \left|\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\right|^{2n^3} = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n^3}$, то за формулою $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ маємо $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n^2} = e^2$, звідки $R = \dfrac{1}{e^2}$. Отже, інтервал збіжності даного ряду є $|x-1| < \dfrac{1}{e^2}$ або $1-\dfrac{1}{e^2} < x < 1+\dfrac{1}{e^2}$;

в) Оскільки $|a_n| = \dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}$, то з формули $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}}{\dfrac{(n+1)![2(n+1)]!}{[3(n+1)]!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)}=\frac{27}{4}.$$

Отже, інтервал збіжності даного ряду є $|x|<\dfrac{27}{4}$;

г) Оскільки $|a_n|=\dfrac{1}{n^n}$, то з формули $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ маємо $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$. Це означає, що ряд абсолютно *збігається на усій числовій осі*;

д) З формули $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ маємо $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n!}{3^n}}{\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}}}=3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)}=0$. Це означає, що ряд *збігається в єдиній точці* $x=1$ (інтервал збіжності вироджується в точку);

е) Тут показник степеня є лінійною функцією $\varphi(n)=2n+3$. *Радіус* збіжності визначимо з формули $R=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{\left|{a_n}/{a_{n+1}}\right|}$ для $\varphi(n)=kn+m$, де $(k\geq 2)\in\mathbb{N}$, а m – *ціле невід'ємне* число (може дорівнювати 0), поклавши $k=2$:

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}{\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}\dfrac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+2)(n+1)}{n(n+3)}\right]^n\frac{(n+1)^3}{(n+3)(2n+1)(2n+2)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Отже, ряд збігається в інтервалі $|x+3|<\dfrac{1}{2}$ або $-\dfrac{7}{2}<x<-\dfrac{5}{2}$.

Зауваження. Можна було б обчислити одразу *інтервал* збіжності безпосередньо за ознакою Д'Аламбера, тобто скориставшись нерівністю $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}}\right|<1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}\dfrac{(2n+2)!(x+3)^{2n+5}}{[(n+1)!]^2}}{\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{n}\dfrac{(2n)!(x+3)^{2n+3}}{(n!)^2}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{(n+3)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^3}|x+3|^2=e\cdot\frac{1}{e}\cdot4\cdot|x+3|^2<1.$$

Отже, отримали той самий інтервал збіжності $|x+3|<\dfrac{1}{2}$.

Приклад 15. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}.$$

Розв'язання. З формули $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ маємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}}{\dfrac{1}{3^{n+3}\sqrt{n+1}\ln(n+1)}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=3$$

(тут ми використали правило Лопіталя). Отже, ряд збігається в інтервалі $|x|<3$. Дослідимо поведінку ряду в межових точках $x=\pm3$ цього інтервалу.

В точці $x=-3$ маємо знакопочережний числовий ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}=\dfrac{1}{9}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$. Дослідимо його на абсолютну збіжність, для чого розглянемо знакододатний ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}\right|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$. Порівняємо цей ряд із розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. За "граничною" ознакою порівняння $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}=\infty$ (тут ми знов використали правило Лопіталя). Оскільки границя існує і нескінченна, то за згаданою ознакою в точці $x=-3$ ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ розбігається, отже, знакопочережний ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$ не збігається абсолютно. В той же час цей ряд збігається за ознакою Лейбніца, оскільки, як неважко перевірити, обидві умови ознаки виконуються. Тому ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$, а разом з ним і заданий степеневий ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}$, збігаються умовно.

В точці $x=3$ маємо знакододатний ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}=\frac{1}{9}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$, який, як вже з'ясовано, розбігається. Отже, в точці $x=3$ заданий степеневий ряд розбігається.

Таким чином, областю збіжності заданого степеневого ряду є півінтервал $[-3,3)$, всередині якого ряд збігається абсолютно, на лівому кінці – умовно.

<u>Приклад 16.</u> Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

а) $f(z)=x^4\sin(3x^2)$; б) $f(x)=\frac{1}{1+x^5}$; в) $f(x)=\frac{2x-5}{x^2-5x+6}$;

г) $f(x)=\frac{1}{(1-x^3)^2}$; д) $f(x)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання.

а) Безпосереднє розвинення приведе до громіздких обчислень. В цьому випадку скористаємось способом, що передбачає використання так званих *найпростіших розвинень*.

Найпростішими розвиненнями називають відомі розвинення в ряд Маклорена основних елементарних функцій. Наведемо ***таблицю найпростіших розвинень*** (у дужках вказані області збіжності відповідних рядів):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$(-1 < x \le 1),$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1)}{n!} x^n$$

$$(-1 < x < 1 \ \textit{якщо}\ \alpha \le -1,\ -1 < x \le 1 \ \textit{якщо}\ -1 < \alpha < 0,\ -1 \le x \le 1 \ \textit{якщо}\ \alpha \ge 0),$$

зокрема,

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1),$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (-1<x<1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+...=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$
$$(-1<x\le 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+...=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$
$$(-1<x\le 1),$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-...=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{n+1}$$
$$(-1\le x\le 1),$$

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{1}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-...=1-\frac{x}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{n+1}$$
$$(-1\le x\le 1),$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+...=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$(-1\le x\le 1),$$

$$\mathrm{arctg}\, x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$(-1\le x\le 1).$$

Тому скористаємось відомим розвиненням в ряд Маклорена функції $\sin x$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty<x<+\infty),$$

в якому замінимо x на $3x^2$, і отриманий ряд почленно помножимо на x^4:

$$\sin(3x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{4n+2}}{(2n+1)!},$$

$$f(z)=x^4\sin(3x^2)=\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{4n+6}}{(2n+1)!}=3x^6-\frac{9}{2}x^{10}+\frac{81}{40}x^{14}-\dots .$$

Отримане розвинення справедливе на усій числовій осі $(-\infty<x<+\infty)$;

б) Замінимо у відомому розвиненні

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1),$$

x на x^5. Маємо

$$\frac{1}{1+x^5}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x^5)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{5n}=1-x^5+x^{10}-x^{15}+\dots+(-1)^n x^{5n}+\dots .$$

Цей ряд подає задану функцію для усіх x таких, що $\left|x^5\right|<1$, тобто $-1<x<1$;

в) В деяких випадках розвинення функції в степеневий ряд можна отримати, просумувавши табличні розвинення або раніше знайдені. При цьому іноді треба тотожно перетворити функцію таким чином, щоб подати її у вигляді зручної комбінації функцій, розвинення яких відомі.

Задана функція є правильним раціональним дробом. У відповідності із розкладанням знаменника на множники $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ подамо її у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{2x-5}{x^2-5x+6}=\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},\quad \text{звідки}\quad 2x-5=A(x-3)+B(x-2).$$

Невідомі коефіцієнти A і B знайдемо з системи рівнянь $\begin{array}{l|l} x=2 & -1=-A, \\ x=3 & \ \ 1=B. \end{array}$

Отже, $A=B=1$ й $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$. Кожен з отриманих найпростіших дробів після нескладного тотожного перетворення розвинемо в ряд Маклорена за допомогою відомого розвинення

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (-1<x<1).$$

Будемо мати

$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \left(\left|\frac{x}{2}\right|<1\Rightarrow |x|<2\right),$$

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n \quad \left(\left|\frac{x}{3}\right|<1\Rightarrow |x|<3\right).$$

Отже,

$$\frac{2x-5}{x^2-5x+6}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n=-\frac{5}{6}-\frac{13}{36}x-\frac{35}{216}x^2-\ldots.$$

За відповідною властивістю степеневих рядів отримане розвинення справедливе в інтервалі $(-2, 2)$, який є спільним інтервалом збіжності обох рядів;

г) При розвиненні деяких функцій в степеневі ряди дуже корисним виявляється спосіб, що заснований на використанні такої властивості степеневих рядів, як можливість їх почленного диференціювання. Суть цього способу полягає в наступному. Нехай треба знайти розвинення деякої функції $f(x)$ в степеневий ряд. Якщо вдається знайти таку функцію $g(x)$, що $f(x)=a\cdot x^k\cdot g'(x)$, де $k\in\mathbb{Z}$, то, розвинувши функцію $g(x)$ в степеневий ряд і продиференціювавши його почленно, отримаємо розвинення в ряд функції $f(x)$. При цьому отримане розвинення справедливе всюди, де відповідне розвинення було вірним для функції $g(x)$.

Оскільки в даному випадку $\dfrac{1}{(1-x^3)^2}=\dfrac{1}{3x^2}\left(\dfrac{1}{1-x^3}\right)'$, то, замінивши у табличному розвиненні

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (-1<x<1)$$

x на x^3, отримаємо

$$\frac{1}{(1-x^3)^2}=\frac{1}{3x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(x^3)^n\right)'=\frac{1}{3x^2}\sum_{n=1}^{\infty}3n\,x^{3n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{3n-3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^{3n}=$$

$$=1+2x^3+3x^6+\ldots.$$

Оскільки при диференціюванні інтервал збіжності степеневого ряду не змінюється, то знайдене розвинення справедливе при усіх x з інтервалу $-1<x<1$;

д) В деяких випадках значно простіше розвинути в степеневий ряд не саму функцію $f(x)$, а її похідну $f'(x)$, після чого почленно проінтегрувати отриманий ряд.

Знайдемо похідну $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

У табличному розвиненні

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$$

замінимо x на x^2 і отримаємо розвинення $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, вірне при $-1<x<1$. Проінтегрувавши цей ряд почленно від 0 до x, будемо мати шукане розвинення $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Оскільки при почленному інтегруванні ряду інтервал його збіжності не змінюється, то знайдене розвинення справедливе при усіх x з інтервалу $-1<x<1$.

<u>Приклад 17.</u> Розвинути в ряд Тейлора в околі точки $x_0=4$ (за степенями різниці $x-4$) функцію $f(x)=\ln(x^2+4x-5)$ та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв'язання. Перетворимо тотожно задану функцію, виділяючи різницю $x-4$:

$$f(x)=\ln(x^2+4x-5)=\ln[(x-1)(x+5)]=\ln\{[3+(x-4)][9+(x-4)]\}=$$
$$=\ln\left[27\left(1+\frac{x-4}{3}\right)\left(1+\frac{x-4}{9}\right)\right]=\ln 27+\ln\left(1+\frac{x-4}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{x-4}{9}\right).$$

Скористаємось табличним розвиненням

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (-1<x\le 1),$$

в якому замінимо x на $\dfrac{x-4}{3}$ й на $\dfrac{x-4}{9}$. Отримаємо

$$\ln\left(1+\frac{x-4}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{n3^n} \quad \left(\left|\frac{x-4}{3}\right|<1 \Rightarrow |x-4|<3\right),$$

$$\ln\left(1+\frac{x-4}{9}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{n9^n} \quad \left(\left|\frac{x-4}{9}\right|<1 \Rightarrow |x-4|<9\right).$$

Отже,

$$f(x)=\ln(x^2+4x-5)=\ln 27+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1+3^n}{n9^n}(x-4)^n=$$

$$=\ln 27+\frac{4}{9}(x-4)-\frac{5}{9^2}(x-4)^2+\frac{28}{3\cdot 9^3}(x-4)^3-\ldots.$$

Отримане розвинення справедливе в інтервалі $|x-4|<3$, який є спільним інтервалом збіжності рядів $\ln\left(1+\dfrac{x-4}{3}\right)$ та $\ln\left(1+\dfrac{x-4}{9}\right)$.

<u>Приклад 18.</u> Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{arctg\, t}{t}\,dt$.

Розв'язання. При наближеному обчисленні визначених інтегралів, коли знайти первісну в скінченному вигляді не представляється можливим, широко застосовується почленне інтегрування степеневого ряду. При цьому підінтегральну функцію розвивають в ряд, який потім інтегрують почленно.

Скориставшись табличним розвиненням

$$\mathrm{arctg}\, x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1\le x\le 1),$$

будемо мати

$$f(x)=\int_0^x\frac{arctg\, t}{t}\,dt=\int_0^x\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\int_0^x t^{2n}dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$, то розвинення справедливе в інтервалі $-1<x<1$.

Приклад 19. Обчислити $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx$ з точністю $\delta = 10^{-4}$.

Розв'язання. Приймемо залишкову похибку $\varepsilon = \frac{\delta}{4} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-4} = 2.5 \cdot 10^{-5}$ і розвинемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена, для чого у табличному розвиненні

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

замінимо x на $-x^3$:

$$e^{-x^3} = 1 - x^3 + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} .$$

Отриманий ряд збігається на всій числовій осі, отже, його можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку, зокрема, на відрізку $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Після інтегрування і застосування формули Ньютона-Лейбніца приходимо до знакопочережного числового ряду, який збігається, тобто є рядом Лейбніца:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{3n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(3n+1)} x^{3n+1} \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(3n+1)8^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 8} + \frac{1}{2! \cdot 14 \cdot 8^2} - \frac{1}{3! \cdot 20 \cdot 8^3} + \ldots .$$

Для забезпечення необхідної точності обчислення суми цього ряду, яка і є значенням заданого визначеного інтеграла, потрібно утримати таке число членів ряду, щоб виконалася умова $|u_{n+1}| \le \varepsilon$, де u_{n+1} – перший з відкинутих членів, а ε – задана залишкова похибка.

Оскільки $u_0 = 0.5$, $u_1 = -0.015625$, $u_2 = 0.0005580$, $u_3 = -0.0000163$, ... й $|u_3| < \varepsilon = 0.000025$, то треба утримати 3 перших члени ряду:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx \approx 0.5 - 0.015625 + 0.0005580 = 0.4849330 \approx 0.4849 .$$

Значення цього інтеграла, обчислене на комп'ютері за допомогою **Mathcad**, дорівнює **0.48491714311364 ...** , тобто в отриманому результаті всі знаки вірні.

<u>Приклад 20.</u> Знайти чотири перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку рівняння $y'' = x\sin y'$, який задовольняє початкові умови $y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Будемо шукати частинний розв'язок рівняння у вигляді ряду Тейлора

$$\tilde{y} = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots .$$

За умовою задачі, $y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{\pi}{2}$. З рівняння $y'' = x\sin y'$ знаходимо, що $y''(1) = 1\cdot\sin y'(1) = 1\cdot 1 = 1$. Диференціюючи вихідне рівняння, маємо

$$y''' = \sin y' + xy''\cos y',$$

звідки отримуємо $y'''(1) = \sin y'(1) + 1\cdot y''(1)\cdot\cos y'(1) = 1 + 1\cdot 1\cdot 0 = 1$.

Диференціюючи рівність $y''' = \sin y' + xy''\cos y'$, маємо

$$y^{(4)} = y''\cos y' + y''\cos y' + xy'''\cos y' - xy''y'''\sin y',$$

звідки отримуємо $y^{(4)}(1) = 2\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = -1$.

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$\tilde{y} = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 - \frac{1}{4!}(x-1)^4 + \dots .$$

<u>Приклад 21.</u> Куб, усі грані якого пофарбовані, розпилили на 1000 кубиків однакового розміру і ретельно їх перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання витягнутий кубик має рівно одну пофарбовану грань.

Розв'язання. При розпилюванні вихідного куба, який має 6 граней, на $n = 1000$ кубічних частин (загальне число можливих наслідків) утворюється $m = 6\times 8\times 8 = 384$ кубика з однією пофарбованою гранню (число сприятливих наслідків). Тому за класичною формулою $P(A) = \frac{m}{n}$ маємо

$$P(A) = \frac{384}{1000} = \frac{96}{250} = 0,384 .$$

Приклад 22. Колоду з 36 гральних карт ретельно перемішують і навмання витягують одразу 3 карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б одна "дама".

Розв'язання. Знайдемо ймовірність *протилежної* події, а саме: серед узятих карт немає жодної "дами". За класичною формулою маємо

$$q = \frac{C_4^0 \cdot C_{32}^3}{C_{36}^3}.$$

Тоді шукана ймовірність $p = 1 - q = 1 - \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = 0{,}3053$.

Приклад 23. Та ж сама задача, але карти витягують *по черзі*, одну за одною.

Розв'язання. У даному випадку, на відміну від попереднього, маємо не одну, а три *залежні* події. Тому за теоремою множення ймовірностей залежних подій

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$$

маємо $q = \frac{32}{36} \cdot \frac{31}{35} \cdot \frac{30}{34} = \frac{248}{357}$. Тоді $p = 1 - q = \frac{114}{357} = 0{,}3053$.

Приклад 24. У крузі радіуса R розміщений малий круг радіуса $r < R$. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута у великий круг, влучить також і в малий круг.

Розв'язання. За «геометричним» означенням ймовірності $P(A) = \frac{\Omega_A}{\Omega}$ маємо

$$p = \frac{S_r}{S_R} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}.$$

Приклад 25. Розрив електричної мережі може відбутися внаслідок відмови елемента E_1 або одночасно двох елементів E_2 й E_3, які відмовляють незалежно один від одного відповідно з ймовірностями $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = p_3 = 0{,}2$. Визначити ймовірність розриву електричної мережі.

Розв'язання. Мережа буде працювати (подія A), якщо жоден з елементів не відмовить. Тому за теоремою множення ймовірностей незалежних подій $P(A)=(1-p_1)\cdot(1-p_2p_3)=0,672$. Отже, ймовірність розриву мережі (подія $\overline{A}$)

$$P(\overline{A})=1-P(A)=0,328.$$

<u>Приклад 26.</u> Стрілець робить один постріл по мішені, яка складається з круга й двох концентричних кілець. Ймовірності попадання в круг і кільця відповідно дорівнюють $p_1=0,3$, $p_2=0,2$, $p_3=0,1$. Визначити ймовірність промаху.

Розв'язання. Мішень буде уражена (подія A), якщо відбудеться влучання або в круг, або в одне з кілець. Оскільки стрілець робить тільки один постріл, то ці події несумісні. За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій $P(A_1+A_2+....+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$ маємо

$$P(A)=p_1+p_2+p_3=0,3+0,2+0,1=0,6.$$

Отже, ймовірність промаху (подія $\overline{A}$) є $P(\overline{A})=1-P(A)=0,4$.

<u>Приклад 27.</u> Технічний пристрій містить три блоки, надійності яких відповідно дорівнюють $p_1=0,6$, $p_2=0,5$, $p_3=0,3$. При відмові за проміжок часу t усіх трьох блоків пристрій напевно виходить з ладу, при відмові лише одного блока ймовірність виходу з ладу $0,2$, а при відмові двох блоків вона складає $0,6$. Знайти ймовірність того, що за проміжок часу t пристрій вийде з ладу.

Розв'язання. Нехай подія A – вихід пристрою з ладу за проміжок часу t – відбувається за умови появи однієї з несумісних подій: B_1 – усі три блоки за час t працювали безвідмовно, B_2 – за час t відмовив тільки один блок, B_3 – за час t відмовили два блоки, B_4 – за час t відмовили усі три блоки.

Ймовірності відмов кожного з блоків: $q_1=1-p_1=1-0,6=0,4$, $q_2=1-p_2=1-0,5=0,5$, $q_3=1-p_3=1-0,3=0,7$. За теоремами додавання і множення ймовірностей знайдемо ймовірності появ подій B_i $(i=\overline{1,4})$:

$P(B_1)=p_1\cdot p_2\cdot p_3=0,6\cdot 0,5\cdot 0,3=0,09$,

$$P(B_2)=q_1\cdot p_2\cdot p_3+p_1\cdot q_2\cdot p_3+p_1\cdot p_2\cdot q_3=0,4\cdot 0,5\cdot 0,3+0,6\cdot 0,5\cdot 0,3+$$
$$+0,6\cdot 0,5\cdot 0,7=0,36,$$

$$P(B_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}41,$$

$$P(B_4) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}14.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{4} P(B_i) = 0{,}09 + 0{,}36 + 0{,}41 + 0{,}14 = 1$, то події B_i $(i = \overline{1,4})$ утворюють повну групу. Відповідні умовні ймовірності події A дорівнюють: $P_{B_1}(A) = 0$, $P_{B_2}(A) = 0{,}2$, $P_{B_3}(A) = 0{,}6$, $P_{B_4}(A) = 1$. За формулою повної ймовірності $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$ маємо

$$P(A) = 0{,}09 \cdot 0 + 0{,}36 \cdot 0{,}2 + 0{,}41 \cdot 0{,}6 + 0{,}14 \cdot 1 = 0{,}458.$$

Приклад 28. По каналу зв'язку передається один з двох можливих сигналів x_1 або x_2, причому сигнал x_2 передається вдвічі частіше, ніж сигнал x_1. Через перешкоди можливі викривлення: замість одного сигналу може бути прийнятий інший і навпаки. Властивості каналу зв'язку такі, що сигнал x_1 зазнає викривлень приблизно у **10 %** випадків, а сигнал x_2 - у **20 %**. Нехай був отриманий сигнал x_1. Яка ймовірність того, що був переданий саме цей сигнал?

Розв'язання. Нехай подія A - був отриманий сигнал x_1.
Висунемо гіпотези: H_1 - був переданий сигнал x_1; H_2 - був переданий сигнал x_2. Тоді $P(H_1) = \frac{1}{3}$, $P(H_2) = \frac{2}{3}$, $P_{H_1}(A) = \frac{9}{10}$, $P_{H_2}(A) = \frac{4}{5}$. Ймовірність отримати за даних умов сигнал x_1 за формулою повної ймовірності є

$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$. За відповідною формулою Байєса $P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}$ ймовірність того, що був переданий саме сигнал x_1 (апостеріорна ймовірність гіпотези H_1) є

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{5}{6}} = \frac{9}{25} = 0{,}36.$$

Таким чином, отримання сигналу x_1 дещо збільшує ймовірність гіпотези H_1 у порівнянні з її апріорним значенням $\frac{1}{3} \approx 0,33$.

Приклад 29. Ймовірність того, що витрата електроенергії протягом однієї доби не перевищить установленої норми, дорівнює $p = 0,75$. Знайти ймовірність того, що у найближчі 6 діб витрата електроенергії протягом 4 діб не перевищить норми.

Розв'язання. Ймовірність перевитрати електроенергії протягом кожної доби стала і дорівнює $q = 1 - 0,75 = 0,25$. Оскільки число спроб $n = 6$ невелике, а ймовірність $p = 0,75$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за формулою Бернуллі $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, де $k = 4$:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{4!\,2!} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^2 = 0,297 .$$

Приклад 30. Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно 70 разів у 243 спробах, якщо ймовірність появи цієї події у кожній спробі стала і дорівнює 0,25.

Розв'язання. Оскільки число спроб $n = 243$ велике, а ймовірність $p = 0,25$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за локальною формулою Лапласа $P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$: $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0,25}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = 1,37$, значення $\varphi(x) = \varphi(1,37) = 0,1561$ обчислюємо на калькуляторі за формулою $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ або знаходимо за таблицею у додатку 1,

$$P_{243}(70) = \frac{1}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \cdot 0,1561 = 0,0231.$$

Приклад 31. Ймовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює $p = 0,2$. Визначити ймовірність того, що зі 100 конденсаторів за час T вийдуть з ладу від 14 до 26 конденсаторів.

Розв'язання. Скористаємось інтегральною формулою Лапласа $P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$, у якій покладемо $n=100,\quad k_1=14,\quad k_2=26,\quad p=0{,}2,\quad q=1-p=0{,}8$. Обчисливши $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{14-100\cdot0{,}2}{\sqrt{100\cdot0{,}2\cdot0{,}8}}=-1{,}5$, $\quad x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{26-100\cdot0{,}2}{\sqrt{100\cdot0{,}2\cdot0{,}8}}=1{,}5$, за таблицею у додатку 2 знаходимо $\Phi(1{,}5)=0{,}4332$. Оскільки функція $\Phi(x)$ непарна, то $\Phi(-1{,}5)=-\,0{,}4332$. Тоді $P_{100}(14{,}26)=\Phi(1{,}5)-\Phi(-1{,}5)=$ $=2\cdot0{,}4332=0{,}8664$.

Приклад 32. Проводиться **10 000** незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може появитися з імовірністю **0,0003**. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться рівно **5** разів.

Розв'язання. Оскільки число спроб $n=10\,000$ дуже велике, а ймовірність $p=0{,}0003$ дуже мала, то шукану ймовірність обчислимо за формулою Пуассона $P_n(k)\sim\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ при $\lambda=np=10000\cdot0{,}0003=3$. Отже, $P_{10000}(5)=\dfrac{3^5\cdot e^{-3}}{5!}=0{,}1$.

Приклад 33. Ймовірність прийому радіосигналу за певних умов дорівнює 0,75. Скільки сигналів повинно бути передано, щоб ймовірність відхилення частоти прийнятих сигналів від ймовірності прийому не більш, ніж на 0,035, дорівнювала 0,95?

Розв'язання. Ймовірність того, що модуль відхилення відносної частоти $\dfrac{m}{n}$ від сталої ймовірності p не перевищує *заданого* числа $\varepsilon>0$, є

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\cong2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Покладемо $p=0{,}75,\quad q=1-p=0{,}25,\quad \varepsilon=0{,}035,\quad P\left(\left|\dfrac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=0{,}95$.

Отримаємо рівняння $0,95 = 2\Phi\left(0,035 \cdot \sqrt{\dfrac{n}{0,75 \cdot 0,25}}\right)$ або, після невеликого перетворення, $\Phi\left(0,035 \cdot \sqrt{\dfrac{n}{0,1875}}\right) = 0,475$. За таблицею у додатку 2 знаходимо $0,475 = \Phi(1,96)$, звідки маємо $0,035 \cdot \sqrt{\dfrac{n}{0,1875}} = 1,96$.

Отже, $n = 0,1875 \cdot \left(\dfrac{1,96}{0,035}\right)^2 = 588$.

<u>Приклад 34.</u> Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x_i	13	18	19	x_4	25
p_i	0,18	p_2	0,22	0,20	0,15

Знайти x_4, p_2, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо $M(X) = 18,77$.

Розв'язання. Для знаходження p_2 використаємо умову $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, тобто $0,18 + p_2 + 0,22 + 0,2 + 0,15 = 1$, звідки знаходимо $p_2 = 0,25$.

Тоді маємо рівняння

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 13 \cdot 0,18 + 18 \cdot 0,25 + 19 \cdot 0,22 + x_4 \cdot 0,2 + 25 \cdot 0,15 = 18,77$$

або $14,77 + 0,2 \cdot x_4 = 18,77$, звідки знаходимо $x_4 = \dfrac{4}{0,2} = 20$.

Отже, закон розподілу дискретної величини має вигляд

x_i	13	18	19	20	25
p_i	0,18	0,25	0,22	0,2	0,15

Тоді

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left[M(X)\right]^2 = = 13^2 \cdot 0,18 + 18^2 \cdot 0,25 + 19^2 \cdot 0,22 + 20^2 \cdot 0,2 +$$

$$+25^2\cdot 0{,}15-(18{,}77)^2=364{,}59-352{,}3129=12{,}28,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=3{,}50.$$

Приклад 35. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 8;\\ (x-8)^3, & 8<x\le 9;\\ 1, & x>9.\end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$; в) ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $[8{,}25;\, 8{,}75]$.

Розв'язання.

а) Щільність розподілу $f(x)$:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 8;\\ 3(x-8)^2, & 8<x\le 9,;\\ 0, & x>9\end{cases}$$

б) Оскільки $f(x)$ ненульова лише на проміжку $[8,9)$, то користуємось формулами $M(X)=\int\limits_a^b x\, f(x)dx$, $D(X)=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$. Отже, маємо

$$M(X)=\int\limits_8^9 x\cdot 3(x-8)^2dx=3\int\limits_8^9 x(x-8)^2dx=\left|\begin{array}{lll}x-8=t & & \\ x=t+8 & & \\ x & 8 & 9\\ t & 0 & 1\end{array}\right|=$$

$$=3\int\limits_0^1(t+8)\,t^2dt=3\int\limits_0^1\left(t^3+8t^2\right)dt=3\left(\frac{t^4}{4}+8\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=3\left(\frac{1}{4}+\frac{8}{3}\right)=8{,}75,$$

$$D(X)=\int\limits_8^9 x^2\cdot 3(x-8)^2dx-[M(X)]^2=3\int\limits_8^9\left(x^4-16x^3+64x^2\right)dx-8{,}75^2=$$

$$=3\left(\frac{x^5}{5}-4x^4+\frac{64}{3}x^3\right)\Bigg|_8^9-76{,}56=\frac{383}{5}-76{,}56=0{,}04,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=0{,}2;$$

в) ймовірність попадання неперервної випадкової величини X в заданий інтервал $(a; b)$ обчислюється за формулою $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$. Отже, в даному випадку

$$P(8{,}25 < X < 8{,}75) = F(8{,}75) - F(8{,}25) = 0{,}75^3 - 0{,}25^3 = 0{,}406.$$

Приклад 36. Гармата робить 4 постріли по мішені з однієї і тієї ж позиції. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу кількості влучень, знайти середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення кількості влучень.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X – кількість влучень у мішень. Її можливі значення: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$.

Результати пострілів не залежать один від одного, ймовірність влучення при одному пострілі є сталою величиною. Це означає, що випадкова величина X розподілена за біноміальним законом.

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $n = 4$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$; $p = 0{,}8$; $q = 1 - p = 0{,}2$.

Обчислимо

$$P(0) = C_4^0 p^0 q^4 = (0{,}2)^4 = 0{,}0016;$$

$$P(1) = C_4^1 p q^3 = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0256;$$

$$P(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}1536;$$

$$P(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q = 4 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096;$$

$$P(4) = C_4^4 p^4 q^0 = 0{,}8^4 = 0{,}4096.$$

Перевіримо вірність обчислень:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0{,}0016 + 0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}4096 + 0{,}4096 = 1.$$

Шуканий закон розподілу має вигляд:

x	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Математичне сподівання (середнє значення) кількості влучень $M(X) = np = 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}2$, дисперсія $D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}64$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

<u>Приклад 37.</u> Електронний пристрій складається з 1000 елементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови будь-якого елемента протягом одного року дорівнює 0,002. Знайти імовірність того, що за рік відмовлять не менш трьох елементів.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X - число елементів, які відмовили. За законом Пуассона $P_n(k)=\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$.

Вважаючи $n=1000,\ \ p=0{,}002$, одержимо $\lambda=np=1000\cdot 0{,}002=2$.
Ймовірність відмови не менш трьох елементів

$$P(X\geq 3)=\sum_{k=3}^{\infty}P(X=k)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2).$$

$$P(X=0)=P_{1000}(0)=\frac{2^0\cdot e^{-2}}{0!}=0{,}13534,\ P(X=1)=P_{1000}(1)=\frac{2^1\cdot e^{-2}}{1!}=0{,}27068,$$

$$P(X=2)=P_{1000}(2)=\frac{2^2\cdot e^{-2}}{2!}=0{,}27068.$$

Тоді $P(X\geq 3)=1-0{,}13534-2\cdot 0{,}27068=0{,}3233$.

<u>Приклад 38.</u> Автобуси деякого маршруту рухаються точно за розкладом. Проміжок руху 15 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме черговий автобус менше 10 хвилин.

Розв'язання. Пасажир може підійти до зупинки у будь-який момент. Тому час очікування можна вважати випадковою величиною X, яка рівномірно розподілена у інтервалі руху автобусів.

Щільність розподілу $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, де $(b-a)$ - довжина інтервалу, у якому знаходяться ймовірні значення X. У даному випадку $b-a=15$, тому $f(x)=\dfrac{1}{15}$. Оскільки автобуси йдуть точно за розкладом (тобто наступний прийде не раніше означеного часу), то пасажир чекатиме його менше 10 хвилин, якщо $5<X<15$.

Ймовірність попадання випадкової величини в деякий інтервал обчислюється за формулою $P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$, отже,

$$P(5 < X < 15) = \int_{5}^{15} \frac{1}{15} dx = \frac{x}{15}\Big|_{5}^{15} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 39. Середній час безвідмовної роботи радіоелектронного обладнання літака за статистичними даними складає 200 годин. Знайти ймовірність відмови обладнання протягом 10 годин польоту.

Розв'язання. Час безвідмовної роботи обладнання є випадковою величиною T, розподіленою за показниковим законом $F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0, \end{cases}$

де $\lambda -$ інтенсивність відмов (кількість відмов за одиницю часу). У даному випадку $t = 10$, $\lambda = \frac{1}{200}$ і ймовірність відмови за час t буде складати $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{10}{200}} = 0{,}049$.

Приклад 40. Найбільший поперечний діаметр заготовок деталей, що поступають в обробку є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з середнім значенням 5 см і середнім квадратичним відхиленням 0,3см. Написати диференціальну функцію розподілу, побудувати її схематичний графік, вказавши його характерні точки, і знайти ймовірність того, що: а) діаметр взятої навмання заготовки буде знаходитись в межах від 4,7 до 6,2 см; б) відхилення діаметра заготовки від середнього не перевищить за абсолютною величиною 0,6 см.

Розв'язання. Випадкова величина X – найбільший поперечний діаметр заготовки. Оскільки вона розподілена нормально, то диференціальна функція розподілу виражається формулою $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де a – математичне сподівання (середнє значення), σ – середнє квадратичне відхилення. Функція досягає максимуму $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ в точці $x = a$, її графік має дві точки перегину $\left(a \pm \sigma; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$. В даному випадку $a = 5$, $\sigma = 0{,}3$. Тому $f(x) = \frac{1}{0{,}3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{0{,}18}}$, максимум $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx 1{,}33$ в точці $x = 5$, точки перегину $(4{,}7; 0{,}81)$ й $(5{,}3; 0{,}81)$. Графік функції показаний на рис. 2.

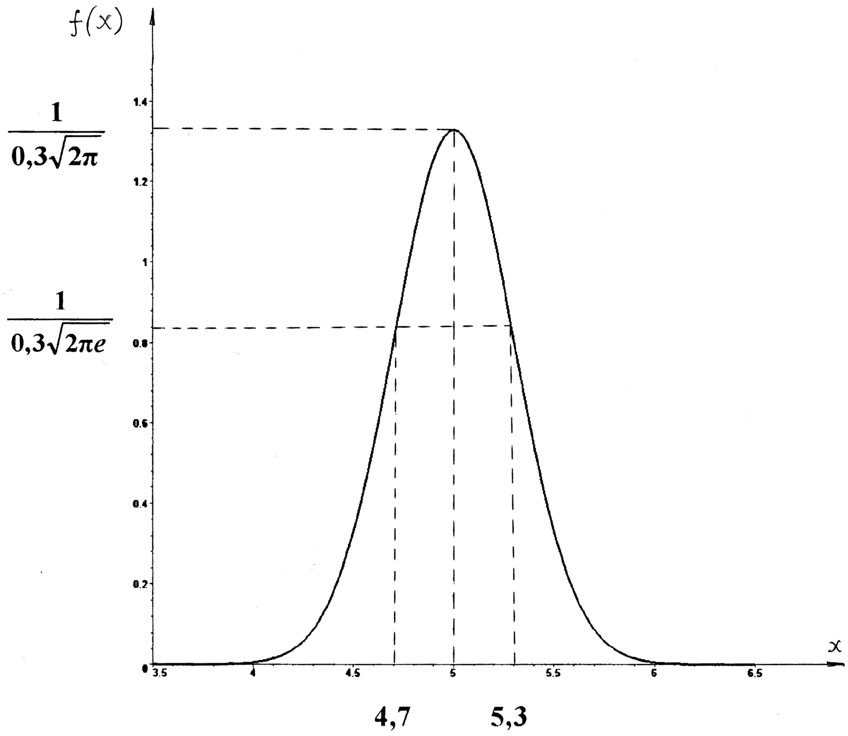

Рис. 2

а) Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (α, β)

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz -$ інтегральна функція Лапласа (її значення наведені у додатку 2).

Оскільки $\alpha = 4{,}7, \quad \beta = 6{,}2$, то маємо

$$P(4{,}7 < X < 6{,}2) = \Phi\left(\frac{6{,}2-5}{0{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{4{,}7-5}{0{,}3}\right) = \Phi(4) + \Phi(1) = 0{,}3413 + 0{,}5 = 0{,}8413;$$

б) ймовірність того, що модуль відхилення X від її математичного сподівання a не перевищить заданого числа $\delta > 0$, $P(\,|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

У даному випадку $\delta = 0{,}6$, отже

$$P(|X - 5| < 0{,}6) = 2\Phi\left(\frac{0{,}6}{0{,}3}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

<u>Приклад 41.</u> З великої кількості результатів випробувань випадковим чином відібрані наступні: 2; 3; 2; 4; 5; 2; 3; 3; 6; 4; 5; 4; 6; 5; 3; 4; 2; 4; 3; 3; 5; 4; 6; 4; 5; 3; 4; 3; 2; 4. Потрібно:

а) скласти дискретний статистичний розподіл вибірки;

б) знайти обсяг вибірки;

в) скласти розподіл відносних частот;

г) побудувати полігон частот;

д) скласти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік;

е) знайти незміщені оцінки числових характеристик генеральної сукупності.

Розв'язання.

а) Розташуємо різні значення ознаки в порядку їх зростання і під кожним з них запишемо їх частоти. Отримаємо дискретний статистичний розподіл вибірки:

x_i	2	3	4	5	6
n_i	5	8	9	5	3

де x_i - варіанти, n_i - частоти варіант x_i;

б) сума частот усіх варіант повинна дорівнювати обсягу вибірки. В даному прикладі об'єм вибірки дорівнює $n = 5 + 8 + 9 + 5 + 3 = 30$;

в) знайдемо відносні частоти:

$$W_1 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};\ W_2 = \frac{8}{30} = \frac{4}{15};\ W_3 = \frac{9}{30} = \frac{3}{10};\ W_4 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};\ W_5 = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}.$$

Запишемо шуканий розподіл відносних частот:

x_i	2	3	4	5	6
W_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$

Контроль: $\frac{1}{6} + \frac{4}{15} + \frac{3}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = 1$;

г) точки з координатами (x_i, n_i) з'єднаємо послідовними відрізками. Отримаємо ламану лінію, яка називається полігоном частот (рис. 3);

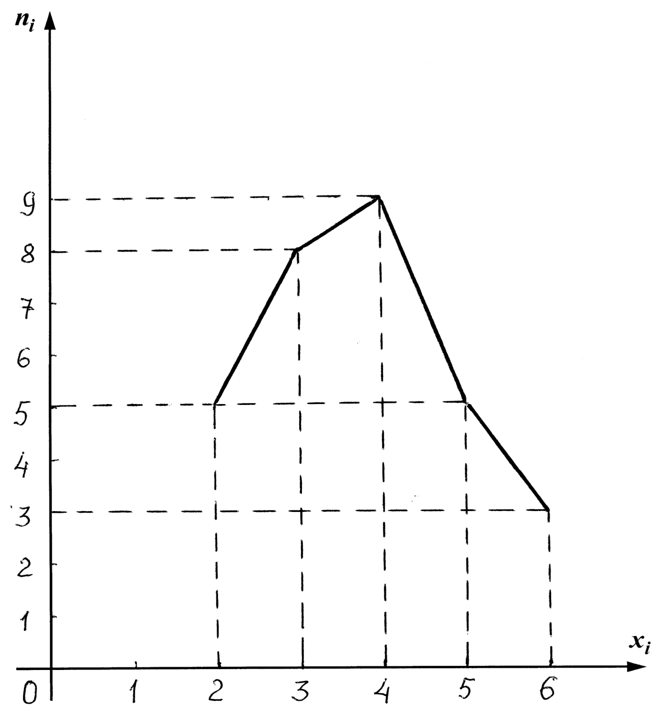

Рис. 3

д) згідно з означенням емпіричною функцією розподілу називається функція виду $F^*(x)=\dfrac{n_x}{n}$, де n – обсяг вибірки, n_x– сума частот варіант, менших ніж x.

Емпірична функція є оцінкою функції розподілу генеральної сукупності. Найменша з варіант дорівнює 2, тому при $x \le 2,\ n_x = 0$ й $F^*(x) = 0$. Значення $X < 3$, а саме, $X = x_1 = 2$ спостерігалося 5 разів. Тоді для $2 < x \le 3$ $n_x = 5$ й $F^*(x) = \dfrac{5}{30}$. Значення $X < 4$, а саме, $X = 2$, $X = 3$ спостерігалося $5 + 8 = 13$ разів. Тому для $3 < x \le 4$ $n_x = 13$ й $F^*(x) = \dfrac{13}{30}$. Аналогічно міркуючи, отримуємо: для $5 < x \le 6$ $n_x = 5+8+9+5 = 27$ й $F^*(x) = \dfrac{27}{30}$,

$$\text{для } x > 6 \ \ n_x = 5+8+9+5+3 = 30 \text{ й } F^*(x) = \frac{30}{30} = 1.$$

Таким чином, шукана емпірична функція розподілу має вигляд

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ \dfrac{5}{30} & \text{при } 2 < x \le 3, \\ \dfrac{13}{30} & \text{при } 3 < x \le 4, \\ \dfrac{22}{30} & \text{при } 4 < x \le 5, \\ \dfrac{27}{30} & \text{при } 5 < x \le 6, \\ 1 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

Її графік наведений на рис. 4.

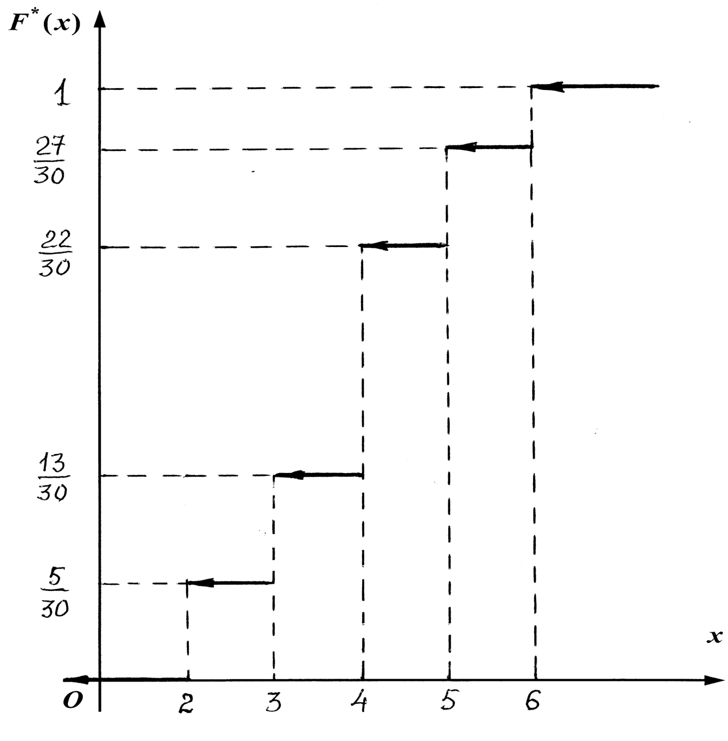

Рис. 4

е) незміщеною оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності є вибіркова середня

$$\overline{x}_B=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}=\frac{2\cdot 5+3\cdot 8+4\cdot 9+5\cdot 5+6\cdot 3}{30}=\frac{113}{30}\approx 3{,}77,$$

а незміщеною оцінкою дисперсії – виправлена вибіркова дисперсія $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$, де D_B – вибіркова дисперсія (зміщена оцінка дисперсії).

Оскільки $D_B = \overline{x_B^2} - \left(\overline{x}_B\right)^2 = \frac{2^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 8 + 4^2 \cdot 9 + 5^2 \cdot 5 + 6^2 \cdot 3}{30} - \left(\frac{113}{30}\right)^2 \approx 1{,}456$,

то виправлена вибіркова дисперсія є $s^2 = \frac{30}{29} \cdot 1{,}456 \approx 1{,}495$, а виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = \sqrt{1{,}495} \approx 1{,}223$.

<u>Приклад 42.</u> Надані вибіркові значення контрольованого параметра деякого технологічного процесу:
18,0; 12,0; 11,9; 1,9; 5,5; 14,6; 4,8; 5,6; 4,8; 10,9; 9,7; 7,2; 12,4; 7,6; 9,7; 11,2; 4,2; 4,9; 9,6; 3,2; 8,6; 4,6; 6,7; 8,4; 6,8; 6,9; 17,9; 9,6; 14,8; 15,8. Потрібно:

а) Скласти групований (інтервальний) розподіл вибірки з початком $x_0 = 1$ і довжиною часткового інтервалу $h = 3$;

б) побудувати гістограму частот.

Розв'язання.

а) Для складання інтервального розподілу складемо таблицю, у першому рядку якої розташуємо в порядку зростання інтервали, довжина кожного з яких $h = 3$. У другому рядку запишемо кількість значень ознаки у вибірці, що потрапили в цей інтервал (тобто суму частот варіант, які потрапили у відповідний інтервал):

$(x_i; x_{i+1})$	**1-4**	**4-7**	**7-10**	**10-13**	**13-16**	**16-19**
n_i	**2**	**10**	**8**	**5**	**3**	**2**

Обсяг вибірки $n = 2 + 10 + 8 + 5 + 3 + 2 = 30$;

б) для побудови гістограми частот на осі абсцис відкладаємо часткові інтервали, на кожному з них будуємо прямокутники висотою $\frac{n_i}{h}$, де n_i – сума частот варіант i-го часткового інтервалу, h – крок (довжина інтервалу). Таким чином, гістограма частот має вигляд

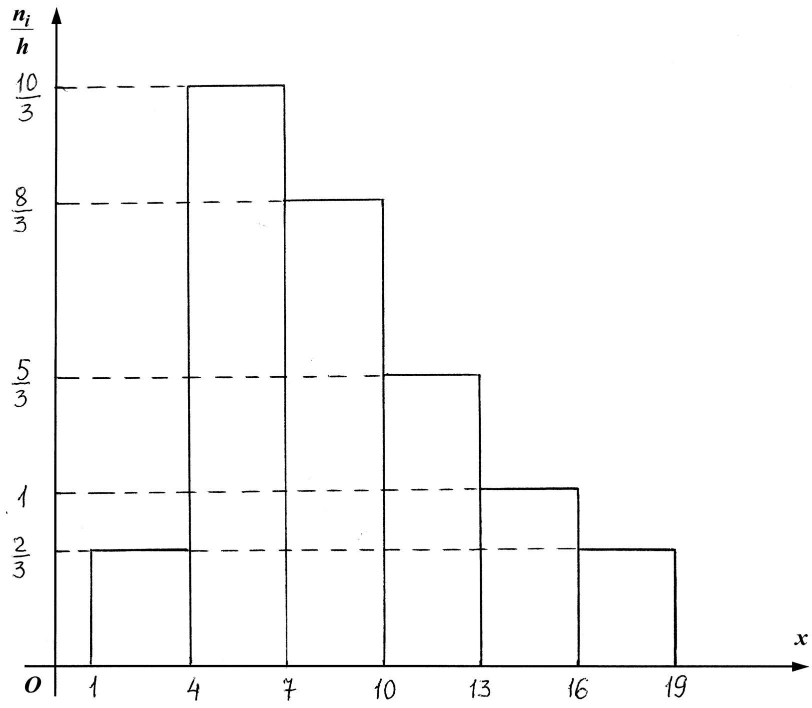

Рис. 5

Зауваження. Для побудови емпіричної функції розподілу і відшукання точкових оцінок ряду необхідно перетворити його до дискретного вигляду за формулою $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Отримаємо

x_i^*	2,5	5,5	8,5	11,5	14,5	17,5
n_i	2	10	8	5	3	2

Приклад 43. З результатів вимірювань границі текучості великої партії зразків деякого сорту сталі з різних плавок випадковим чином відібрані **100**. Середнє значення границі текучості у вибірці виявилося рівним $\mathbf{31{,}33\ кГ/мм^2}$. Вважаючи границю текучості випадковою величиною X, розподіленою за нормальним законом, знайти з надійністю $\gamma = 0{,}95$ довірчий інтервал для середнього значення $a_Г$ границі текучості зразків усієї партії, якщо середнє квадратичне відхилення границі текучості для всієї партії відоме і складає $\mathbf{3{,}19\ кГ/мм^2}$.

Розв'язання.

За умовою задачі $\boldsymbol{n = 100}$, $\boldsymbol{\overline{x}_B = 31{,}33}$, $\boldsymbol{\gamma = 0{,}95}$, $\boldsymbol{\sigma_\Gamma = 3{,}19}$. Довірчий інтервал для математичного сподівання $\boldsymbol{a_\Gamma}$ нормально розподіленої кількісної ознаки $\boldsymbol{X}$ генеральної сукупності при відомому середньоквадратичному відхиленні $\boldsymbol{\sigma_\Gamma}$ визначається нерівністю

$$\overline{x}_B - t\frac{\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} < a_\Gamma < \overline{x}_B + t\frac{\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}},$$

де $\boldsymbol{t}$ заходиться з умови $\boldsymbol{\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}}$. За таблицею у додатку 2 знаходимо $\boldsymbol{t = 1{,}96}$, якому відповідає значення функції Лапласа $\boldsymbol{\frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475}$. Тоді шуканий довірчий інтервал є

$$31{,}33 - \frac{1{,}96 \cdot 3{,}19}{\sqrt{100}} < a_\Gamma < 31{,}33 + \frac{1{,}96 \cdot 3{,}19}{\sqrt{100}} \quad \text{або} \quad 30{,}70 < a_\Gamma < 31{,}96.$$

<u>**Приклад 44.**</u> З генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом, витягнута вибірка:

$(x_i;\, x_{i+1})$	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240	240-260	260-280
n_i	1	4	10	14	12	6	2	1

Знайти з надійністю γ довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання, середньоквадратичного відхилення і дисперсії ознаки $\boldsymbol{X}$ генеральної сукупності.

Розв'язання. Якщо генеральне середнє квадратичне відхилення $\boldsymbol{\sigma_\Gamma}$ невідоме, але відомі вибіркова середня $\boldsymbol{\overline{x}_B}$ і виправлене вибіркове значення $\boldsymbol{s}$, то довірчий інтервал для математичного сподівання $\boldsymbol{a_\Gamma}$ ознаки $\boldsymbol{X}$ генеральної сукупності відшукується за допомогою розподілу Стьюдента і має вигляд

$$\overline{x}_B - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a_\Gamma < \overline{x}_B + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

де значення $\boldsymbol{t_\gamma}$ знаходиться з таблиці у додатку 3.

Перетворимо заданий інтервальний розподіл до дискретного вигляду за формулою $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Отримаємо

x_i^*	130	150	170	190	210	230	250	270
n_i	1	4	10	14	12	6	2	1

Об'єм вибірки $n = 50$. Обчислимо вибіркову середню:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i}{n} = \frac{1}{50}\big(130\cdot 1 + 150\cdot 4 + 170\cdot 10 + 190\cdot 14 + 210\cdot 12 + 230\cdot 6 + 250\cdot 2 +$$
$$+ 270\cdot 1\big) = 195{,}2.$$

Оскільки вибіркова дисперсія є

$$D_B = \overline{x_B^2} - \left(\overline{x}_B\right)^2 = \frac{1}{50}\big(130^2\cdot 1 + 150^2\cdot 4 + 170^2\cdot 10 + 190^2\cdot 14 + 210^2\cdot 12 + 230^2\cdot 6 +$$
$$+ 250^2\cdot 2 + 270^2\cdot 1\big) - 195{,}2^2 = 812{,}96,$$ то вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_B = \sqrt{D_B} = 28{,}5$, виправлена вибіркова дисперсія $s^2 = \dfrac{n}{n-1} D_B = \dfrac{50}{49}\cdot 813 \approx 829{,}6$, а виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = \sqrt{829{,}6} \approx 28{,}8$. Значення t_γ знаходимо з таблиці у додатку 3 при $n = 50$ й $\gamma = 0{,}95$: $t_\gamma = 2{,}009$. Отже, отримуємо

$$195{,}2 - \frac{2{,}009\cdot 28{,}8}{\sqrt{50}} < a_\Gamma < 195{,}2 + \frac{2{,}009\cdot 28{,}8}{\sqrt{50}} \quad \text{або} \quad 187{,}0 < a_\Gamma < 203{,}4;$$

На практиці довірчі інтервали для середньоквадратичного відхилення або дисперсії доводиться будувати або при оцінюванні точності вимірювальної методики і апаратури або, наприклад, при оцінюванні технологічного розкиду деякого параметра промислової продукції.

Довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення σ_Γ ознаки X генеральної сукупності визначається нерівністю

$$s(1-q) < \sigma_\Gamma < s(1+q),$$

де значення q знаходиться з таблиці у додатку 4. При $n = 50$ й $\gamma = 0{,}95$ з вказаної таблиці знаходимо $q = 0{,}21$. Отже, отримуємо

$$28{,}8\cdot(1-0{,}21) < \sigma_\Gamma < 28{,}8\cdot(1+0{,}21) \quad \text{або} \quad 22{,}75 < \sigma_\Gamma < 34{,}85.$$

Зауваження. Якщо $q > 1$, то довірчий інтервал $0 < \sigma_Г < s(1+q)$;

Довірчий інтервал для дисперсії може бути отриманий на підставі наступного міркування. Оскільки дисперсія є квадрат середнього квадратичного відхилення ($D_Г = \sigma_Г^2$), то довірчий інтервал, який покриває генеральну дисперсію з заданою надійністю γ, має вигляд

$$s^2(1-q)^2 < D_Г < s^2(1+q)^2, \text{ якщо } q < 1 \text{ й } 0 < D_Г < s^2(1+q)^2, \text{ якщо } q > 1.$$

В нашому випадку $22{,}75^2 < D_Г < 34{,}85^2$ або $517{,}6 < D_Г < 1214{,}5$.

<u>Приклад 45.</u> Результати обстеження 100 підприємств відносно споживання сировини X (т) і обсягу виробленої продукції Y (тис. од.) представлені у кореляційній таблиці.

Y	X					n_y
	5	**15**	**25**	**35**	**45**	
30	7	1				**8**
32	2	7	1			**10**
34	1	5	4	1		**11**
36		1	15	10	8	**34**
38			3	12	15	**30**
40				1	6	**7**
n_x	**10**	**14**	**23**	**24**	**29**	$n = 100$

Потрібно:

а) в декартовій системі координат побудувати випадкові точки вибірки і емпіричні ламані регресії Y на X й X на Y, зробити припущення про існування і тип кореляційного зв'язку між X та Y;

б) скласти лінійні рівняння регресії Y на X й X на Y і побудувати відповідні прямі на одному кресленні;

в) оцінити адекватність лінійної моделі регресії даним таблиці за кресленням й величинам залишкового середньоквадратичного відхилення та вибіркового парного коефіцієнта кореляції.

Розв'язання.

а) При $x = 5$ ознака Y має розподіл

Y	30	32	34

n_i	7	2	1

Тому умовна середня $\overline{y}_{x=5} = \dfrac{30\cdot 7 + 32\cdot 2 + 34\cdot 1}{10} = 30{,}8$.

При $x = 15$ ознака Y має розподіл

Y	30	32	34	36
n_i	1	7	5	1

Отже, $\overline{y}_{x=15} = \dfrac{30\cdot 1 + 32\cdot 7 + 34\cdot 5 + 36\cdot 1}{14} = 32{,}86$.

Аналогічно обчислюються всі умовні середні $\overline{y}_x$. В результаті отримуємо таблицю, що виражає кореляційну залежність $\overline{y}$ від от X.

X	5	15	25	35	45
$\overline{y}_x$	30,8	32,86	35,74	37,08	37,86

Оскільки при $y = 30$ ознака X має розподіл

X	5	15
n_j	7	1

то умовне середнє $\overline{x}_{y=30} = \dfrac{5\cdot 7 + 15\cdot 1}{8} = 6{,}25$.

При $y = 32$ ознака X має розподіл

X	5	15	25
n_j	2	7	1

Отже, $\overline{x}_{y=32} = \dfrac{5\cdot 2 + 15\cdot 7 + 25\cdot 1}{10} = 14$.

Аналогічно обчислюються всі умовні середні $\overline{x}_y$. В результаті отримуємо таблицю, що виражає кореляційну залежність $\overline{x}$ від от Y.

Y	30	32	34	36	38	40
$\overline{x}_y$	6,25	14	19,54	32,35	39	43,57

В прямокутній системі координат побудуємо експериментальні точки та точки $A_i\left(x_i;\overline{y}_{xi}\right)$. З'єднавши їх відрізками прямих, отримаємо емпіричну лінію регресії Y на X. Аналогічно будуємо точки $B_j\left(\overline{x}_{yj};y_j\right)$ і емпіричну лінію регресії X на Y. Результати представлені на рис. 6. Вигляд емпіричних ліній регресії і їх розташування відносно експериментальних точок дозволяє припустити існування лінійного кореляційного зв'язку між X й Y.

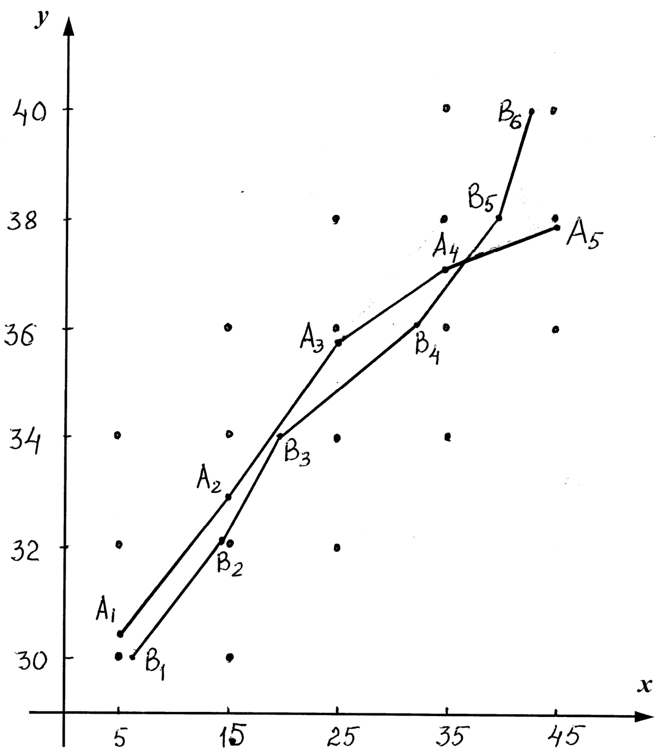

Рис. 6

б) обчислимо вибірковий парний коефіцієнт кореляції

$$r_B=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x\cdot\sigma_y},$$

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i\cdot n_i}{n},\ \overline{y}=\frac{\sum y_j\cdot n_j}{n},\ \overline{x^2}=\frac{\sum x_i^2\cdot n_i}{n},\ \overline{y^2}=\frac{\sum y_j^2\cdot n_j}{n},$$

$$\overline{xy}=\frac{\sum x_i y_j\cdot n_{ij}}{n},\ \sigma_x=\sqrt{\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2},\ \sigma_y=\sqrt{\overline{y^2}-\left(\overline{y}\right)^2},$$

$$\overline{x} = \frac{5\cdot 10 + 15\cdot 14 + 25\cdot 23 + 35\cdot 24 + 45\cdot 29}{100} = 29{,}8,$$

$$\overline{y} = \frac{30\cdot 8 + 32\cdot 10 + 34\cdot 11 + 36\cdot 34 + 38\cdot 30 + 40\cdot 7}{100} = 35{,}78,$$

$$\overline{x^2} = \frac{5^2\cdot 10 + 15^2\cdot 14 + 25^2\cdot 23 + 35^2\cdot 24 + 45^2\cdot 29}{100} = 1059,$$

$$\overline{y^2} = \frac{30^2\cdot 8 + 32^2\cdot 10 + 34^2\cdot 11 + 36^2\cdot 34 + 45^2\cdot 30 + 40^2\cdot 7}{100} = 1287{,}4,$$

$$\overline{xy} = \frac{30\cdot 5\cdot 7 + 30\cdot 15\cdot 1 + 32\cdot 5\cdot 2 + 32\cdot 15\cdot 7 + 32\cdot 25\cdot 1 + 34\cdot 5\cdot 1 + 34\cdot 15\cdot 5}{100} +$$

$$+ \frac{34\cdot 25\cdot 4 + 34\cdot 35\cdot 1 + 36\cdot 15\cdot 1 + 36\cdot 25\cdot 15 + 36\cdot 35\cdot 10 + 36\cdot 45\cdot 8 + 38\cdot 25\cdot 3}{100} +$$

$$+ \frac{38\cdot 35\cdot 12 + 38\cdot 45\cdot 15 + 40\cdot 35 + 40\cdot 45\cdot 6}{100} = 1095{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{1059 - (29{,}8)^2} = 13{,}08, \qquad \sigma_y = \sqrt{1287{,}4 - (35{,}78)^2} = 2{,}68,$$

$$r_B = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1095{,}5 - 29{,}8\cdot 35{,}78}{13{,}08\cdot 2{,}68} = 0{,}83.$$

Підставимо знайдені значення у рівняння прямої регресії Y на X

$$y - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}).$$

Отримуємо $y - 35{,}78 = 0{,}83\dfrac{2{,}68}{13{,}08}\left(x - 29{,}8\right)$ або $y = 0{,}17x + 30{,}71$.

Тепер підставимо знайдені значення у рівняння регресії X на Y

$$x - \overline{x} = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y}).$$

Отримуємо $x - 29{,}8 = 0{,}83\dfrac{13{,}08}{2{,}68}\left(y - 35{,}78\right)$ або $x = 4{,}05y - 115{,}14$.

Зауваження. Якщо у кореляційній таблиці дані інтервальні розподіли, за значення варіант потрібно брати середини часткових інтервалів.

Зобразимо графіки прямих ліній регресії на кресленні (рис. 7). Цифрою **1** позначена пряма регресії Y на X, а цифрою **2** – пряма регресії X на Y. Як бачимо, прямі розташовані відносно одна одної так само, як і відповідні емпіричні лінії, причому обидві прямі проходять через точку $(\overline{x}, \overline{y})$ – центр регресії.

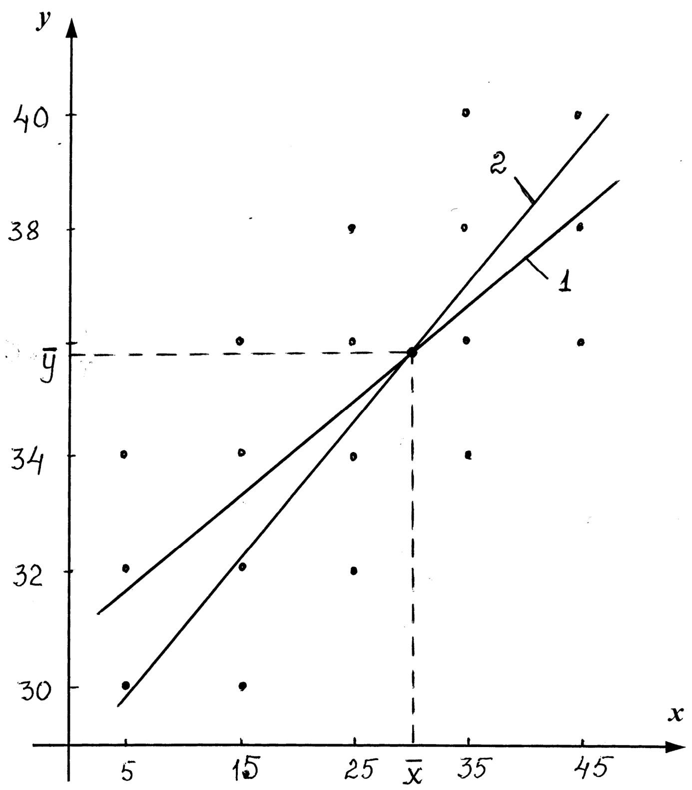

Рис. 7

Застосування умовних варіант при побудові рівнянь регресії. Оскільки значення обох ознак X і Y є рівновіддаленими, то дану задачу можна розв'язати за допомогою умовних варіант

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1},\ v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

де C_1, C_2 – хибні нулі, h_1, h_2 – кроки. Так, в даному прикладі

$$C_1 = 25,\ h_1 = 10,\ u_i = \frac{x_i - 25}{10};\ C_2 = 36,\ h_2 = 2,\ v_j = \frac{y_j - 36}{2}.$$

Побудуємо кореляційну таблицю.

v	u					n_y
	-2	**-1**	**0**	**1**	**2**	
-3	7	1				**8**
-2	2	7	1			**10**
-1	1	5	4	1		**11**
0		1	15	10	8	**34**
1			3	12	15	**30**
2				1	6	**7**
n_x	**10**	**14**	**23**	**24**	**29**	$n = 100$

$$\bar{u} = \frac{-2 \cdot 10 \cdot 14 + 0 \cdot 23 + 1 \cdot 24 + 2 \cdot 29}{100} = 0,48,$$

$$\bar{v} = \frac{-3 \cdot 8 - 2 \cdot 10 - 1 \cdot 11 + 1 \cdot 30 + 2 \cdot 7}{100} = -0,11,$$

$$\overline{u^2} = \frac{4 \cdot 10 + 1 \cdot 14 + 1 \cdot 24 + 4 \cdot 29}{100} = 1,94;$$

$$\overline{v^2} = \frac{9 \cdot 8 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 11 + 1 \cdot 30 + 4 \cdot 7}{100} = 1,81;$$

$$\overline{uv} = \frac{1}{100} \cdot [(-3)(-2) \cdot 7 + (-3)(-1) \cdot 1 + (-2)(-2) \cdot 2 + (-2)(-1) \cdot 7 + (-1)(-2) \cdot 1 +$$

$$+ (-1)(-1) \cdot 5 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 12 + 1 \cdot 2 \cdot 15 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 6] = 1,4;$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = \sqrt{1,94 - 0,2304} = 1,308, \ \sigma_v = \sqrt{1,81 - 0,012} = 1,34;$$

$$r_B = \frac{\overline{uv} - \bar{u} \cdot \bar{v}}{\sigma_u \sigma_v} = \frac{1,4 - 0,48 \cdot (-0,11)}{1,31 \cdot 1,34} = 0,83;$$

$$\bar{x} = \bar{u} h_1 + C_1 = 0,48 \cdot 10 + 25 = 29,8, \ \bar{y} = \bar{v} h_2 + C_2 = -0,11 \cdot 2 + 36 = 35,78,$$

$$\sigma_x = \sigma_u \cdot h_1 = 1,308 \cdot 10 = 13,08, \ \sigma_y = \sigma_v \cdot h_2 = 1,34 \cdot 2 = 2,68.$$

Підставивши отримані дані у рівняння регресії, будемо мати

$$y = 0,17x + 30,71 \quad \text{й} \quad x = 4,05y - 115,14;$$

в) креслення (подібне рис. 7), на яке нанесені експериментальні точки і прямі регресії, дає досить добре уявлення про відповідність лінійної моделі регресії даним експерименту.

На практиці тіснота (сила) лінійного кореляційного зв’язку оцінюється за допомогою коефіцієнта кореляції (Пірсона). При $r_B = 0$ лінійного кореляційного зв'язку між ознаками не існує (однак при цьому може бути нелінійний кореляційний зв'язок і навіть нелінійна функціональна залежність). Якщо ж $|r_B| = 1$, то обидві прямі регресії зливаються, тобто усі експериментальні точки лежать на прямій регресії. Це випадок жорсткої лінійної залежності між випадковими величинами в межах проведених експериментів. Таким чином, чим ближче за модулем коефіцієнт лінійної кореляції до одиниці, тим тісніша лінійна залежність між випадковими величинами; наближення ж коефіцієнта кореляції до нуля веде до послаблення лінійної залежності.

Тісноту зв'язку можна оцінити за допомогою шкали Чеддока (додаток 6). В даному випадку $r_B = 0,83$, що за шкалою Чеддока свідчить про високу кореляційну залежність між X та Y.

На практиці зазвичай має місце розсіювання точок кореляційного поля навколо теоретичної лінії регресії, тобто відхилення емпіричних даних від теоретичних. Величини цих відхилень (так званих *залишкових середніх квадратичних відхилень*)

$$\sigma_{Y/X} = \sigma_y\sqrt{\frac{n}{n-2}(1-r_B^2)} \qquad \left(\sigma_{X/Y} = \sigma_x\sqrt{\frac{n}{n-2}(1-r_B^2)}\right)$$

є абсолютними похибками передбачення Y за заданим X (X за Y), а величини $\delta_{Y/X} = \frac{\sigma_{Y/X}}{\overline{y}}\cdot 100\%$ $\left(\delta_{X/Y} = \frac{\sigma_{X/Y}}{\overline{x}}\cdot 100\%\right)$ є відповідними відносними похибками. За ними судять про якість (адекватність) обраної лінійної моделі регресії.

В даному випадку

$$\sigma_{Y/X} = 2{,}68\cdot\sqrt{\frac{100}{100-2}(1-0{,}83^2)} = 1{,}51,\ \sigma_{X/Y} = 13{,}08\cdot\sqrt{\frac{100}{100-2}(1-0{,}83^2)} = 7{,}37,$$

$$\delta_{Y/X} = \frac{1{,}51}{35{,}78}\cdot 100\% = 4{,}2\%,\ \delta_{X/Y} = \frac{7{,}37}{29{,}8}\cdot 100\% = 24{,}7\%.$$

Як бачимо, лінійна модель регресії Y на X досить адекватно відповідає експериментальним даним, чого не можна сказати про лінійну модель регресії X на Y.

Приклад 46. За допомогою критерію Пірсона перевірити на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності з емпіричним розподілом витягнутої з неї вибірки обсягом $n = 200$.

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Розв'язання.

1. Обчислимо вибіркову середню $\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n} = 12{,}63$ й вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_B = \sqrt{\overline{x_B^2} - \left(\overline{x}_B\right)^2} = 4{,}695$.

2. Обчислимо теоретичні (вирівнюючі) частоти n_i' (враховуючи, що $n = 200$, крок (відстань між двома сусідніми варіантами) $h = 2$, $\sigma_B = 4{,}695$) за формулою

$$n_i' = \frac{n\cdot h}{\sigma_B}\cdot\varphi(u_i) = \frac{200\cdot 2}{4{,}695}\cdot\varphi\left(\frac{x_i - \overline{x}_B}{\sigma_B}\right) = 85{,}2\cdot\varphi\left(\frac{x_i - \overline{x}_B}{\sigma_B}\right).$$

Складемо розрахункову таблицю (значення функції $\varphi(x)$ наведені у додатку 1).

i	x_i	$u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_B}{\sigma_B}$	$\varphi(u_i)$	$n'_i = \dfrac{n \cdot h}{\sigma_B} \cdot \varphi(u_i)$
1	5	-1,62	0,1074	9,1
2	7	-1,20	0,1942	16,5
3	9	-0,77	0,2966	25,3
4	11	-0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

3. Порівняємо емпіричні і теоретичні частоти. Складемо розрахункову таблицю, з якої знайдемо спостережуване значення критерію Пірсона (тобто вибіркове значення критерію χ^2) $\chi^2_{спост} = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ (m – число груп вибірки):

i	n_i	n'_i	$\lvert n_i - n'_i \rvert$	$(n_i - n'_i)^2$	$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	15	9,1	5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	5,5
3	25	25,3	0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	2,0	4,0	0,1
5	26	33,9	7,9	62,41	1,8
6	21	29,8	8,8	77,44	2,6
7	24	22,0	2,0	4,0	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	7,0	6,0	36,0	5,1
$\sum$	**200**				$\chi^2_{спост} = 22,2$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 (додаток 5), рівню значущості $\alpha = 0,05$ й числу ступенів свободи $k = m - 1 - l = 9 - 1 - 2 = 6$ (l – число параметрів розподілу, що оцінюються: для нормального розподілу $l = 2$) знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області (оскільки критерій χ^2 є правостороннім) $\chi^2_{кр} = \chi^2(0,05,\ 6) = 12,6$.

Оскільки $\chi^2_{спост} = 22,2 > \chi^2_{кр} = 12,6$, тобто спостережуване значення критерію потрапляє у критичну область, то на рівні значущості $\alpha = 0,05$ це означає, що гіпотеза H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності відкидається й приймається альтернативна гіпотеза H_1 про те, що розподіл генеральної сукупності не є нормальним. Інакше кажучи, емпіричні і теоретичні частоти розрізняються значущо.

<u>Приклад 47.</u> Розподіл **50** промислових підприємств за середньою чисельністю працівників характеризується наступними даними:

Чисельність робітників	**120-140**	**140-160**	**160-180**	**180-200**	**200-220**	**220-240**	**240-260**	**260-280**
Число підприємств	**1**	**4**	**10**	**14**	**12**	**6**	**2**	**1**

За виглядом гістограми частот з'ясувати, чи можна прийняти у якості нульової гіпотезу H_0: генеральна сукупність, з якої витягнута вибірка, розподілена за нормальним законом, і якщо так, то перевірити її за допомогою критерію Пірсона на рівні значущості $\alpha = 0,01$.

Розв'язання.

1. Зважаючи на малочисельність частот, об'єднаємо перші два і останні три інтервали. Отримуємо таблицю:

$(x_i; x_{i+1})$	**120-160**	**160-180**	**180-200**	**200-220**	**220-280**
n_i	**5**	**10**	**14**	**12**	**9**

Побудуємо гістограму частот (показана на рис. 8). Виходячи з вигляду гістограми можна припустити, що дана випадкова величина підпорядковується нормальному закону розподілу. Отже, висунемо і перевіримо гіпотезу H_0: досліджувана випадкова величина розподілена нормально.

2. Для обчислення теоретичних частот знаходимо (див. приклад 44) $\overline{x}_B = 196,6$, $\sigma_B = 32,1$, $n = 50$.

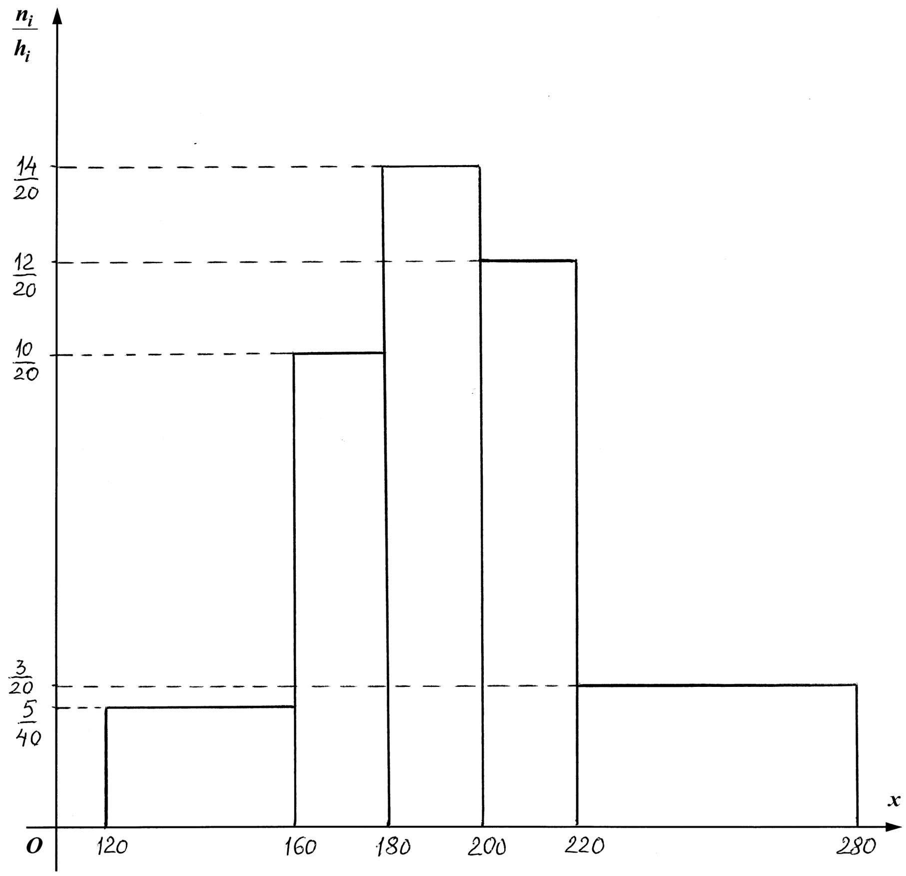

Рис. 8

3. Знайдемо теоретичні частоти $n'_i = nP_i$,

де $P_i = P(x_i < X < x_{i+1})$ – ймовірність того, що випадкова величина потрапить в i-й частковий інтервал $(x_i; x_{i+1})$.

Оскільки передбачуваний закон розподілу – нормальний, то

$$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа (додаток 2), $z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x}_B}{\sigma_B}$, $z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_B}{\sigma_B}$.

Обчислення зведемо в таблицю:

i	x_i	x_{i+1}	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	n'_i
1	120	160	-2,36	-1,13	-0,49	-0,37	0,12	6,03
2	160	180	-1,13	-0,51	-0,37	-0,195	0,175	8,62
3	180	200	-0,51	0,1	-0,195	0,044	0,239	12,12
4	200	220	0,1	0,72	0,044	0,264	0,22	11,18
5	220	280	0,72	2,57	0,264	0,495	0,231	11,39
Σ							**1**	**50**

4. Порівняємо емпіричні і теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона.

Обчислимо спостережуване значення критерію Пірсона $\chi^2_{спост} = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$. Для цього складемо розрахункову таблицю:

i	n_i	n'_i	$\lvert n_i - n'_i \rvert$	$(n_i - n'_i)^2$	$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	5	6,03	1,03	1,061	0,306
2	10	8,62	1,38	1,90	0,220
3	14	12,12	1,88	3,53	0,155
4	12	11,18	0,82	0,672	0,073
5	9	11,39	2,39	5,71	0,210
$\sum$	**50**	**50**			$\chi^2_{спост} = 0{,}9638$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 (додаток 5), рівню значущості $\alpha = 0{,}01$ й числу ступенів свободи $k = m - 3 = 5 - 3 = 2$ знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області $\chi^2_{кр} = \chi^2(0{,}01,\ 2) = 9{,}2$.

Оскільки $\chi^2_{спост} = 0{,}9638 < \chi^2_{кр} = 9{,}2$, то на рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ гіпотеза H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності приймається. Інакше кажучи, емпірічні і теоретичні частоти розрізняються не значущо.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Розв’язати рівняння.

1. а) $x^2 y' - 2xy = 3y$; б) $xy' + 2y = e^{3x}$.

2. а) $xy' + y = xy\ln x$; б) $\cos x y' + y \sin x = 1$.

3. а) $x^2(y+1) + (x^3 - 1)(y - 1)y' = 0$; б) $xy' + y = \ln x$.

4. а) $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x})\cos y\, y' = 0$; б) $y' - y\sin x = \sin 2x$.

5. а) $x^2 y' + \cos 4y = 1$; б) $y' - 3y\,tgx = \dfrac{1}{\cos x}$.

6. а) $y x^2 y' = \left(y^2 + 1\right) e^{\frac{1}{x}}$; б) $x^2 y' + 3xy = \cos x$.

7. а) $y^2 - xy' = y - x^2 y'$; б) $y' + 3y\,tgx = \sin x$.

8. а) $x\,tg5y\,dx - e^{2x^2} dy = 0$; б) $x^2 y' + xy = 2\ln x + 1$.

9. а) $y' = (x-1)e^{x+y}$; б) $xy' - 2y = xe^{\frac{1}{x}}$.

10. а) $3yy' + x^3 = x$; б) $y' + \dfrac{2e^{2x} y}{1 + e^{2x}} = e^{-2x}$.

Завдання 2. Знайти відповідний частинний розв’язок рівняння.

1. а) $y'' = -\dfrac{2x}{\left(x^2+3\right)^2}$; б) $(1+x^2)y'' + 2xy' = 2x^3,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;

   в) $y'' + 50\sin y \cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5$.

2. а) $y'' = \dfrac{1}{2x+5}$; б) $xy'' \ln x = y',\ y(e) = 0,\ y'(e) = 1$;

   в) $yy'' - (y')^2 = 3y',\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

3. а) $y'' = -\dfrac{x}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}}$; б) $y'' + y'tgx = \sin 2x,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

   в) $yy'' = 4 - (y')^2,\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

4. а) $y'' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; б) $\left(1 + \sin x\right)y'' = y'\cos x,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;

   в) $y''tg\,y = 2(y')^2,\quad y(0) = \dfrac{\pi}{4},\ y'(0) = 1$.

5. а) $y'' = \dfrac{3}{x^2+4}$; б) $y'' = 2(y'-1)tgx,\quad y(0) = 3,\ y'(0) = 2$;

в) $y'' = 50\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 5$.

6. а) $y'' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$; б) $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}, \quad y(1) = 0, y'(1) = 1$;

в) $yy'' = (y')^2 + y, \quad y(0) = 1, y'(0) = \sqrt{2}$.

7. а) $y'' = \frac{x}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$; б) $xy'' - y' = x^2 e^x, \quad y(1) = 0, y'(1) = e$;

в) $y\,y'' = y^2 y' + (y')^2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$.

8. а) $y'' = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$; б) $y''(1 + \cos x) + y'\sin x = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$;

в) $2(y')^2 = (y - 1)y'', \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$.

9. а) $y'' = \frac{tg 2x}{\cos^2 2x}$; б) $2xy'y'' = (y')^2 + 1, \quad y(2) = \frac{2}{3}, y'(2) = 1$;

в) $y\,y'' - y\,y'\ln y = (y')^2, \quad y(1) = e, y'(1) = e$.

10. а) $y'' = \frac{x}{4 + x^2}$; б) $y'' + 2x(y')^2 = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$;

в) $y\,y'' = y^2 y' + (y')^2, \quad y(1) = 2, y'(1) = 4$.

Завдання 3. Знайти відповідний (загальний або частинний) розв’язок рівняння.

1. а) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$;

б) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$.

2. а) $y'' - 2y' + y = 4e^x\sqrt{x - 5}$;

б) $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$.

3. а) $y'' + 2y' = \frac{e^{-4x}}{\sqrt{3 - 7e^{-4x}}}$;

б) $y'' - 14y' + 53y = 106x^2 + 50x + 29, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 7$.

4. а) $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$;

б) $y'' + 16y = e^x(\cos 4x - 8\sin 4x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$.

5. а) $y'' + y' = \dfrac{e^{-2x}}{3 - 2e^{-2x}}$;

б) $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$.

6. а) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$;

б) $y'' + 25y = e^x(\cos 5x - 10\sin 5x), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4$.

7. а) $y'' - 2y' = \dfrac{e^{4x}}{\sqrt{5e^{4x} + 2}}$;

б) $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$.

8. а) $y'' - 2y' = \dfrac{e^{4x}}{3e^{4x} - 1}$;

б) $y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$.

9. а) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\sin^2 x}$;

б) $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$.

10. а) $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^4}$;

б) $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

Завдання 4. Знайти область збіжності степеневого ряду.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-4)^{2n+1}}{2n-1}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{2^{n-1}3^n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n^2+1}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n x^n}{6^n \sqrt[3]{n+1}}$. 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n-2)(x-3)^n}{2^{n+1}(n+1)^2}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-2)^{2n}}{\sqrt{n+3}}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{\sqrt{2n+1}}$.

Завдання 5. Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Маклорена і вказати область збіжності отриманого ряду.

1. $f(x) = x^3 arctgx$. **2.** $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. **3.** $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$.

4. $f(x) = \arcsin(3x^2)$. **5.** $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{8-x}}$. **6.** $f(x) = \cos 5x^2$.

7. $f(x) = 5^{-3x^2}$. **8.** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$. **9.** $f(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}$.

10. $f(x) = arctg(2x^3)$.

Завдання 6.

а) Обчислити визначений інтеграл з точністю **0,001**, використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд;

б) знайти три перші ненульові члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші.

1. а) $\int\limits_0^{0.25} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$; б) $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$.

2. а) $\int\limits_0^{1} arctg\left(\dfrac{x^2}{2}\right)dx$; б) $y' = x^2y^2 + 1$, $y(0) = 1$.

3. а) $\int\limits_0^{0.2} \sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x}\,dx$; б) $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 0{,}5$.

4. а) $\int\limits_0^{0.5} \dfrac{arctgx}{x}dx$; б) $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = 0{,}5$.

5. а) $\int\limits_0^{0.25} \sqrt{x}\cdot\cos x dx$; б) $y' = x + y^2$, $y(0) = -1$.

6. а) $\int\limits_0^{0.5} \ln\left(1+x^3\right)dx$; б) $y' = x + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

7. а) $\int\limits_0^1 x^2 \cdot \sin x dx$; б) $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$.

8. а) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$; б) $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$.

9. а) $\int\limits_0^{0.5} x\sqrt{x^3 + 1}\, dx$; б) $y' = x + y + y^2$, $y(0) = 1$.

10. а) $\int\limits_0^{0.5} \frac{1}{x^5 + 1} dx$; б) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

Завдання 7. Розв’язати задачу.

1. У партії з 15 телефонних апаратів 5 несправних. Випадкова величина X − число несправних апаратів серед трьох випадковим чином відібраних. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини та обчислити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

2. Дана функція розподілу неперервної випадкової величини X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{24}\left(x^2 + 2x\right), & 0 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}.$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $[0;1]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

3. У ящику міститься по 4 білих, червоних і чорних кулі. Навмання вибирають три з них. Випадкова величина X − кількість вийнятих червоних куль. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини та обчислити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

4. Дана функція розподілу неперервної випадкової величини X

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, & -1\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}.$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $[1;2]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

5. У першій коробці 10 деталей, з них 3 бракованих, у другій – 17 деталей, з них 4 бракованих, у третій – 12, з них 3 бракованих. Випадкова величина X − число бракованих деталей за умови, що з кожної коробки взято навмання по одній деталі. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини та обчислити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

6. Дана функція розподілу неперервної випадкової величини X

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{1}{9}(x^3+1), & -1\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}.$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $[0;1]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

7. Два рази навмання вибирається число з множини $\{0, 1, 2\}$. Випадкова величина X − сума обраних чисел. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини та обчислити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

8. Дана функція розподілу неперервної випадкової величини X

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ \frac{1}{2}(x^2-x), & 1\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}.$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $[1{,}5;2]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

9. Чотири рази кидають кубик. Випадкова величина $X-$ кількість появ числа очок, більшого чотирьох. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини та обчислити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

10. Дана функція розподілу неперервної випадкової величини X

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<2 \\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}.$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $[2{,}5;2{,}8]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

Завдання 8. Розв’язати задачу.

1. Вимірювальний пристрій дає випадкові помилки, розподілені за нормальним законом. Яка ймовірність того, що помилка не перевищить 20 од., якщо відомо, що систематичних помилок пристрій не допускає, а дисперсія помилок дорівнює 1370 кв. од.?

2. Поїзди метро даної гілки йдуть з інтервалом 5 хв. Пасажир виходить на перон в деякий момент часу. Яка ймовірність появи пасажира не раніше ніж через 1 хв. після відходу попереднього поїзда, але не пізніше ніж за 2 хв. до відходу наступного?

3. Виріб вважається придатним, якщо відхилення його розмірів від номінальних не перевищує за абсолютною величиною 3,6 мм. Випадкові відхилення розміру виробу від номінального підпорядковуються нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням, рівним 3 мм. Систематичні відхилення відсутні. Визначити середнє число придатних виробів серед 100 виготовлених.

4. При випробуванні легованої сталі на вміст вуглецю ймовірність того, що у випадково взятій пробі відсоток вуглецю перевищить допустимий рівень, дорівнює 0,01. Вважаючи застосовним закон рідкісних явищ, обчислити, скільки в середньому необхідно випробувати зразків, щоб з ймовірністю 0,95 зазначений ефект спостерігався принаймні 1 раз.

5. Гральна кістка підкидається до першої появи 5 очок. Знайти математичне сподівання числа підкидань, якщо проводиться не більше 5 підкидань.

6. Припускається, що границя текучості деякого сорту сталі різних плавок є випадковою величиною, розподіленою нормально з математичним сподіванням 32 кГ/кв.мм і середнім квадратичним відхиленням 1,5 кГ/кв.мм. Знайти відсоток плавок, для яких границя текучості відрізняється від номіналу за модулем від 5% до 10%.

7. 90% лампочок перегорають після 800 годин роботи. Знайти ймовірність того, що лампочка перегорить в проміжку від 100 до 200 годин роботи.

8. Повідомлення містить 1000 символів. Ймовірність спотворення одного символу дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що буде спотворено не більше 3-х символів.

9. За відсотковим вмістом фосфору в сталі виділено дві групи плавок. Перша група містить фосфор у межах 0,025% – 0,035%, друга – у кількості менше 0,025%. Відсотковий вміст фосфору в сталі є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з математичним сподіванням 0,03% і середнім квадратичним відхиленням 0,01%. Знайти відсоток плавок, що потрапляють в кожну з виділених груп.

Завдання 9. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Треба:

а) Написати диференціальну функцію розподілу, побудувати її схематичний графік, вказавши його характерні точки;

б) знайти ймовірність того, що випадкова величина в результаті випробування прийме значення, що належить інтервалу $(\alpha;\beta)$;

в) знайти ймовірність того, що абсолютна величина відхилення значень випадкової величини від її математичного сподівання не перевищить δ.

1. $M(X)=375;\ \sigma(X)=25;\ \alpha=300;\ \beta=425;\ \delta=0{,}1.$

2. $M(X)=10;\ \sigma(X)=2;\ \alpha=5;\ \beta=12;\ \delta=5.$

3. $M(X)=164;\ \sigma(X)=5{,}5;\ \alpha=153;\ \beta=170;\ \delta=0{,}1.$

4. $M(X)=5;\ \sigma(X)=0{,}81;\ \alpha=4;\ \beta=7;\ \delta=2.$

5. $M(X)=20;\ \sigma(X)=0{,}5;\ \alpha=19;\ \beta=25;\ \delta=1{,}5.$

6. $M(X)=10;\ \sigma(X)=4;\ \alpha=12;\ \beta=14;\ \delta=0{,}1.$

7. $M(X)=25;\ \sigma(X)=4;\ \alpha=13;\ \beta=30;\ \delta=0{,}1.$

8. $M(X)=4{,}5;\ \sigma(X)=0{,}05;\ \alpha=3{,}5;\ \beta=4{,}35;\ \delta=0{,}1.$

9. $M(X)=16;\ \sigma(X)=0{,}3;\ \alpha=15{,}75;\ \beta=16{,}3;\ \delta=0{,}6.$

10. $M(X)=12;\ \sigma(X)=4;\ \alpha=10;\ \beta=14;\ \delta=5.$

Завдання 10. З генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом, витягнута вибірка. Треба:

а) скласти інтервальний розподіл вибірки з кроком h, взявши за початок першого інтервалу x_0;

б) побудувати полігон абсолютних частот і гістограму відносних частот;

в) знайти вибіркову середню $\overline{x}_B$ та вибіркову дисперсію D_B, виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення s;

г) знайти з надійністю $\gamma = 0{,}95$ довірчі інтервали для математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення ознаки X генеральної сукупності.

1.

42,5 60,0 63,5 70,5 82,0 83,5 92,0 95,5 100,0 101,0 105,0
108,5 110,0 115,5 120,0 120,5 122,0 130,0 138,5 140,0 142,0 150,5
160,0 162,1 180,5

$$h=20;\ x_0=42{,}5.$$

2.

187,6 228,6 242,3 252,7 271,2 293,7 311,8 358,1 331,7 350,8
387,5 359,2 361,1 372,4 384,5 391,6 407,7 417,6 442,7 476,2

$$h = 50; \ x_0 = 185.$$

3.

104,0 103,1 102,0 98,0 99,0 94,0 119,0 114,8 109,5 103,1 92,0
97,1 95,2 91,7 104,0 104,5 92,8 95,8 104,9 77,5 93,1 94,9 99,5
99,7 103,0

$$h = 10; \ x_0 = 75.$$

4.

90,0 96,0 98,0 98,1 98,5 99,0 101,5 102,0 102,2 102,5 103,0
103,5 104,0 104,3 104,4 104,5 105,5 106,0 108,0 108,2 108,7 109,0
112,0 113,5

$$h = 5; \ x_0 = 90.$$

5.

773 802 815 827 843 854 861 869 877 886 889 892 885 901 903
905 911 918 919 923 929 937 941 955 962 974 981

$$h = 40; \ x_0 = 760.$$

6.

42,5 60,0 63,5 70,5 82,0 83,5 92,0 95,5 100,0 101,0 105,0 108,5
110,0 115,5 120,0 130,0 138,5 140,0 142,0 150,5 160,0 162,1 180,5

$$h = 30; \ x_0 = 40.$$

7.

1360 1550 1600 1690 1750 1750 1800 1880 1890 1920 1950 2000
2020 2050 2050 2050 2080 2120 2150 2200 2250 2340 2420 2450
2600

$$h = 200; \ x_0 = 1300.$$

8.

266 278 315 336 347 354 368 369 391 408 411 416 427 444 448
457 462 481 483 495 512 536 576

$$\boldsymbol{h = 50;\ x_0 = 250.}$$

9.

1250 1450 1550 1700 1760 1820 1880 1960 2100 2175 2190 2200
2220 2275 2280 2310 2400 2550 2580 2600 2670 2800 2950 3000
3075

$$\boldsymbol{h = 400;\ x_0 = 1100.}$$

10.

750 2100 3500 3500 4000 5200 5400 5600 5900 6800 7000 7000
7200 7500 7800 7900 8100 8500 8750 8900 9000 10000 11000
12000 12500

$$\boldsymbol{h = 2000;\ x_0 = 500.}$$

Завдання 11. За заданою кореляційною таблицею

а) в декартовій системі координат побудувати випадкові точки вибірки і емпіричні ламані лінії регресії Y на X й X на Y, зробити припущення про існування і тип кореляційного зв'язку між X та Y;

б) скласти лінійні рівняння регресії Y на X й X на Y і побудувати їх графіки на одному кресленні;

в) оцінити адекватність лінійної моделі регресії даним таблиці за кресленням й величинам вибіркового парного коефіцієнта кореляції та залишкового середнього квадратичного відхилення.

1.

Y	X						n_y
	12	**17**	**22**	**27**	**32**	**37**	
25	2	4					**6**
35		6	3				**9**
45			6	35	4		**45**
55			2	8	6		**16**
65				14	7	3	**24**
n_x	**2**	**10**	**11**	**57**	**17**	**3**	$n = 100$

2.

Y	X					n_y
	20-30	**30-40**	**40-50**	**50-60**	**60-70**	
50-80	5	4				**9**
80-110		12	8	1		**21**
110-140			5	5		**10**
140-170			4	7		**11**
170-200				2	1	**3**
200-230					1	**1**
n_x	**5**	**16**	**17**	**15**	**2**	$n = 55$

3.

Y	X					n_y
	1-1,5	**1,5-2**	**2-2,5**	**2,5-3**	**3-3,5**	
5-10	2	1				**3**
10-15	3	4	3	1		**11**
15-20		5	10	8		**23**
20-25			1	6	1	**8**
25-30				1	4	**5**
n_x	**5**	**10**	**14**	**16**	**5**	$n = 50$

4.

Y	X					n_y
	20	**30**	**40**	**50**	**60**	
1	8	2				**10**
3	12	20	8			**40**
5			10	1		**11**
7			9	6	2	**17**
9			10	4	8	**22**
n_x	**20**	**22**	**37**	**11**	**10**	$n = 100$

5.

Y	X					n_y
	320-370	**370-420**	**420-470**	**470-520**	**520-570**	
5-20	2	3				**5**
20-35	1	6	7	1		**15**
35-50		3	10	9	2	**24**
50-65			5	4	6	**15**
65-80			2	3	1	**6**
n_x	**3**	**12**	**24**	**17**	**9**	$n = 65$

6.

Y	X					n_y
	2-4	**4-6**	**6-8**	**8-10**	**10-12**	
30-70	3	4				**7**
70-110		9	8	1		**18**
110-150			5	4	1	**10**
150-190			4	7	2	**13**
190-230				1	1	**2**
n_x	**3**	**13**	**17**	**13**	**4**	$n = 50$

7.

Y	X						n_y
	5	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	
45	2	4					**6**
55		3	5				**8**
65			5	35	5		**45**
75			2	8	17		**27**
85				4	7	3	**14**
n_x	**2**	**7**	**12**	**47**	**29**	**3**	$n = 100$

8.

Y	X					n_y
	0,4-1,4	**1,4-2,4**	**2,4-3,4**	**3,4-4,4**	**4,4-5,4**	
4-6				2	6	**8**
6-8			4	7	4	**15**
8-10	1	1	7	5		**14**
10-12	2	4	1			**7**
12-14	3	3				**6**
n_x	**6**	**8**	**12**	**14**	**10**	$n = 50$

9.

Y	X					n_y
	9	**11**	**13**	**15**	**17**	
8	2	6				**8**
9		4	7	4		**15**
10		5	7	1	1	**14**
11			2	4	1	**7**
12				3	3	**6**
n_x	**2**	**15**	**16**	**12**	**5**	$n = 50$

10.

Y	X					n_y
	0-2	**2-4**	**4-6**	**6-8**	**8-10**	
0-0,2	2	2				**4**
0,2-0,4	2	7	10			**19**
0,4-0,6		2	17	7		**26**
0,6-0,8			4	3	2	**9**
0,8-1,0					2	**2**
n_x	**4**	**11**	**31**	**10**	**4**	$n = 60$

Завдання 12. Дані емпіричні значення випадкової величини X. Треба:

а) побудувати гістограму частот і за її виглядом визначити, чи можна прийняти у якості нульової гіпотезу про те, що випадкова величина розподілена за нормальним законом;

б) перевірити висунуту нульову гіпотезу за допомогою критерію Пірсона при заданому рівні значущості α.

1.

x_i	**10-15**	**15-20**	**20-25**	**25-30**	**30-35**	**35-40**	**40-45**
n_i	**4**	**9**	**18**	**8**	**5**	**4**	**2**

$\alpha = 0,05$.

2.

x_i	**1-5**	**5-9**	**9-13**	**13-17**	**17-21**	**21-25**
n_i	**6**	**10**	**17**	**12**	**4**	**1**

$\alpha = 0,01$.

3.

x_i	**1,0-1,5**	**1,5-2,0**	**2,0-2,5**	**2,5-3,0**	**3,0-3,5**
n_i	**5**	**11**	**23**	**13**	**8**

$\alpha = 0,05$.

4.

x_i	**102-104**	**104-106**	**106-108**	**108-110**	**110-112**
n_i	**5**	**10**	**15**	**12**	**8**

$\alpha = 0,05$.

5.

x_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
n_i	4	7	11	21	5	2

$\alpha = 0{,}025$.

6.

x_i	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
n_i	10	21	30	17	12

$\alpha = 0{,}01$.

7.

x_i	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110
n_i	1	3	4	6	11	10	7	5	2	1

$\alpha = 0{,}01$.

8.

x_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
n_i	4	15	20	26	19	14	2

$\alpha = 0{,}025$.

9.

x_i	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
n_i	5	6	10	13	9	7

$\alpha = 0{,}01$.

10.

x_i	0,2-0,4	0,4-0,6	0,6-0,8	0,8-1	1-1,2	1,2-1,4
n_i	5	17	23	16	7	2

$\alpha = 0{,}01$.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ, ЇЇ ПОДАННЯ І ПЕРЕВІРКА

Номер варіанта контрольної роботи, що виконується, повинен співпадати з ДВОМА останніми цифрами номера залікової книжки. Номери задач з кожного завдання вибираються з таблиці, наведеної нижче.

Виконана контрольна робота переписується в окремий зошит. Розв'язки задач наводяться зі збереженням номерів задач, у порядку зростання цих номерів. Перед розв'язком кожної задачі треба повністю виписати її умову. На обкладинку зошита слід наклеїти заповнений реєстраційний бланк (вказати номер контрольної роботи, назву дисципліни, групу і факультет, прізвище, ім'я та по батькові, номер залікової книжки, домашню адресу). Оформлена відповідним чином робота реєструється у деканаті. Її необхідно подати на кафедру вищої математики завчасно, але не пізніше як за 10 днів до початку екзаменаційної сесії. Після перевірки викладач робить висновок про те, вірно чи невірно виконана робота, з відповідним надписом на обкладинці. Якщо робота виконана не повністю або невірно, то викладач вказує номери відсутніх або невірно розв'язаних задач і, якщо необхідно, робить свої зауваження у вигляді короткої рецензії. Роботи з не усіма задачами, або ж з такими, що повністю або частково не відповідають даному варіанту, вважаються виконаними невірно. Студент повинен виправити *усі* помилки у тому ж зошиті *після* рецензії викладача у розділі "Робота над помилками" і повернути роботу у найкоротший термін. Виправлення у перевіреній роботі поверх позначок викладача не допускаються. Студент може бути допущений до захисту контрольної роботи, порядок якого визначається викладачем, тільки після повторної перевірки виправлених помилок. На екзамен (залік) допускаються тільки студенти з захищеною роботою.

Склад варіантів контрольної роботи

Номер варіанта	Завд. 1	Завд. 2	Завд. 3	Завд. 4	Завд. 5	Завд. 6	Завд. 7	Завд. 8	Завд. 9	Завд. 10	Завд. 11	Завд. 12
00	6	6	4	5	6	1	6	4	5	6	3	2
01	4	7	3	9	10	6	4	2	9	10	4	8
02	3	4	9	6	5	7	3	9	6	5	5	9
03	9	3	8	1	1	4	9	8	1	1	6	7

04	1	10	10	3	3	5	1	10	3	3	7	1
05	10	2	2	2	9	3	10	3	2	9	10	5
06	2	8	1	8	2	10	2	1	8	2	8	4
07	8	9	7	4	8	2	8	7	4	8	9	3
08	7	5	6	7	7	8	7	6	7	7	2	10
09	5	1	5	10	4	9	5	5	10	4	1	6
10	4	10	7	3	3	4	3	7	3	3	1	10
11	1	2	1	7	5	6	2	1	7	5	2	8
12	9	9	5	1	1	5	9	5	1	1	9	7
13	7	7	3	4	7	9	7	3	4	7	5	4
14	5	6	2	10	10	8	6	2	10	10	6	6
15	8	4	10	8	6	7	4	10	8	6	7	9
16	6	8	4	5	8	10	8	4	5	8	3	1
17	10	3	6	2	4	2	10	6	2	4	8	5
18	3	5	9	9	9	1	5	9	9	9	4	3
19	2	1	8	6	2	3	1	8	6	2	10	2
20	5	6	6	8	5	10	6	6	10	5	8	6
21	2	9	9	2	3	7	9	9	2	3	6	7
22	9	2	2	9	4	6	2	2	9	4	9	10
23	4	7	7	4	7	4	7	7	4	7	7	1
24	1	10	10	1	9	1	10	10	1	9	10	9
25	6	5	5	7	6	2	5	5	7	8	5	8
26	7	4	4	6	2	3	4	4	6	2	4	2
27	8	3	3	5	8	5	3	3	5	6	3	3
28	3	8	8	3	1	8	8	8	3	1	2	5
29	10	1	1	10	10	9	1	1	8	10	1	4
30	5	6	6	1	5	4	6	6	1	5	4	7
31	4	5	5	2	10	6	5	5	2	10	5	1
32	7	10	8	6	6	5	10	8	6	6	1	10
33	3	4	4	3	1	10	4	4	3	1	10	6
34	9	9	10	9	3	7	9	10	9	3	3	9
35	6	7	7	5	8	3	7	7	5	8	2	8
36	2	1	2	8	7	2	1	2	8	7	6	2
37	10	8	9	10	4	8	8	9	10	4	7	5
38	1	2	3	4	2	9	2	3	4	2	8	4
39	8	3	1	7	9	1	3	1	7	9	9	3
40	6	4	7	4	7	1	4	7	4	7	4	9
41	5	10	5	3	10	9	10	5	3	10	2	6
42	2	3	8	7	6	4	3	8	7	8	7	1
43	10	7	4	2	1	8	7	4	2	1	10	3
44	1	5	9	8	5	3	5	9	8	5	6	2
45	4	2	3	5	2	5	2	3	5	2	5	4
46	3	6	6	10	4	2	6	6	10	4	9	10
47	8	8	2	6	8	7	8	2	6	6	3	5
48	9	1	10	9	3	6	1	10	9	3	8	7
49	7	9	1	1	9	10	9	1	1	9	1	8
50	10	2	1	7	8	3	2	1	7	8	5	6
51	9	8	2	8	1	4	8	2	8	1	9	4
52	8	9	3	6	6	5	9	3	6	6	6	3

53	7	7	5	5	5	6	7	5	5	5	1	9
54	1	1	10	9	4	7	1	10	9	4	3	1
55	5	5	6	3	9	10	5	6	3	9	2	10
56	4	4	7	2	3	8	4	7	2	3	8	2
57	3	3	8	1	10	9	3	8	1	10	4	8
58	2	10	9	10	7	2	10	9	10	7	7	7
59	6	6	4	4	2	1	6	4	4	2	10	5
60	9	10	1	5	8	1	10	1	5	8	3	3
61	3	8	4	7	7	2	8	4	7	7	7	2
62	5	7	7	3	10	9	7	7	3	10	1	9
63	6	4	2	9	4	5	4	2	9	4	4	7
64	8	6	5	1	3	6	6	5	1	3	10	6
65	10	9	9	8	2	7	9	6	8	2	8	4
66	7	1	3	6	6	3	1	3	6	6	5	8
67	4	5	6	2	1	8	5	9	2	1	2	10
68	1	3	10	4	5	4	3	10	4	5	9	5
69	2	2	8	10	9	10	2	8	10	9	6	1
70	10	6	7	2	6	8	6	7	2	6	8	6
71	6	7	6	9	1	6	7	6	9	1	2	9
72	7	10	2	6	7	9	10	2	6	7	9	2
73	1	1	9	5	5	7	1	9	5	5	4	7
74	9	9	3	4	8	10	9	3	4	8	1	10
75	8	8	4	3	10	5	8	4	3	10	7	5
76	2	2	10	8	2	4	2	10	8	2	6	4
77	3	3	8	10	4	3	3	8	10	4	5	3
78	5	5	5	1	3	2	5	5	1	3	3	8
79	4	4	1	7	9	1	4	1	7	9	10	1
80	8	7	1	6	6	4	7	1	6	6	1	6
81	10	1	3	7	8	5	1	3	7	8	2	5
82	6	10	4	3	3	1	10	4	3	3	6	10
83	9	6	2	8	7	10	6	2	8	7	3	4
84	5	9	5	9	10	3	9	5	9	10	9	9
85	7	8	7	10	9	2	8	7	10	9	5	7
86	1	2	10	5	5	6	2	10	5	5	8	1
87	3	5	8	1	1	7	3	8	1	1	10	8
88	4	4	6	2	4	8	5	6	2	4	4	2
89	2	3	9	4	2	9	4	9	4	2	7	3
90	8	9	8	8	4	4	9	8	8	4	4	4
91	4	6	1	4	2	2	6	1	4	2	3	10
92	10	1	9	6	7	7	1	9	6	7	7	3
93	3	3	7	1	10	10	3	7	1	10	2	7
94	7	2	3	5	6	6	2	3	5	6	8	5
95	5	4	2	7	5	5	4	2	7	5	5	2
96	6	10	6	10	9	9	10	6	10	9	10	6
97	1	5	10	2	3	3	5	10	2	3	6	8
98	2	7	5	3	8	8	7	5	3	8	9	1
99	9	8	4	9	1	1	8	4	9	1	1	9

ДОДАТКИ

Додаток 1

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,3989**	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	**0,2420**	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	**0,0540**	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	**0,0044**	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0008	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

	соті долі зачення x									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	...03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	...07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	...11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	...15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	...19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	...22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	...25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	...28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	...31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	0,34134	34375	34614	34849	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	...36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	...38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	...40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	...41924	42073	42220	42364	42507	42647	42785	42922	43056	43189
1,5	...43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	...44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	...45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	...46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	...47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	0,47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	...48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	...48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	...48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	...49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	...49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	...49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	...49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	...49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	...49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	0,49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49896	49900
3,1	...49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	...49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	...49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	...49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	...49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	...49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	...49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992

3,8	...49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	...49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4,0	0,49997	49997	49997	49997	49997	49997	49998	49998	49998	49998

4,5	0,499997
5,0	0,49999997

Додаток 3

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ розподілу Стьюдента

n	**γ**			***n***	**γ**		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,78	460	861	**20**	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	**25**	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	**30**	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	**35**	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	**40**	2,023	2,708	3,555
10	2,26	3,25	4,78	**45**	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	**50**	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	**60**	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	**70**	1,996	2,646	3,439
14	2,16	3,01	4,22	**80**	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	**90**	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	**100**	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	**120**	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	**∞**	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 4

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$ розподілу χ^2

n	**γ**			***n***	**γ**		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	**20**	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	**25**	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	**30**	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	**35**	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	**40**	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	**45**	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	**50**	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	**60**	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	**70**	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	**80**	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	**90**	0,151	0,211	0,29

16	0,44	0,70	1,07	**100**	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	**150**	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	**200**	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	**250**	0,089	0,120	0,162

Додаток 5

Критичні точки $\chi^2(\alpha, k)$ розподілу χ^2

Число ступенів свободи k	Рівень значущості α					
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	6,6	5,0	3,8	0,039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,31	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	4,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0
40	63,7	59,3	55,8	26,5	24,4	22,2
50	76,2	71,4	67,5	34,8	32,4	29,7
75	106,4	100,8	96,2	56,1	52,9	49,5
100	135,8	129,6	124,3	77,9	74,2	70,1
200	249,4	241,1	234,0	168,3	162,7	156,4

Додаток 6

Шкала Чеддока

Показник тісноти зв'язку (значення модуля коефіцієнта кореляції)	0,1 - 0,3	0,3 - 0,5	0,5 - 0,7	0,7 - 0,9	0,9 - 0,99
Характеристика сили кореляційного зв'язку	слабка	помірна	помітна	висока	дуже висока