**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**
**НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**

**О.Є. ЗАПОРОЖЧЕНКО, І.Л. ШИНКОВСЬКА, І.П. ЗАЄЦЬ**

# ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник. Протокол № 1 від 30.01.2012

**Дніпропетровськ НМетАУ 2012**

УДК 517(07)
Запорожченко О.Є., Шинковська І.Л., Заєць І.П. Застосування похідної: Навч. посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 53 с.

Наведені вихідні означення, теореми, пояснений їхній геометричний зміст. Викладення теоретичних положень супроводжується необхідними ілюстраціями і розв'язанням відповідних прикладів. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів технічних спеціальностей.

Іл.2. Бібліогр.: 7 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.П. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)
Ю.Я. Годес, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

## ЗМІСТ

# ВСТУП

Поняття похідної функції є одним з основних понять математичного аналізу. Похідна широко використовується при розв’язуванні багатьох задач з математики, фізики та інших наук, а також при вивченні різних процесів. Якщо перебіг того чи іншого процесу описується деякою функцією, то дослідження даного процесу зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

В навчальному посібнику розглядається застосування диференціального числення до знаходження границь функцій, розв’язання задач на екстремум, найбільше та найменше значення функції та дослідження функцій із побудовою графіків. Проста структура посібника, яка передбачає основні теоретичні відомості, що супроводжуються розгляданням чималої кількості прикладів, та приклади для самостійної роботи, сприятиме, на думку авторів, якісному засвоєнню матеріалу даної теми.

# 1. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ. РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ ТА НОРМАЛІ ДО КРИВОЇ

Розглянемо в прямокутній системі координат деяку криву, що задана рівнянням $y = f(x)$ і має в точці $M(x_0; y_0)$ не вертикальну дотичну (рис.1.1).

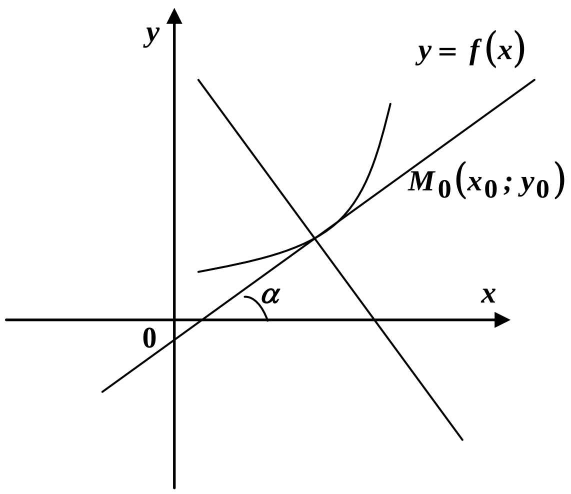



Рис. 1.1

Кутовий коефіцієнт цієї дотичної або тангенс кута $\alpha$, що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі $0x$, - це похідна $f'(x_0)$ в цій точці: $k = tg\alpha = f'(x_0)$. У цьому полягає ***геометричний зміст похідної.***

Рівняння самої дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд :

$$y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0). \qquad (1.1)$$

***Нормаллю до кривої*** називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної. Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \qquad (1.2)$$

Наведемо деякі твердження, які випливають з геометричного змісту похідної.

Нехай на інтервалі $(a;b)$ задано неперервну функцію $y = f(x)$ (рис.1.2).

1. Якщо похідна $f'(x_1) > 0$ при $x_1 \in (a;b)$, то дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_1; f(x_1))$ утворює з віссю $0x$ гострий кут.

2. Якщо похідна $f'(x_2) = 0$ при $x_2 \in (a;b)$, то дотична в точці $(x_2; f(x_2))$ паралельна осі $0x$.

3. Якщо похідна $f'(x_3) < 0$ при $x_3 \in (a;b)$, то дотична в точці $(x_3; f(x_3))$ утворює з віссю $0x$ тупий кут.

4. У випадку нескінченної похідної $f'(x)$ дотична в точці $x_4$ паралельна осі $0y$, її рівняння $x = x_0$.

Справедливі й обернені твердження.

Такий зв'язок між похідною і дотичною допомагає інтуїтивному сприйняттю багатьох математичних фактів.

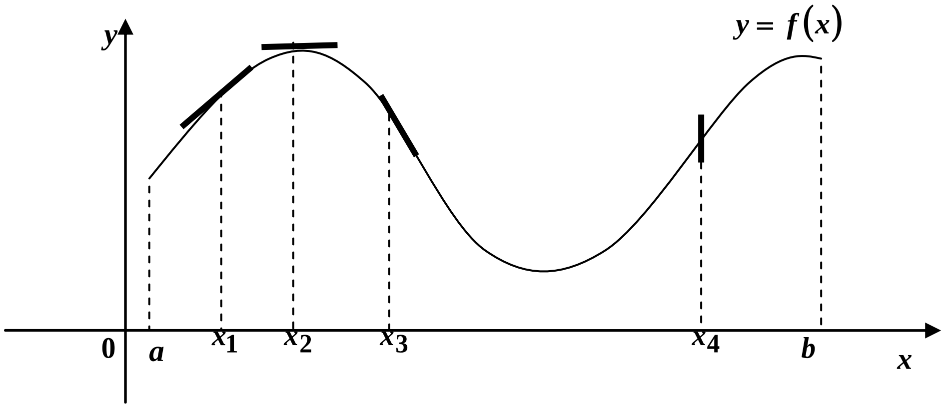



Рис. 1.2

### *Зразки розв'язування задач*

1. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = 2x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

1) Для обчислення кутового коефіцієнта дотичної знайдемо похідну функції: $y' = \left(2x^2\right)' = 4x$.

2) Обчислимо її значення при $x_0 = 1$: $y'(x_0 = 1) = 4 \cdot 1 = 4$.

Отримаємо: $k = tg\alpha = y'(x_0 = 1) = 4$.

2. Знайти кут нахилу параболи $y = x^2 - x + 1$ до осі $0x$ в точці $x_0 = -1$.

Для обчислення кута нахилу кривої в даній її точці знайдемо кут, що утворює дотична, яка проведена в цій точці, з віссю $0x$:

1) $y' = \left(x^2 - x + 1\right)' = 2x - 1$.

2) $y'(x_0 = -1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$.

3) $k = tg\alpha = y'(x_0 = -1) = -3$, звідки $\alpha = arctg(-3) \approx 108^\circ$.

3. До кривої $y = 3x^2 - x$ у точці $x_0 = -1$ проведені дотична та нормаль. Скласти їх рівняння.

Для запису рівняння дотичної знайдемо ординату точки $M$, через яку вона проходить, та кутовий коефіцієнт цієї дотичної.

1) $y_0 = y(x_0 = -1) = 3 \cdot (-1)^2 - (-1) = 4$; $M(-1;4)$.

2) $y' = \left(3x^2 - x\right)' = 6x - 1$.

3) $k = y'(x_0 = -1) = 6 \cdot (-1) - 1 = -7$.

4) Підставивши координати точки $M$ та значення $k$ в рівняння (1.1) та (1.2), отримаємо:

$y - 4 = -7 \cdot (x + 1)$ або $7x + y + 3 = 0$ - рівняння дотичної;

$y - 4 = \dfrac{1}{7} \cdot (x + 1)$ або $x - 7y + 29 = 0$ - рівняння нормалі.

4. Знайти координати точки, в якій дотична до кривої $y = x^2 - x - 12$ утворює кут $45^\circ$ з віссю $0x$.

1) Знайдемо тангенс кута нахилу дотичної, проведеної в шуканій точці, до осі $0x$: $tg\alpha = y' = \left(x^2 - x - 12\right)' = 2x - 1$.

2) За умовою задачі кут $\alpha = 45^\circ$, тому $tg\,45^\circ = 2x - 1$ або $1 = 2x - 1$, звідки $x = 1$.

3) Визначимо ординату шуканої точки: $y(x = 1) = 1^2 - 1 - 12 = -12$; $M(1;-12)$.

5. Знайти кут, під яким крива $y = x^2 + x$ перетинає вісь $0x$.

1) Знайдемо точки перетину параболи $y = x^2 + x$ з віссю $0x$, для цього розв’яжемо систему $\begin{cases} y = x^2 + x, \\ y = 0. \end{cases}$

Будемо мати: $x^2 + x = 0$, $x \cdot (x + 1) = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Тобто парабола перетинає вісь $0x$ у точках $O(0;0)$ та $A(-1;0)$.

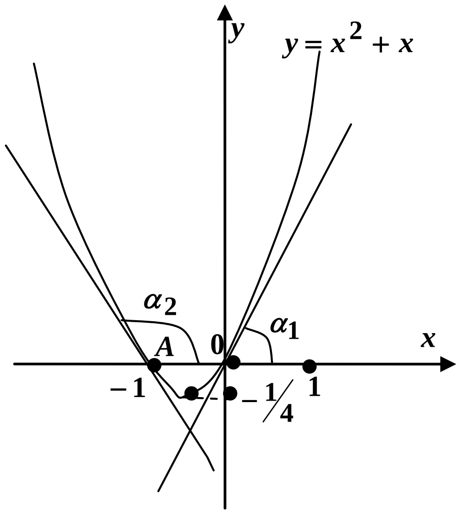
2) Обчислимо кутові коефіцієнти дотичних до параболи в обох точках: $y' = \left(x^2 + x\right)' = 2x + 1$.

$$k_1 = y'(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1; \quad k_2 = y'(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1.$$

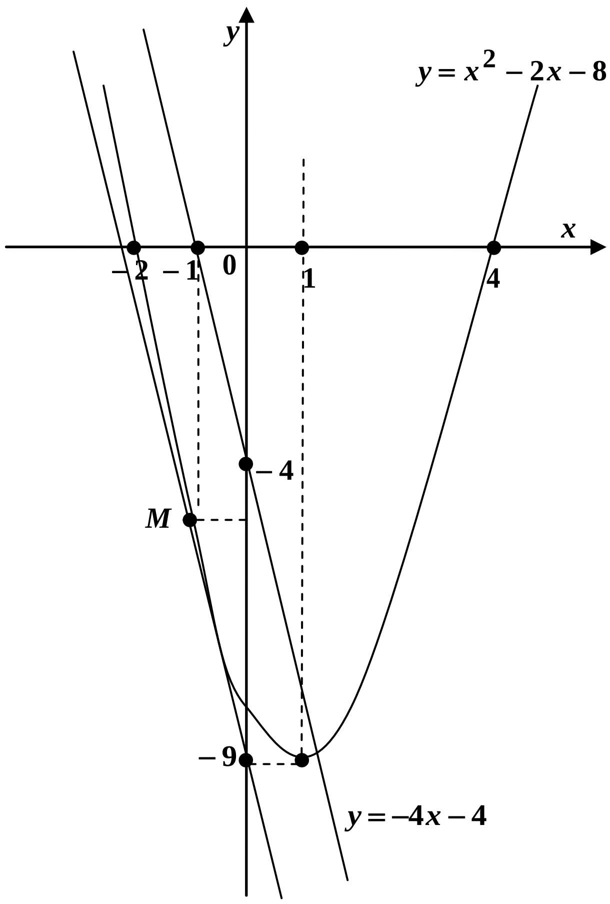
3) Знайдемо кути $\alpha_1$ та $\alpha_2$, що утворені дотичними в точках $O(0;0)$ та $A(-1;0)$ з віссю $0x$:

$tg\alpha_1 = 1$, звідки $\alpha_1 = 45^\circ$;

$tg\alpha_2 = -1$, звідки $\alpha_2 = 135^\circ$.




6. На кривій $y = x^2 - 2x - 8$ знайти точку $M$, у котрій дотична до неї паралельна прямій $4x + y + 4 = 0$.




1) Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до параболи:

$$k_1 = y' = \left(x^2 - 2x - 8\right)' = 2x - 2.$$

2) Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої. З рівняння прямої дістанемо: $y = -4x - 4$, звідки $k_2 = -4$.

3) Оскільки дотична до параболи та пряма $4x + y + 4 = 0$ паралельні, то їх кутові коефіцієнти є рівними, тобто: $2x - 2 = -4$, звідки $x_0 = -1$ (це абсциса точки дотику).

Ординату точки дотику $M$ обчислимо з рівняння параболи:

$$y_0 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 8 = -5.$$

Отримали: $M(-1;-5)$.

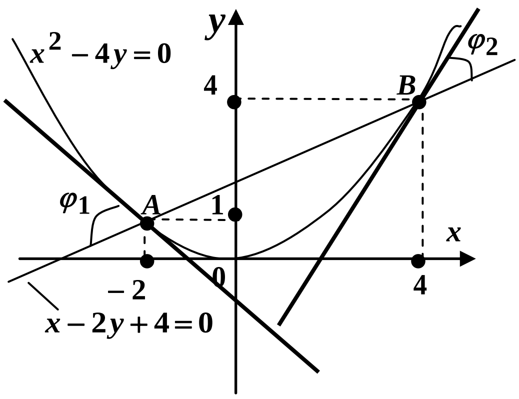
7. Знайти гострі кути, утворені при перетині параболи $x^2 - 4y = 0$ та прямої $x - 2y + 4 = 0$.

1) Знайдемо точки перетину параболи та прямої, для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - 4y = 0, \\ x - 2y + 4 = 0. \end{cases}$

Будемо мати:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4}, \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4}, \\ x - \dfrac{x^2}{2} + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4}, \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1,\ y_2 = 4, \\ x_1 = -2,\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Парабола та пряма перетинаються в точках $A(-2;1)$ та $B(4;4)$.




2) Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої: $x - 2y + 4 = 0$; $y = \dfrac{1}{2}x + 2$, звідки $k = \dfrac{1}{2}$.

3) Обчислимо кутові коефіцієнти дотичних в точках $A$ та $B$. З рівняння параболи дістанемо: $y = \dfrac{x^2}{4}$, тоді $k = y' = \dfrac{1}{2}x$. У точці $A(-2;1)$: $k\big|_{x=-2} = \dfrac{1}{2} \cdot (-2) = -1$; у точці $B(4;4)$: $k\big|_{x=4} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

4) Беремо до уваги, що кутом між прямою та кривою, що перетинаються, називається кут між прямою та дотичною до кривої, яка проведена в їх точці перетину. Тому кут в точці $A$ знайдемо як кут між двома прямими із кутовими коефіцієнтами $k_1 = -1$ та $k_2 = \dfrac{1}{2}$.

Будемо мати: $tg\varphi_1 = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \dfrac{\frac{1}{2} - (-1)}{1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)} = 3$, звідки $\varphi_1 = arctg3$.

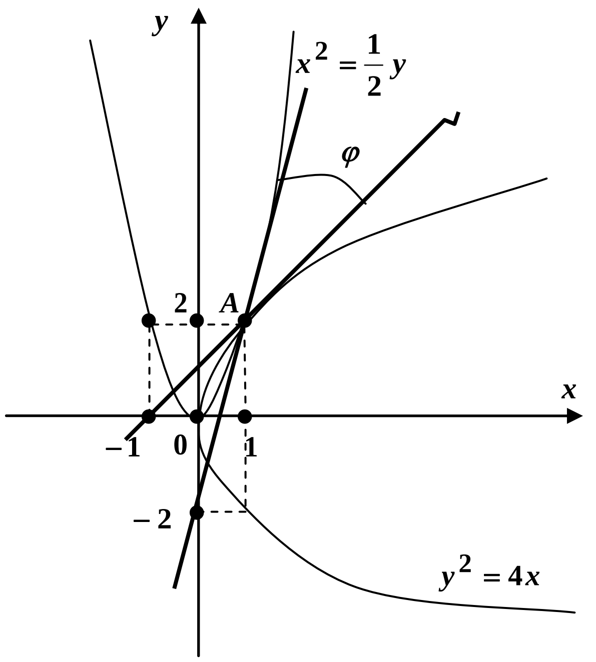
Тоді кут в точці $B$ знайдемо по кутовим коефіцієнтам $k_1 = \frac{1}{2}$ та $k_2 = 2$:

$$tg\varphi_2 = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}, \text{ звідки } \varphi_2 = arctg\frac{3}{4}.$$

8. Знайти гострі кути, що утворені при перетині кривих $y^2 = 4x$ та $x^2 = \frac{1}{2}y$.

1) Знайдемо точки перетину парабол, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x^2 = \frac{1}{2}y. \end{cases}$$




Будемо мати:

$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{4}, \\ x^2 = \frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{4}, \\ \frac{y^4}{16} = \frac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{4}, \\ y^4 - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{4}, \\ y \cdot \left(y^3 - 8\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \;\; x_2 = 1, \\ y_1 = 0, \;\; y_2 = 2. \end{cases}$$

Параболи перетинаються в точках $O(0;0)$ та $A(1;2)$.

2) Врахуємо, що кутом між двома кривими, що перетинаються, називають кут між дотичними до цих кривих, які проведені в точці перетину кривих. Тому знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до парабол в точках $O$ та $A$.

В точці $O(0;0)$ дотичними до обох парабол є вісі $0x$ та $0y$, звідси випливає, що параболи в цій точці перетинаються під прямим кутом.

Для параболи $y^2 = 4x$: $y = 2\sqrt{x}$ (знак перед радикалом беремо плюс, бо перетин парабол має місце в першій чверті). $k_1 = y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

$$k_1\big|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$$

Для параболи $x^2 = \frac{1}{2}y$: $y = 2x^2$. $k_2 = y' = 4x$; $k_2\big|_{x=1} = 4 \cdot 1 = 4$.

3) По кутовим коефіцієнтам обчислимо $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{4-1}{1+4\cdot 1} = \frac{3}{5} =$ $= 0{,}6$, звідки $\varphi = arctg 0{,}6 \approx 30^\circ$.

### Завдання для самостійної роботи

1. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до кубічної параболи $y = x^3$ в початку координат та в точці $A(1;1)$.

2. Скласти рівняння дотичної і нормалі до гіперболи $y = \frac{2}{x}$ у точці $A(2;1)$.

3. В якій точці дотична до параболи $y = x^2 - 2x$ паралельна: а) осі $0x$; б) прямій $y = 2x - 1$?

4. В якій точці дотична до параболи $y = -x^2 + 4$ перпендикулярна прямій $x - 2y + 2 = 0$?

5. Знайти кут, під яким перетинаються лінії $y = (x-2)^2$ та $y = -4 + 6x - x^2$.

## 2. РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ПРИ ОБЧИСЛЕННІ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ ЗА ПРАВИЛОМ ЛОПІТАЛЯ

При обчислюванні границь функцій часто виникає випадок, коли чисельник та знаменник дробу при $x \to a$ прямують до нуля або до нескінченності. Знаходження таких границь називають розкриттям невизначеностей. Найбільш простим і ефективним методом розкриття невизначеностей є правило Лопіталя.

## 2.1. Розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ і $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

***<u>Теорема 1 (перше правило Лопіталя).</u>*** Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні на інтервалі $(a,b)$; $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$ і $g'(x)\neq 0$ на $(a,b)$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$, то границя $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$ також існує і дорівнює $K$.

Тобто $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

***Зауваження 1.*** Теорема 1 сформульована для правих границь. Вона лишається вірною для лівих границь і для границь взагалі.

***Зауваження 2.*** Твердження теореми 1 залишається в силі, якщо $x\to\infty$ .

При розкритті невизначеності $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ діє наступна теорема.

***<u>Теорема 2 ( друге правило Лопіталя).</u>*** Нехай $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні на інтервалі $(a,b)$; $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=\infty$ і $g'(x)\neq 0$ на $(a,b)$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g(x)}=K$, то границя $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$ також існує і дорівнює $K$.

Тобто $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Зауваження, подані до теореми 1, залишаються в силі і для теореми 2.

Трапляється, що для похідних $f'(x)$ і $g'(x)$ виконуються умови однієї з теорем, тоді правило Лопіталя можна застосовувати повторно:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}\ .$$

Взагалі, при виконанні відповідних умов цю процедуру можна застосовувати кілька разів.

Правила 1 і 2 застосовуються до випадків, коли обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ при $x\to a$ прямують до нуля або до нескінченності. Відповідно, знаходження границі $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ називають розкриттям невизначеностей типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ або $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

### *Зразки розв'язування задач*

**Обчислити границі функцій.**

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 5x \cdot 5}{3} = \dfrac{5}{3}$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{\ln x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2}{\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to 1} 3x^3 = 3$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} = \dfrac{\dfrac{\pi}{2} - arctg\, x}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(-\dfrac{1}{1 + x^2}\right)}{\dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)} \cdot \left(-\dfrac{2}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(-\dfrac{1}{1 + x^2}\right)}{\left(-\dfrac{2}{x^3 + x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x}{2(1 + x^2)} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x(1 + x^2)}{1 + x^2} = +\infty$.

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x + 1}{4x^2 + 3x - 2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5}{8x + 3} = \left(\dfrac{5}{\infty}\right) = 0$.

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^{2x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{e^{2x} \cdot 2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x}{2e^{2x} \cdot 2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6}{4e^{2x} \cdot 2} = \dfrac{6}{\infty} = 0$.

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\ln x} (n > 0) = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{n\, x^{n-1}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} n\, x^n = +\infty$.

## 2.2. Інші види невизначеностей

Досить часто зустрічаються й інші невизначеності, які за допомогою тотожних перетворень можна звести до основних випадків $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

***<u>Невизначеність</u>*** $(0\cdot\infty)$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=(0\cdot\infty)$.

Дана невизначеність зводиться до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ за допомогою перетворень $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)}$ або $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)}$.

*Зразки розв'язування задач*

**Обчислити границі.**

1. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x\cdot(tg\,x-ctg\,x)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg\,x-ctg\,x}{\left(\dfrac{1}{tg2x}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg\,x-ctg\,x}{ctg2x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\dfrac{1}{cos^2 x}+\dfrac{1}{sin^2 x}\right)}{\left(-\dfrac{1}{sin^2 2x}\cdot 2\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(sin^2 x+cos^2 x)\cdot sin^2 2x}{-2\,sin^2 x\cdot cos^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sin^2 2x}{sin^2 x\cdot cos^2 x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{2}\cdot 4=-2.$$

2. $$\lim_{x\to 0,5} sin(2x-1)\cdot tg\pi\,x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0,5}\frac{sin(2x-1)}{ctg\pi\,x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0,5}\frac{2\,cos(2x-1)}{\left(\dfrac{-\pi}{sin^2\pi\,x}\right)}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 0,5} cos(2x-1)sin^2\pi\,x=-\frac{2}{\pi}.$$

***<u>Невизначеність</u>*** $(\infty-\infty)$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, то обчислення границі $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=(\infty-\infty)$ може бути зведено до невизначеності $(0\cdot\infty)$ шляхом тотожного перетворення різниці функцій у добуток:

$$f(x)-g(x)=f(x)\cdot g(x)\cdot\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]$$ або

$$f(x)-g(x)=f(x)\cdot\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]=g(x)\cdot\left[\frac{f(x)}{g(x)}-1\right].$$

### *Зразки розв'язування задач*

**Обчислити границі.**

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(sec\,x-tg\,x)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{1}{cos\,x}-\frac{sin\,x}{cos\,x}\right)=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1-sin\,x}{cos\,x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{-cos\,x}{-sin\,x}=\frac{0}{-1}=0.$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{ln\,x}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-ln\,x}{ln\,x(x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+ln\,x\cdot 1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\left(\frac{x-1+x\,ln\,x}{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1+x\,ln\,x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+ln\,x+x\cdot\frac{1}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2+ln\,x}=\frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{3x}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x}\cdot\left(1-\frac{x}{e^{3x}}\right)$.

Обчислимо окремо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{3x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{3x}\cdot 3}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$.

Тоді, оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x}=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x}\cdot\left(1-\frac{x}{e^{3x}}\right)=\infty$.

***Невизначеності*** $\left(0^0\right), \left(\infty^0\right), \left(1^\infty\right)$.

Розглянемо степеневу – показникову функцію $y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$ .

В залежності від того, до чого прямує основа і показник степеня, маємо одну з перелічених невизначеностей.

Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ .

Розглянемо натуральний логарифм $\ln y=\ln\left[f(x)\right]^{g(x)}=g(x)\cdot \ln f(x)$ та границю $\lim\limits_{x\to a} \ln y=\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x)=(0\cdot\infty)$.

Нехай ця границя обчислена за правилом Лопіталя і дорівнює $A$. Тоді $\lim\limits_{x\to a} \ln y=\ln \lim\limits_{x\to a} y=A$. Звідси $\lim\limits_{x\to a} y=e^A$; $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^A$.

*Зразки розв'язування задач*

**Обчислити границі.**

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\infty^0\right)$.

Позначимо $y=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$. $\ln y=\ln\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+x^2\right)=\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$.

Обчислимо $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{1}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{2x}=\left(\frac{2}{\infty}\right)=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln y=\ln\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$.

Тоді $\lim\limits_{x\to+\infty} y=e^0=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x}=\left(1^\infty\right)$.

Позначимо $y=(\cos x)^{ctg^2 x}$.

$$\ln y=\ln\left[(\cos x)^{ctg^2 x}\right]=ctg^2 x\cdot\ln\cos x=\frac{\ln\cos x}{\left(\frac{1}{ctg^2 x}\right)}=\frac{\ln\cos x}{tg^2 x}.$$

Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{tg^2 x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2tg\, x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-tg\, x}{2tg\, x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\cos^2 x}{2} = \dfrac{-1}{2}$. $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \ln \lim\limits_{x\to 0} y = -\dfrac{1}{2}$.

Тоді $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{ctg^2 x} = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

## Завдання для самостійної роботи

**Обчислити границі:**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos m x}{1-\cos n x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{3x^2+x-14}$;
3. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+4x+5}{x^3+(2-x)^3}$;
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{4-x^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-e^{-4x}}{x}$;
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log_3 x}{x^2}$;
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x+1}}{3x^2+1}$;
8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) tg\, x$;
9. $\lim\limits_{x\to \infty} x^3 \cdot e^{-2x}$;
10. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;
11. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{3x^2}-\dfrac{1}{3x\, tg\, x}\right)$;
12. $\lim\limits_{x\to 0} (\ln ctg\, x)^{tg 5x}$;
13. $\lim\limits_{x\to 0} (\sin 3x)^{tg 4x}$;
14. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}}$.

# 3. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНОЇ

## 3.1. Зростання і спадання функції

Функція $y = f(x)$ називається ***зростаючою*** на інтервалі $(a,b)$, якщо для будь-яких $x_1$ і $x_2$, що належать до цього інтервалу, і таких, що $x_1 < x_2$, справджується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$ називається ***спадною*** на інтервалі $(a,b)$, якщо для будь-яких $x_1$ і $x_2$, що належать до цього інтервалу, і таких, що $x_1 < x_2$, справджується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Як зростаючі, так і спадні функції називаються ***монотонними***, а інтервали, в яких функція зростає або спадає, – ***інтервалами монотонності***.

Зростання і спадання функції $y = f(x)$ характеризується знаком її похідної: якщо у деякому інтервалі $f'(x) > 0$, то функція зростає в цьому інтервалі; якщо ж $f'(x) < 0$, то функція спадає в цьому інтервалі.

Інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають ***стаціонарними точками***), або точками, де похідна не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються ***критичними точками.***

Отже, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти похідну даної функції;
3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та за умови, що $f'(x)$ не існує;
4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної.

   На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

***Зразки розв'язування задач***

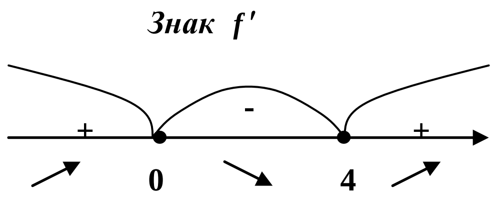
**Знайти інтервали монотонності функції.**

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$.

   1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; +\infty)$.

2) $f'(x) = 3x^2 - 12x$.

3) Критичні точки: $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0$ або $3x(x-4) = 0$, звідки $x_1 = 0, \quad x_2 = 4$.




Похідна існує на всій області визначення.

4) Функція зростає на інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(4; +\infty)$. Функція спадає на інтервалі $(0; 4)$.

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 5$.

1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; \infty)$.

2) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$.

3) Критичні точки: $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 6 = 0$ або $x^2 - 2x + 2 = 0$. Оскільки $D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$, рівняння не має коренів, тобто похідна не обертається в нуль. $f'(x)$ існує на всій області визначення. Отже, критичних точок немає.

4) $f'(x)$ приймає тільки додатні значення, функція зростає на інтервалі $(-\infty; \infty)$.

3. $f(x) = \dfrac{4}{x} - 2x$.

1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

2) $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} - 2 = \dfrac{-4 - 2x^2}{x^2} = \dfrac{-2(2 + x^2)}{x^2}$.

3) Критичні точки: $f'(x) \neq 0$, бо $2 + x^2 \neq 0$.

Похідна не існує в точці $x = 0$, але ця точка не входить в $D(f)$. Тобто критичних точок немає.

4) На всій області визначення $f'(x) < 0$, отже функція всюди спадає.

4. $f(x) = \ln x - x^2$.

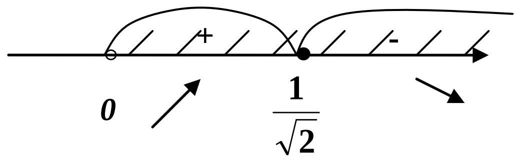
1) Область визначення $D(f): x \in (0; \infty)$.

2) $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x = \dfrac{1 - 2x^2}{x}$.

3) Критичні точки: $f'(x)=0 \Rightarrow 1-2x^2=0$, звідки $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, але $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\notin D(f)$. Похідна існує на всій області визначення.

4) Функція зростає на інтервалі $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, спадає на інтервалі $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\infty\right)$.

*Знак* $f'$




5. $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

1) Область визначення $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

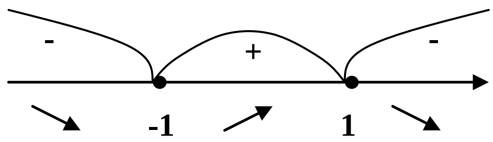
2) $f'(x)=\frac{2(1+x^2)+2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2+2x^2+4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2+2x^2}{(1+x^2)^2}$.

3) Критичні точки: $f'(x)=0 \Rightarrow 2-2x^2=0$ або $1-x^2=0$, звідки $x=\pm 1$.

Похідна існує для всіх $x\in(-\infty;\infty)$.

4) Функція зростає на інтервалі $(-1;1)$, спадає на інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(1;\infty)$.

*Знак* $f'$




6. $f(x)=x-arctgx$.

1) Функція визначена на множині дійсних чисел, крім точок $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in z$.

2) $f'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+x^2-1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}$.

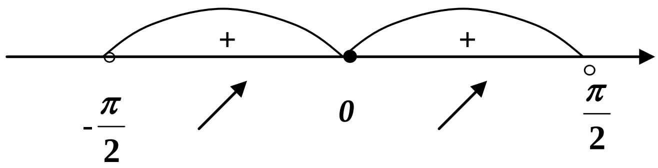
3) Критичні точки: $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2}{1+x^2}=0$, звідки $x^2=0, x=0$.

Похідна існує на всій області визначення.

4) Знаки $f'(x)$ визначимо на інтервалі неперервності $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Так як $f'(x) > 0$ на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ та $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, і $f(x)$ визначена в точці $x=0$, то функція зростає на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. З урахуванням періодичності, маємо: функція зростає на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in z$.

*Знак* $f'$




**Завдання для самостійної роботи**

Знайти інтервали монотонності функцій:

1. $y = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$;
2. $y = ln\left(1+x^2\right)$;
3. $y = \frac{2x}{x^2+1}$;
4. $y = \sqrt{x-x^2}$.

## 3.2. Локальний екстремум функції

Точка $x_0$ називається ***точкою максимуму (або мінімуму)*** функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ цієї точки, який належить області визначення функції, і для всіх $x$ з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$).

Перше правило знаходження екстремумів (максимумів і мінімумів) за допомогою першої похідної:

1) знайти область визначення $f(x)$;
2) знайти похідну $f'(x)$;
3) знайти критичні точки;

4) дослідити знак $f'(x)$ на інтервалах, на які знайдені критичні точки ділять область визначення $f(x)$.

   При цьому критична точка $x_0$ є точкою мінімуму, якщо при переході через неї зліва направо $f'(x)$ змінює знак з “-” на “+”, $x_0$ є точкою максимуму, якщо $f'(x)$ змінює знак з “+” на “-”.

5) обчислити значення функції в точках екстремуму (екстремуми).

Виявляється, що в окремих випадках можна застосовувати простіше правило дослідження функції на екстремум, використавши при цьому похідну другого порядку.

Друге правило знаходження екстремумів :

1) знайти область визначення $f(x)$;
2) знайти похідну $f'(x)$;
3) знайти стаціонарні точки;
4) знайти похідну $f''(x)$ в стаціонарній точці.

   Якщо при цьому в стаціонарній точці $x_0$ похідна $f''(x_0) \neq 0$, то $x_0$ є екстремальною точкою для функції $f(x)$, а саме, точкою мінімуму, якщо $f''(x_0) > 0$, і точкою максимуму, якщо $f''(x_0) < 0$.

5) обчислити значення функції в точках екстремуму.

***Зауваження.*** Друге правило дослідження функцій на екстремум застосовується до більш вузького класу функцій. Його, зокрема, не можна застосовувати при дослідженні на екстремум до тих точок, в яких похідна першого порядку не існує, а також до стаціонарних точок, в яких похідна другого порядку дорівнює нулю. У цих випадках слід застосовувати перше правило.

### *Зразки розв’язування задач*

**Знайти екстремуми функцій.**

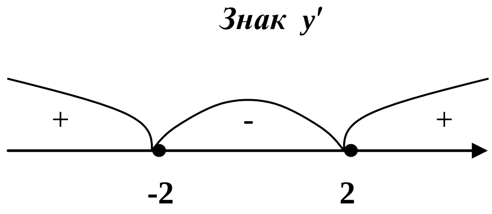
1. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x + 5$.

   1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; \infty)$.

   2) $f'(x) = x^2 - 4$.

3) Критичні точки: $f'(x)=0 \Rightarrow x^2-4=0,\ x=\pm 2$.

$f'(x)$ існує для всіх $x\in(-\infty;\infty)$.




4) При переході через точку $x=-2$ похідна змінює знак з « + » на « - », отже $x=-2$ - точка максимуму. При переході через точку $x=2$ похідна змінює знак з « - » на « + », тому $x=2$ - точка мінімуму.

5) $y_{max}=y(-2)=-\frac{8}{3}+8+5=10\frac{1}{3}$, $y_{min}=y(2)=\frac{8}{3}-8+5=-\frac{1}{3}$.

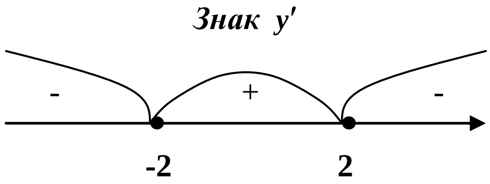
2. $f(x)=\frac{4x}{x^2+4}$.

1) Область визначення функції $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

2) $f'(x)=\frac{4(x^2+4)-4x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{4x^2+16-8x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{16-4x^2}{(x^2+4)^2}$.

3) Критичні точки: $f'(x)=0\Rightarrow 16-4x^2=0$ або $4-x^2=0$, звідки $x=\pm 2$.

$f'(x)$ існує для всіх $x\in(-\infty;\infty)$.




4) При переході через точку $x=-2$ похідна змінює знак з « - » на « + », тому точка $x=-2$ є точкою мінімуму. При переході через точку $x=2$ похідна змінює знак з « + » на « - ». Отже, точка $x=2$ є точкою максимуму.

5) $y_{min}=y(-2)=\frac{4\cdot(-2)}{(-2)^2+4}=-\frac{8}{16}=-\frac{1}{2}$, $y_{max}=y(2)=\frac{4\cdot 2}{2^2+4}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

3. $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x-3$.

1) Область визначення функції $D(f): x\in(-\infty;+\infty)$.

2) $f'(x)=x^2-3x+2$.

3) Критичні точки: $f'(x)=0\Rightarrow x^2-3x+2=0$, звідки $x_1=1$, $x_2=2$.

$f'(x)$ існує для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$.

Отже, стаціонарні точки є єдиними критичними точками функції, тому можна знайти екстремум за другим правилом.

4) $f''(x)=2x-3$.

$f''(1)<0$, тому $x_1=1$ - точка максимуму; $f''(2)>0$, тому $x_2=2$ - точка мінімуму.

5) $y_{max}=y(1)=-\dfrac{13}{6}$, $\quad y_{min}=y(2)=-\dfrac{7}{3}$.

4. $f(x)=\sqrt{e^{x^2}+1}$.

1) Область визначення функції $D(f): x\in(-\infty;+\infty)$.

2) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{e^{x^2}+1}}\cdot e^{x^2}\cdot 2x=\dfrac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+1}}$.

3) Критичні точки: $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+1}}=0$, звідки $x=0$.

$f'(x)$ існує для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$. Тобто $x=0$ є стаціонарною точкою.

4) $$f''(x)=\frac{\left(e^{x^2}+2x^2e^{x^2}\right)\cdot\sqrt{e^{x^2}+1}-xe^{x^2}\cdot\dfrac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+1}}}{e^{x^2}+1};$$

$f''(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$, тому $x=0$ - точка мінімуму.

5) $y_{min}=y(0)=\sqrt{2}$.

5. $f(x)=\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{8}{x^2}$.

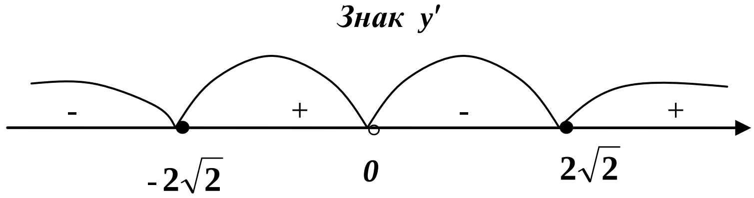
1) Область визначення $D(f): x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

2) $f'(x)=\dfrac{2x}{8}+8\cdot\left(-2x^{-3}\right)=\dfrac{x}{4}-\dfrac{16}{x^3}=\dfrac{x^4-64}{4x^3}$.

3) Критичні точки: $f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x^4-64=0$, звідки $x=\pm\sqrt[4]{64}=\pm2\sqrt{2}$.

$f'(x)$ існує на всій області визначення.

4) При переході через точки $x=\pm2\sqrt{2}$ похідна змінює знак з « - » на « + ». Отже, точки $x=\pm2\sqrt{2}$ є точками



мінімуму. При переході через точку $x=0$ похідна змінює знак, але $x=0\notin D(f)$, тому $x=0$ не є точкою екстремуму.

5) Так як функція $f(x)$ парна, то $y\left(-2\sqrt{2}\right)=y\left(2\sqrt{2}\right)=\dfrac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{8}+\dfrac{8}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=2$.

Маємо $y_{min}=2$.

6. $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$.

1) $D(f)\colon x\in(-\infty;\infty)$.

2) $f'(x)=1\cdot e^{-x^2}+x\cdot\left(-2xe^{-x^2}\right)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=e^{-x}\left(1-2x^2\right)$.

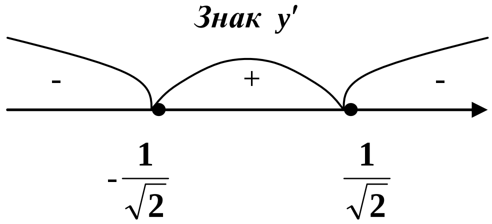
3) Критичні точки: $f'(x)=0\ \Rightarrow\ e^{-x}\left(1-2x^2\right)=0$.

Функція $y=e^{-x}$ приймає тільки додатні значення, причому, $e^{-x}\neq 0$.

Критичну точку знайдемо з умови: $1-2x^2=0$. Отримаємо $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$f'(x)$ існує для всіх $x\in(-\infty;\infty)$.

4) Функція має дві екстремальні точки: $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ - точка мінімуму; $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ - точка максимуму.




5) $y_{min}=y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$, $y_{max}=y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$.

7. $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{1-x}$.

1) Область визначення $D(f)\colon x\in(-\infty;\infty)$.

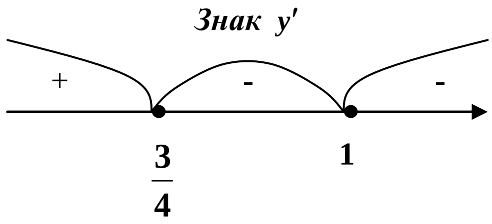
2) $f'(x)=1\cdot(1-x)^{\frac{1}{3}}+x\cdot\dfrac{1}{3}(1-x)^{-2/3}\cdot(-1)=\sqrt[3]{1-x}-\dfrac{x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\dfrac{3(1-x)-x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}=$

$=\dfrac{3-3x-x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\dfrac{3-4x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$.

3) Критичні точки: а) $f'(x)=0\ \Rightarrow\ 3-4x=0,\ x=\dfrac{3}{4}$;

б) $f'(x)$ не існує при $x=1\in D(f)$.

4) При переході через точку $x = \frac{3}{4}$ похідна змінює знак з « + » на « - », тому $x = \frac{3}{4}$ є точкою максимуму. При переході через точку $x = 1$ похідна не змінює свій знак. Отже, критична точка $x = 1$ не є екстремальною.




5) $y_{max} = y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$.

8. $f(x) = e^{-x} + e^{2x}$.

1) $D(f): x \in (-\infty; \infty)$.

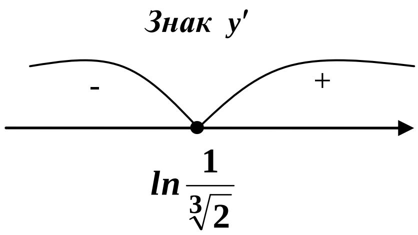
2) $f'(x) = -e^{-x} + 2e^{2x} = -\frac{1}{e^x} + 2e^{2x} = \frac{-1 + 2e^{3x}}{e^x}$.

3) Критичні точки:

а) $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2e^{3x} - 1 = 0$, тоді $e^{3x} = \frac{1}{2}$, звідки $x = \frac{1}{3} ln \frac{1}{2}$ або $x = ln \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

б) $f'(x)$ існує для всіх $x \in (-\infty; \infty)$.

4) При переході через точку $x = ln \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ похідна змінює знак з « - » на « + », тому $x = ln \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ - точка мінімуму.




5) $y_{min} = e^{-ln\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} + e^{2ln\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = e^{ln\sqrt[3]{2}} + e^{ln\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{8} + 1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

9. $f(x) = x^2 - 2 ln x$.

1) Область визначення $D(f): x \in (0; \infty)$.

2) $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$.

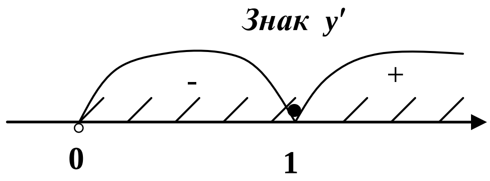
3) Критичні точки:

а) $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 1 = 0$, звідки $x = \pm 1$. Але $x = -1$ не входить в $D(f)$.

б) $f'(x)$ існує на всій області визначення.

4) При переході через точку $x = 1$ похідна змінює знак з « - » на « + », тому $x = 1$ - точка мінімуму.

5) $y_{min} = y(1) = 1 - 2\ln 1 = 1$.




10. $f(x) = x^3 + x^2 + 16x - 1$.

1) Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; \infty)$.

2) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 16$.

3) Критичні точки: а) $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x + 16 = 0$. $f'(x) \neq 0$ ($D < 0$);

б) $f'(x)$ існує на всій області визначення.

Отже, критичних точок немає і функція не має екстремумів.

### Завдання для самостійної роботи

Знайти екстремуми функцій:

1. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 8$;
2. $f(x) = \ln(x^2 + 16)$;
3. $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$;
4. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$;
5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x - 5)$.

## 3.3. Найбільше і найменше значення функції

При розв’язанні оптимізаційних задач велику роль відіграють задачі на знаходження найбільшого і найменшого значення.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку завжди знайдуться точки, в яких вона приймає найменше та найбільше значення. Цих значень функція досягає або в критичних точках, або на кінцях відрізка $[a; b]$.

Тому, щоб визначити найменше та найбільше значення функції на відрізку, треба:

- знайти критичні точки функції та відібрати ті з них, які належать заданому відрізку $[a;b]$;

- обчислити значення функції у відібраних критичних точках та на кінцях відрізка $[a;b]$;

- порівняти знайдені значення та відібрати найменше і найбільше з них.

### *Зразки розв'язування задач*

**Знайти найменше та найбільше значення функції на відрізку.**

1. $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-7x^2+24x+1, \quad [-5;2]$.

Функція визначена на всій множині дійсних чисел $D(y): x\in(-\infty;+\infty)$.

Зайдемо критичні точки функції: $y'=x^3-x^2-14x+24$.

$y'=0$: $x^3-x^2-14x+24=0$, $x^3-2x^2+x^2-2x-12x+24=0$, $x^2(x-2)+x(x-2)-12(x-2)=0$, $(x-2)(x^2+x-12)=0$ або $(x-2)(x+4)(x-3)=0$.

Маємо три критичні точки $x_1=2$, $x_2=-4$, $x_3=3$. Відрізку $[-5;2]$ належать лише точки $x_1=2$ та $x_2=-4$.

Обчислимо значення функції в цих точках та на кінцях відрізка.

$$y(-4)=(-4)\frac{(-4)^4}{4}-\frac{(-4)^3}{3}-7\cdot(-4)^2+24\cdot(-4)+1=-\frac{365}{3}=-121\frac{2}{3},$$

$$y(2)=\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}-7\cdot 2^2+24\cdot 2+1=\frac{67}{3}=22\frac{1}{3},$$

$$y(-5)=\frac{(-5)^4}{4}-\frac{(-5)^3}{3}-7\cdot(-5)^2+24\cdot(-5)+1=-96\frac{1}{12}.$$

Таким чином, функція набуває найменшого значення в критичній точці $x=-4$ всередині відрізка, де $y=-121\frac{2}{3}$, а найбільшого значення в критичній точці $x=2$, яка збігається з правим кінцем відрізка, при цьому $y=22\frac{1}{3}$.

2. $y = \sin 2x - x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$D(y): x \in (-\infty; \infty)$.

$y' = 2\cos 2x - 1$.

Критичні точки: $y' = 0$: $2\cos 2x - 1 = 0$, тобто $\cos 2x = \frac{1}{2}$, звідки

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in N$ , $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in N$.

Відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ належать точки $x = \pm\frac{\pi}{6}$.

$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$, $y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$,

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Отже, найменше значення функції $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$, найбільше $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, які функція набуває на кінцях відрізка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

***Зауваження.*** Якщо на деякому інтервалі функція має лише один екстремум, то в критичній точці вона досягає найменшого або найбільшого значення, дивлячись з того, буде ця точка точкою мінімуму чи максимуму.
У більшості таких задач дослідження на екстремум зручніше здійснювати за допомогою другої похідної.

3. $y = x^2 \ln x$.

Область визначення функції $D(y): x \in (0; \infty)$.

Знайдемо критичні точки:

$y' = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$.

$y' = 0$: $x(2\ln x + 1) = 0$, звідки $x = 0 \quad \notin D(y)$, або $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ - критична точка.

Дослідимо функцію на екстремум за допомогою другої похідної:

$$y'' = 2\ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 3. \quad y''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2\ln e^{-\frac{1}{2}} + 3 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 2.$$

Так як $y''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) > 0$, то в точці $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ функція має мінімум.

Отже, функція на області визначення має лише один екстремум, а саме – мінімум, тоді в цій точці вона досягає найменшого значення.

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{e}\right)^2}\ln\frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2e}.$$

4. Струмовий кабель складається з мідного дроту та ізоляції. Якщо через $x$ позначити відношення радіуса мідного дроту до товщини ізоляції, то швидкість телеграфування $v = A\,x\ln\frac{1}{x}$. При якому $x$ швидкість буде найбільшою?

Згідно з умовою задачі дослідимо функцію $v(x) = A\,x\ln\frac{1}{x}$ на екстремум та знайдемо її найбільше значення.

$D(v): x \in (0;\infty)$.

$$v'(x) = A\ln\frac{1}{x} + A\,x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = A\left(\ln\frac{1}{x} - 1\right).\, v'(x) = 0 : \ln\frac{1}{x} - 1 = 0, \quad \ln\frac{1}{x} = 1,$$

звідки $\frac{1}{x} = e$, $x = \frac{1}{e}$ - критична точка.

$$v''(x) = A\,x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{A}{x}, \quad v''\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{A}{1/e} = -A\,e < 0.$$

Отже, $x = \frac{1}{e}$ - точка максимуму. Ця точка єдина, звідси випливає, що при $x = \frac{1}{e}$ функція набуває найбільшого значення.

5. Залежність основних витрат $R$ на підприємстві від вартості продукції $p$ виражається формулою $R = ap + \frac{b}{c+p} + d$, де $a$, $b$, $c$, $d$ - сталі . Показати, що витрати мінімальні при $p = \sqrt{\frac{b}{a}} - c$.

Знайдемо критичні точки функції $R(p)=ap+\frac{b}{c+p}+d$.

$$R'=a-\frac{b}{(c+p)^2}. \qquad R'=0:\ a-\frac{b}{(c+p)^2}=0,\ \ \frac{b}{(c+p)^2}=a,\ \ (c+p)^2=\frac{b}{a},$$

$c+p=\sqrt{\frac{b}{a}}$, звідси $p_0=\sqrt{\frac{b}{a}}-c$ - критична точка.

Визначимо, чи має функція $R(p)$ екстремум в точці $p_0$.

$R''=\frac{2b}{c+p}$, $R''(p_0)=\frac{2b}{c+\sqrt{\frac{b}{a}}-c}=\frac{2b}{\sqrt{\frac{b}{a}}}>0$, тому $p_0$ - точка мінімуму.

Отже, в точці $p_0=\sqrt{\frac{b}{a}}-c$ функція $R(p)$ досягає найменшого значення.

Розглянемо декілька задач, в яких необхідно визначити найменше або найбільше значення функції, але, на відміну від попередніх прикладів, ця функція не задається у готовому вигляді, а визначається з умов задачі. В таких завданнях всі змінні, які випливають при складанні залежності, необхідно виразити через одну змінну.

6. На параболі $y^2=4x$ знайти точку, найближчу до точки $A(6;0)$.

Нехай точка $B(x,y)$ лежить на параболі. Відстань між точками $A$ і $B$:

$|AB|=\sqrt{(6-x)^2+y^2}$.

За умови, що $y^2=4x$, отримаємо функцію $d(x)$ залежності відстані між точками від абсциси точки $B$: $d(x)=\sqrt{(6-x)^2+4x}=\sqrt{x^2-8x+36}$.

Дослідимо отриману функцію на екстремум:

$$d'(x)=\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+36}}=\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+36}}.$$

$d'(x)=0$ при $x=4$.

Якщо $x<4$, то $d'(x)<0$, якщо $x>4$, то $d'(x)>0$. Отже, $x=4$ є точкою мінімуму і функція в цій точці має найменше значення. Тоді $y^2=16$, звідки $y=\pm 4$.

Поставленій в задачі умові задовольняють дві точки параболи: $B_1(4;-4)$ та $B_2(4;4)$.

7. Довести, що з усіх прямокутників, які мають даний периметр $2p$, найбільшу площу має квадрат.

Покладемо розміри прямокутника $x$ та $y$. За умовою $x+y=p$, звідки $y=p-x$. Площа прямокутника $S=xy=x(p-x)=px-x^2$.

Отримали функцію залежності площі від сторони прямокутника.

Знайдемо екстремум цієї функції: $S'(x)=p-2x$. $S'(x)=0: p-2x=0$, звідки $x=\frac{p}{2}$. $S''(x)=-2<0$.

Так як друга похідна від'ємна, то при $x=\frac{p}{2}$ функція має максимум і набуває найбільшого значення. Тоді $y=p-\frac{p}{2}=\frac{p}{2}$, тобто такий прямокутник – квадрат.

8. Необхідно виготовити закритий циліндричний бак об'ємом $V$. Якими повинні бути його розміри, щоб на виготовлення пішло якомога менше матеріалу?

Введемо параметри циліндра: радіус основи $R$ та висоту $H$. Вони пов'язані між собою заданим об'ємом $V=\pi R^2 H$, звідки $H=\frac{V}{\pi R^2}$.

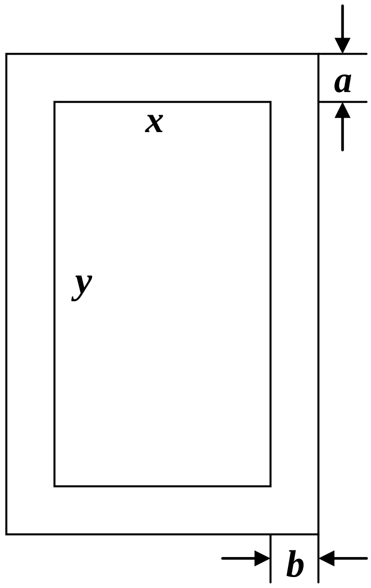
Площа поверхні циліндра: $S=2S_{осн}+S_{біч}=2\pi R^2+2\pi RH$.

Підставивши у вираз співвідношення $H=\frac{V}{\pi R^2}$, одержимо функцію залежності поверхні циліндра від радіуса основи $S(R)$:

$$S(R)=2\pi R^2+2\pi R\cdot\frac{V}{\pi R^2}=2\pi R^2+\frac{2V}{R}.$$

Критичні точки цієї функції: $S'(R)=4\pi R-\frac{2V}{R^2}$. $S'(R)=0$: $\frac{2V}{R^2}=4\pi R$, $R^3=\frac{V}{2\pi}$, тоді $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Визначимо вид екстремуму в критичній точці: $S''(R) = 4\pi + \frac{4V}{R^3}$,




$$S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0.$$

Друга похідна в критичній точці додатна, тому $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ є точкою мінімуму і в цій точці функція має найменше значення.

Тоді розміри циліндра: $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $H = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

9. На сторінці книжки друкований текст повинен займати $S$ см$^2$. Верхнє і нижнє поля мають бути по $a$ см, праве і ліве – по $b$ см. При яких розмірах сторінки на неї піде найменше паперу?
Нехай ширина та висота друкованої частини аркушу дорівнюють відповідно $x$ см та $y$ см. Тоді розмір самого аркушу $(x+2b)$ см та $(y+2a)$ см.

За умовою $xy = S$, звідки $y = \frac{S}{x}$. Складемо функцію $f(x)$ залежності площі аркуша від його ширини:

$$f(x) = (x+2b)(y+2a) = (x+2b)\left(\frac{S}{x} + 2a\right) = S + \frac{2bS}{x} + 2ax + 4ab.$$

Дослідимо цю функцію на екстремум: $f'(x) = -\frac{2bS}{x^2} + 2a$. $f'(x) = 0$:

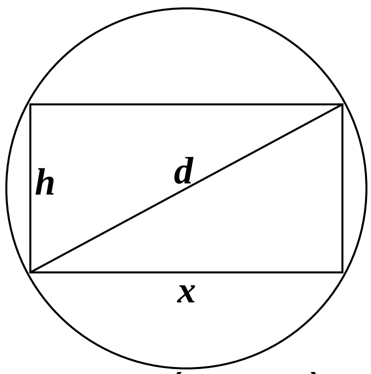
$\frac{2bS}{x^2} = 2a$, $x^2 = \frac{bS}{a}$, звідки $x = \pm\sqrt{\frac{bS}{a}}$.

Так як $x > 0$, то маємо одну критичну точку $x = \sqrt{\frac{bS}{a}}$.

Визначимо вид екстремуму в цій точці: $f''(x) = \frac{4bS}{x^3}$,

$f''\left(\sqrt{\frac{Sb}{a}}\right) = 4bS \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{Sb}{a}\right)^3}} > 0$, тому $x = \sqrt{\frac{Sb}{a}}$ - точка мінімуму і функція має в цій точці найменше значення. Тоді $y = \frac{S}{x} = \sqrt{\frac{Sa}{b}}$. Розміри сторінки мають бути: $\left(2b + \sqrt{\frac{Sb}{a}}\right)$ та $\left(2a + \sqrt{\frac{Sa}{b}}\right)$ сантиметрів.

10. При заданій довжині міцність балки прямокутного перерізу пропорційна ширині і квадрату висоти. З циліндричного стовбура дерева діаметром $d$ треба вирізати балку найбільшої міцності. Визначити ширину та висоту балки.




Позначимо ширину балки $x$, а висоту $h$ $(x > 0, h > 0)$. Розміри балки пов'язані з діаметром стовбура теоремою Піфагора: $d^2 = h^2 + x^2$, звідки $h^2 = d^2 - x^2$.

Залежність між міцністю балки та її розмірами можна визначити функцією $f(x,h) = k\,x\,h^2$, або $f(x) = kx\left(d^2 - x^2\right) = k\left(d^2 x - x^3\right)$, де $k$ - коефіцієнт пропорційності $(k > 0)$.

Дослідимо функцію $f(x)$ на екстремум: $f'(x) = k\left(d^2 - 3x^2\right)$.

Критичні точки: $f'(x) = 0$ або $d^2 - 3x^2 = 0$, $x^2 = \frac{d^2}{3}$. Враховуючи, що $x > 0$, маємо одну критичну точку $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

$f''(x) = -6k\,x$, $f''\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = -6k \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} < 0$, тому $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ - точка максимуму, а функція $f(x)$ досягає в цій точці найбільшого значення.

Визначимо висоту балки: $h^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2d^2}{3}$, $h = \sqrt{\frac{2}{3}}\,d$.

Балка найбільшої міцності матиме ширину $\frac{d}{\sqrt{3}}$ та висоту $\sqrt{\frac{2}{3}}\,d$.

**Завдання для самостійної роботи**

1. Знайти найбільше та найменше значення функцій на відрізку:

а) $y = x - 4\sqrt{x} + 1$, $\quad [1;9]$;

б) $y = 2tgx - tg^2 x$, $\quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Число 16 розкласти на два доданки так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

3. Серед рівнобедрених трикутників з бічною стороною $a$ знайти трикутник максимальної площі.

4. Якою має бути висота конуса, вписаного в кулю радіуса $R$,щоб його бічна поверхня була найбільшою?

5. На гіперболі $xy = 4$ знайти точку, сума квадратів координат якої була б найменшою.

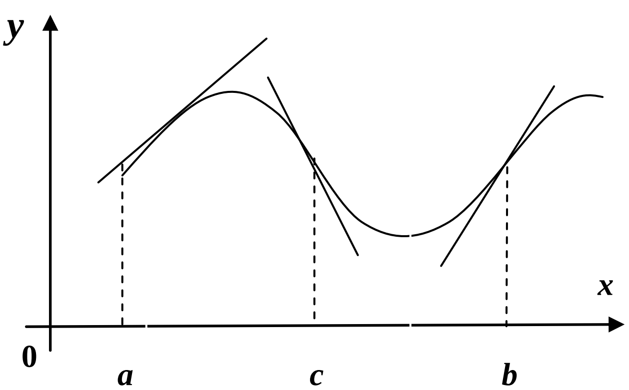
6. Визначити, яким має бути опір $r$ електронагрівного приладу, ввімкнутого в коло струму опору $R$, для того, щоб у ньому виділялась максимальна кількість теплоти, якщо $Q = \dfrac{rE^2}{(R+r)^2}$.

## 3.4. Опуклість і угнутість кривих. Точки перегину

Крива $y = f(x)$ називається ***опуклою*** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Крива $y = f(x)$ називається ***угнутою*** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

***Точкою перегину*** називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від угнутої.



На рисунку крива опукла на $(a,c)$, угнута на $(c,b)$, $x=c$ - точка перегину.

Опуклість і угнутість кривої, яка є графіком функції $y=f(x)$, характеризується знаком її другої похідної: якщо в деякому інтервалі $f''(x)<0$, то крива ***опукла*** на цьому інтервалі, а якщо $f''(x)>0$, то крива ***угнута*** на цьому інтервалі.

Інтервали опуклості і угнутості можуть відділятися один від одного або точками, де друга похідна дорівнює нулю, або точками, де друга похідна не існує. Ці точки називаються ***критичними точками II роду.***

Якщо при переході через критичну точку II роду $x_0$ друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то графік функції має точку перегину $(x_0; f(x_0))$.

Правило знаходження точок перегину графіка функції $y=f(x)$:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти критичні точки II роду функції $y=f(x)$;
3) дослідити знак $f''(x)$ в інтервалах, на які критичні точки ділять область визначення функції $f(x)$. Якщо критична точка $x_0$ поділяє інтервали, де $f''(x)$ різних знаків, то $x_0$ є абсцисою точки перегину графіка функції;
4) обчислити значення функції в точках перегину.

***Зразки розв'язування задач***

**Знайти точки перегину і інтервали опуклості та угнутості графіків функцій.**

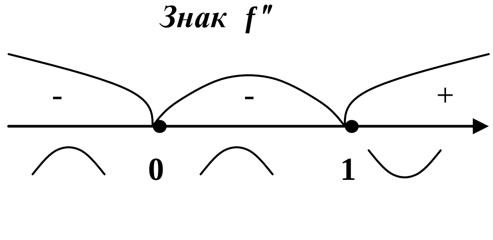
1. $f(x)=3x^5-5x^4+4$.

1) Область визначення $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

2) Критичні точки II роду: $f'(x)=15x^4-20x^3$; $f''(x)=60x^3-60x^2$.

а) $f''(x)=0 \Rightarrow 60x^3-60x^2=0$ або $x^3-x^2=0$. Маємо $x^2(x-1)=0$, звідки $x=0,\ x=1$.

б) $f''(x)$ існує на всій області визначення.



3) $f''(x) > 0$ при $x \in (1;\infty)$; $f''(x) < 0$ при $x \in (-\infty;0) \cup (0;1)$.

Отже, на інтервалі $(1;\infty)$ крива угнута. Враховуючи, що в точці $x = 0$ функція неперервна, робимо висновок, що крива опукла на інтервалі $(-\infty;1)$. При переході через точку $x = 1$ друга похідна змінює знак, тому $x = 1$ - точка перегину. В точці $x = 0$ перегину немає.

4) $f(1) = 3 - 5 + 4 = 2$. $(1;2)$ - точка перегину.

2. $f(x) = 2x^3 - x^4 + 36x^2 - 100$.

1) $D(f): x \in (-\infty;\infty)$.

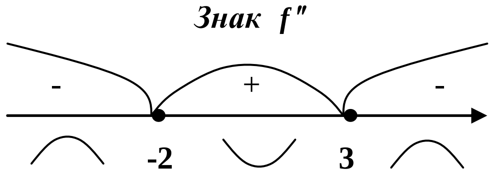
2) Критичні точки ІІ роду: $f'(x) = 6x^2 - 4x^3 + 72x$; $f''(x) = 12x - 12x^2 + 72$.

а) $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; -12x^2 + 12x + 72 = 0$ або $x^2 - x - 6 = 0$, звідки $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

б) $f''(x)$ існує для всіх $x \in (-\infty;\infty)$.

3) Крива опукла на інтервалах $(-\infty;-2)$ і $(3;\infty)$, угнута на інтервалі $(-2;3)$.

В точках $x = -2$ і $x = 3$ графік має перегин.




4) $f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - (-2)^4 + 36 \cdot (-2)^2 - 100 = 12$.

$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 3^4 + 36 \cdot 3^2 - 100 = 197$. $(-2;12)$ і $(3;197)$ - точки перегину.

3. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty;\infty)$.

2) Критичні точки ІІ роду: $f'(x) = \dfrac{1(1 + x^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$;

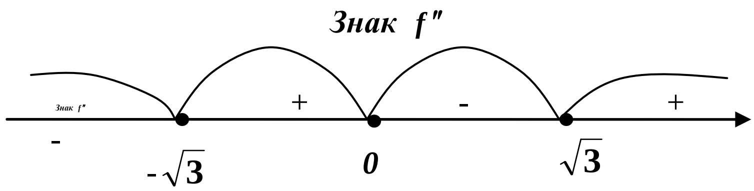
$$f''(x) = \frac{-2x(1 + x^2)^2 - (1 - x^2) \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = \frac{(1 + x^2)\left[-2x(1 + x^2) - 4x(1 - x^2)\right]}{(1 + x^2)^4} =$$

$$= \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1 + x^2)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3}.$$

а) $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x^3 - 6x = 0$, $x(x^2 - 3) = 0$, звідки $x = 0$ або $x = \pm\sqrt{3}$;

б) $f''(x)$ існує для всіх $x \in D(f)$.

3) Крива опукла на інтервалах $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ і $\left(0;\sqrt{3}\right)$, угнута на інтервалах $\left(-\sqrt{3};0\right)$ і $\left(\sqrt{3};\infty\right)$. В точках $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ графік має перегини.




4) $f(0)=0$. $f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $\quad f\left(-\sqrt{3}\right)=\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$.

$(0;0)$; $\left(\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$; $\left(-\sqrt{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ - точки перегину.

4. $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}$.

1) Область визначення: $x \neq -1$.

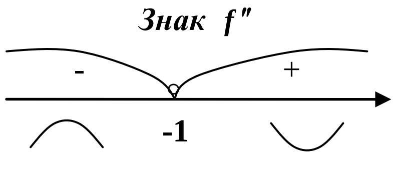
$D(f)\colon x \in (-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.

2) Критичні точки ІІ роду: $f'(x)=-3(x+1)^{-4}$; $\quad f''(x)=12(x+1)^{-5}=\dfrac{12}{(x+1)^5}$.

а) $f''(x)\neq 0$; б) $f''(x)$ не існує при $x=-1$, але $x=-1 \notin D(f)$.

Критичних точок ІІ роду немає, графік не має точок перегину.

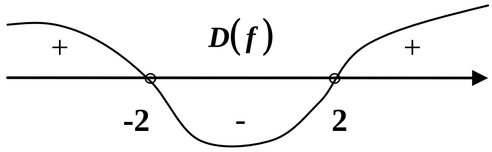
3) Крива опукла на інтервалі $(-\infty;-1)$, угнута на інтервалі $(-1;\infty)$.




5. $f(x)=1-\ln\left(x^2-4\right)$.

1) Область визначення функції: $x^2-4>0$.

$D(f)\colon x \in (-\infty;-2)\cup(2;\infty)$.




2) Критичні точки ІІ роду:

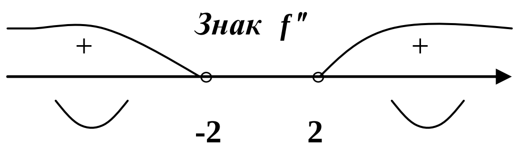
$$f'(x)=-\frac{1}{x^2-4}\cdot 2x=-\frac{2x}{x^2-4};$$

$$f''(x)=\frac{-2\left(x^2-4\right)+2x\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-2x^2+8+4x^2}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{2x^2+8}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

а) $f''(x)\neq 0$, тому що $2x^2+8\neq 0$; б) $f''(x)$ існує на всій області визначення.

Критичних точок немає. Отже, немає і перегинів графіка.

3) Графік функції угнутий на всій області визначення.




6. $f(x)=3+\sqrt[3]{x+2}$.

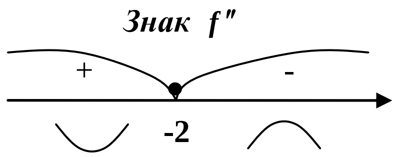
1) Область визначення $D(f)\colon x\in(-\infty;\infty)$.

2) Критичні точки II роду:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x+2)^{-2/3};\quad f''(x)=-\frac{2}{9}(x+2)^{-5/3}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}.$$

а) $f''(x)\neq 0$; б) $f''(x)$ не існує при $x=-2\in D(f)$, тому $x=-2$ - критична точка.

3) Крива опукла на інтервалі $(-2;\infty)$, угнута на інтервалі $(-\infty;-2)$. При $x=-2$ графік має перегин.




4) $f(-2)=3$. $(-2;3)$ - точка перегину.

7. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$.

1) Область визначення: $x^2-4\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq\pm 2$.

$D(f)\colon x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$.

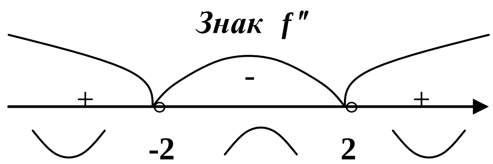
2) Критичні точки II роду: $f'(x)=-\dfrac{1}{\left(x^2-4\right)^2}\cdot 2x=-\dfrac{2x}{\left(x^2-4\right)^2}$;

$$f''(x)=\frac{-2\left(x^2-4\right)^2+2x\cdot 2\left(x^2-4\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^4}=\frac{\left(x^2-4\right)\left[-2\left(x^2-4\right)+8x^2\right]}{\left(x^2-4\right)^4}=\frac{6x^2+8}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

а) $f''(x)\neq 0$, тому що $6x^2+8\neq 0$; б) $f''(x)$ існує для всіх $x\in D(f)$.

Критичних точок немає. Отже, немає і перегинів графіка.

3) Крива опукла на інтервалі $(-2;0)$, угнута на інтервалах $(-\infty;-2)$ і $(2;\infty)$.



### Завдання для самостійної роботи

Знайти точки перегину і інтервали опуклості та угнутості графіків функцій.

1. $f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3$;
2. $f(x)=(x+1)\cdot e^{x+1}$;
3. $f(x)=\sqrt[3]{x^5}-2$;
4. $f(x)=\frac{3x-2}{5x}$;
5. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

## 3.5. Асимптоти кривих

Пряма називається ***асимптотою кривої***, якщо точка кривої необмежено наближується до неї при віддаленні її від початку координат. Розрізняють вертикальні, похилі (горизонтальні) асимптоти.

**а) Вертикальні асимптоти.**

Графік функції $y=f(x)$ при $x\to a$ має вертикальну асимптоту, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ або $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$; при цьому точка $x=a$ є точкою розриву II роду. Рівняння вертикальної асимптоти має вигляд $x=a$.

**б) Похилі асимптоти.**

Рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$, де $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$, якщо ці границі існують і скінченні.

Слід окремо розглянути випадки, коли $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$.

### *Зразки розв'язування задач*

**Знайти асимптоти кривих**.

1. $y=x+\frac{1}{x}$.

а) $D(y)$**:** $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

В точці $x=0$ функція має розрив II роду, тому що $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\pm\infty$.

Отже, $x=0$ - вертикальна асимптота.

б) Знайдемо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0 \ .$$

Тоді $y=x$ - похила асимптота.

2. $y=\dfrac{5x}{x^2-4}$.

а) Область визначення функції: $x^2-4\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 2$.

$D(y)\colon x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$.

В точках $x=\pm 2$ функція має розриви II роду, тому що $\lim\limits_{x\to\pm 2\pm 0}\dfrac{5x}{x^2-4}=\pm\infty$.

Тому графік має дві вертикальні асимптоти $x=-2$ та $x=2$.

б) Знайдемо похилі асимптоти:

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5}{x^2-4}=0$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{5x}{x^2-4}\right)=0$. Тоді $y=0$ - горизонтальна асимптота.

3. $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$.

а) Область визначення функції: $x-3\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq 3$.

$D(y)\colon x\in(-\infty;3)\cup(3;\infty)$

Обчислимо $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}=\mp\infty$, тому $x=3$ - точка розриву II роду.

Отже, $x=3$ - вертикальна асимптота.

б) Похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-6+\frac{3}{x}}{x-3}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-6x+3}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-6x+3-x^2+3x}{x-3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x+3}{x-3}=-3.$$

Маємо: $y=x-3$ - похила асимптота.

4. $y = xe^x$.

а) Область визначення функції $D(y): x \in (-\infty;+\infty)$.

Точок розриву II роду немає, тому графік функції не має вертикальних асимптот.

б) Знайдемо похилі асимптоти:

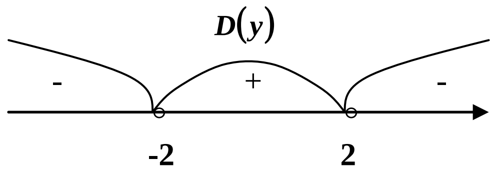
$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \to \infty} e^x = \infty, \qquad k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

При $k_1$ (коли $x \to +\infty$) похилої асимптоти не існує. Знайдемо $b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(xe^x\right) = \{\infty \cdot 0\}$. Щоб обчислити границю, перетворимо вираз $xe^x$ до вигляду $\dfrac{x}{e^{-x}}$. Тоді маємо невизначеність $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, до якої можна застосувати правило Лопіталя, а саме: $b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = 0$. Маємо: $y = 0$ - горизонтальна асимптота.

5. $y = ln\left(4 - x^2\right)$.

а) Область визначення функції: $4 - x^2 > 0$. $D(y): x \in (-2;2)$.




Обчислимо $\lim\limits_{x \to -2+0} ln\left(4 - x^2\right) = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to 2-0} ln\left(4 - x^2\right) = -\infty$. В точках $x = \pm 2$ функція має розрив II роду. Отже, $x = -2$ та $x = 2$ - вертикальні асимптоти.

б) Похилих асимптот немає, тому що неможливо обчислити коефіцієнти $k$ і $b$ (функція не визначена при $x \to \pm\infty$).

## Завдання для самостійної роботи

Знайти асимптоти кривих:

1. $y = 12x - x^3$;
2. $y = \dfrac{x^2}{x+3}$;
3. $y = e^{-x^2}$;
4. $y = \dfrac{2x}{x+2}$;
5. $y = \dfrac{ln\,x}{x}$;
6. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;
7. $y = \dfrac{4}{1+x^2}$.

## 3.6. Схема дослідження функції та побудова її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти (якщо можна) точки перетину графіка з координатними осями;
3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
4) знайти точки розриву та дослідити їх;
5) знайти інтервали монотонності, точки екстремумів та значення функції в цих точках;
6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;
7) знайти асимптоти кривої;
8) побудувати графік функції.

### *Зразки розв'язування задач*

**Дослідити функції та побудувати їхні графіки.**

1. $y = x^3 - 3x^2$.

   1) Функція є многочленом, область існування якого – вся множина дійсних чисел. $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

   2) Знайдемо точки перетину графіка с віссю $Ox$, для цього покладемо $y = 0$: $x^3 - 3x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2(x-3) = 0$, звідки $x_1 = 0,\ x_2 = 3$. Отже, в точках $O(0;0)$ та $A(3;0)$ графік перетинає вісь $Ox$.

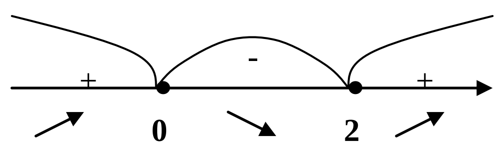
      Точки перетину з віссю $Oy$: покладемо $x = 0$, тоді знайдемо $y = 0$. Тобто, графік перетинає вісь $Oy$ у точці $O(0;0)$.

   3) Функція не періодична, вона не є парною, не є непарною $\left(y(-x) \neq y(x)\right.$ та $\left.y(-x) \neq -y(x)\right)$.

   4) Функція є неперервною на всій числовій прямій. Тобто точок розриву не має.

   5) Досліджуємо функцію на монотонність та екстремум. Обчислимо $y' = 3x^2 - 6x$. Знайдемо критичні точки з рівняння $y' = 0$: $3x^2 - 6x = 0$

*Знак* $y'$



або $3x(x-2)=0$. Отримаємо, що $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$.

Функція зростає на інтервалах $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; функція спадає на інтервалі $(0;2)$.

Згідно з правилом знаходження екстремуму, $x=0$ - точка максимуму, $x=2$ - точка мінімуму.

Обчислимо $y_{max} = y(0) = 0$, $y_{min} = y(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 = -4$.

Таким чином, екстремальні точки: $O(0;0)$ та $B(2;-4)$.

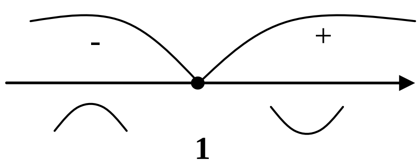
6) Знайдемо інтервали вгнутості та опуклості, точки перегину.

$y'' = \left(3x^2 - 6x\right)' = 6x - 6$.

Розв'яжемо рівняння $y'' = 0:\ 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ - критична точка другого роду.

Функція вгнута на інтервалі $(1;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;1)$. Значення $x=1$ є абсцисою точки перегину. Знайдемо $y(1) = 1 - 3 = -2$, тобто точка $C(1;-2)$ - точка перегину графіка.

*Знак* $y''$



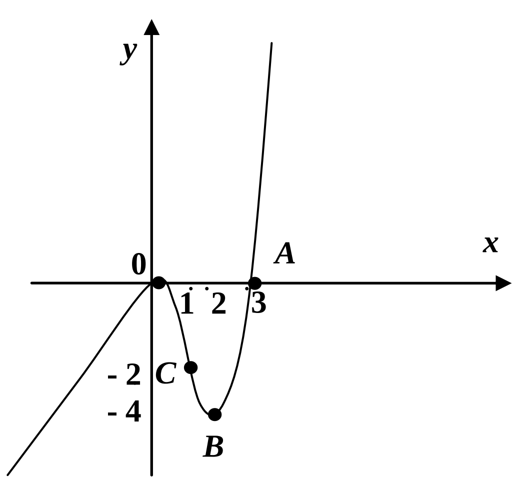

7) Знайдемо асимптоти заданої кривої.

Вертикальних асимптот немає. З'ясуємо, чи є похилі асимптоти.

Обчислимо $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3x^2 - 6x\right) = +\infty$.

Отже, наша крива не має і похилих асимптот.

8) Побудуємо графік функції.



2. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

1) $D(y)$: $x \neq 0$, тобто $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

2) Точки перетину графіка з координатними осями. При $y = 0$: $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow$

$\frac{x^2+4}{2x} = 0$, звідки $x^2 + 4 \neq 0$, тобто з віссю $Ox$ графік не перетинається. Зважаючи на те, що $x \neq 0$, робимо висновок, що графік не перетинає вісь $Oy$.

3) Функція не періодична, вона непарна бо $y(-x) = -\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) =$

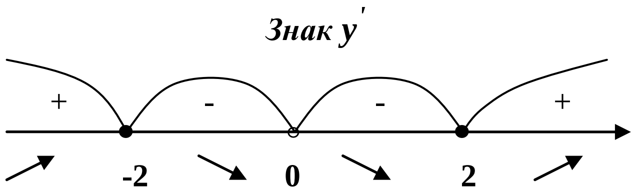
$= -y(x)$. Тому її графік є симетричним відносно початку координат.

4) В точці $x = 0$ функція має розрив ІІ-го роду, тому що $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0}\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 0 \pm 0} \frac{x^2+4}{2x} = \pm\infty$. Отже, пряма $x = 0$ - вертикальна асимптота.

5) Знайдемо $y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$. Розв'яжемо рівняння $y' = 0$: $\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = 0$, $x^2 = 4$,

звідки $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ - критичні точки функції. Похідна не існує при $x = 0 \notin D(y)$.



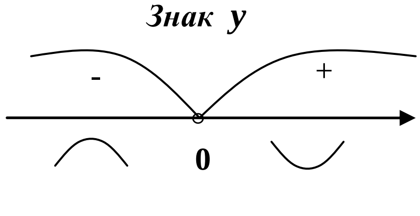

Функція зростає на інтервалах $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$; функція спадає на інтервалі $(-2;2)$.

$x = -2$ - точка максимуму функції, а $x = 2$ - точка мінімуму.

Обчислимо $y_{max} = y(-2) = -1 - 1 = -2$, $y_{min} = y(2) = 1 + 1 = 2$.

Отже, $A_1(-2;-2)$, $A_2(2;2)$ - екстремальні точки.

6) Знайдемо $y'' = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}\right)' = \frac{4}{x^3}$.




Зважаючи на те, що $y'' = \frac{4}{x^3} \neq 0$, робимо висновок, що точок перегину графік функції не має. Функція угнута на інтервалі $(0;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;0)$.

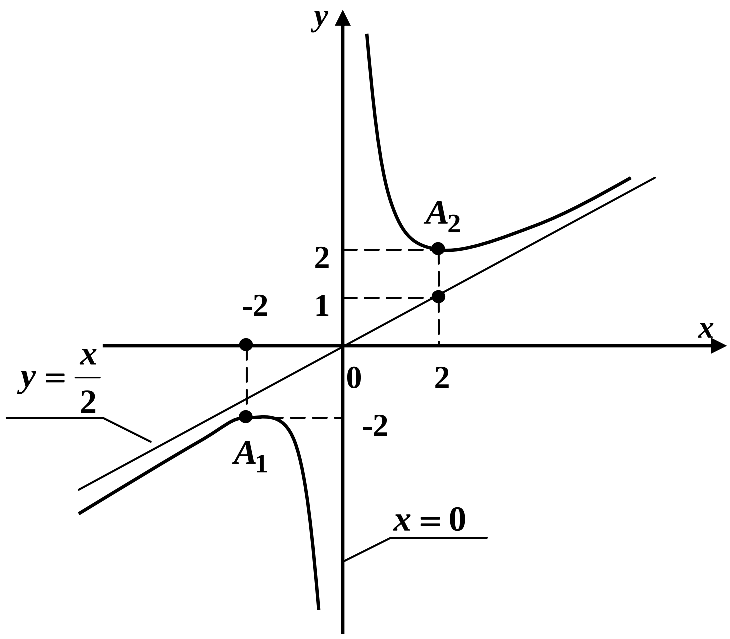
7) Вертикальну асимптоту ми вже знайшли: $x = 0$. Знайдемо похилу асимптоту.

Обчислимо $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left( \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x^2} \right) = \dfrac{1}{2}$,

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - k \cdot x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left( \frac{x}{2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Тоді пряма $y = \dfrac{x}{2}$ - похила асимптота.

8) Побудуємо графік.




3. $y = ln\left(x^2 + 4\right)$.

1) $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

2) Розглянемо перетин графіка з координатними осями.

З віссю $0y: x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = ln 4 \approx 1{,}4$, тобто у точці $A(0; ln 4)$ графік перетинає вісь $0y$. З віссю $0x: y = 0 \quad \Rightarrow \quad ln\left(x^2 + 4\right) = 0$, звідки $x^2 + 4 = 1$ або $x^2 = -3$. Зрозуміло, що остання рівність розв'язків не має. Отже, графік не перетинає вісь $0x$.

3) Функція не періодична, але є парною, бо $y(-x) = ln\left(x^2 + 4\right) = y(x)$, тому її графік є симетричним відносно осі $0y$.

4) Точок розриву функція не має.

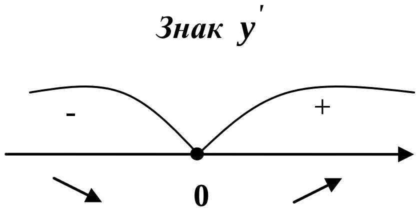
5) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$. Знайдемо критичні точки: $\dfrac{2x}{x^2 + 4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$.

Функція зростає на інтервалі $(0;+\infty)$ та спадає на інтервалі $(-\infty;0)$.

Точка $x=0$ є точкою мінімуму функції.

Обчислимо $y_{min}=y(0)=ln4 \approx 1{,}4$.

Тобто точка екстремуму нашої функції $A(0;1{,}4)$.

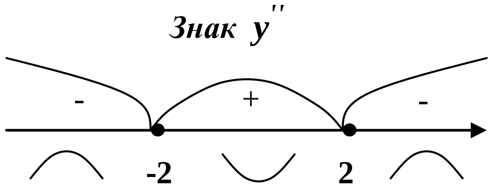



6) Знайдемо $y''=\left(\dfrac{2x}{x^2+4}\right)'=\dfrac{2(x^2+4)-2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$.

Дослідимо функцію на угнутість та опуклість.

$$y''=0:\ \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}=0 \Rightarrow 8-2x^2=0,\ x^2=4,$$

звідки $x_1=-2, x_2=2$ - критичні точки.




Функція угнута на інтервалі $(-2;2)$, опукла на інтервалах $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$. У точках $x_1=-2$, $x_2=2$ функція має перегин графіка.

Знайдемо $y(-2)=ln8 \approx 2{,}1$, $y(2)=ln8 \approx 2{,}1$.

Отже, $C_1(-2;ln8)$, $C_2(2;ln8)$ - точки перегину.

7) Вертикальних асимптот графік не має.

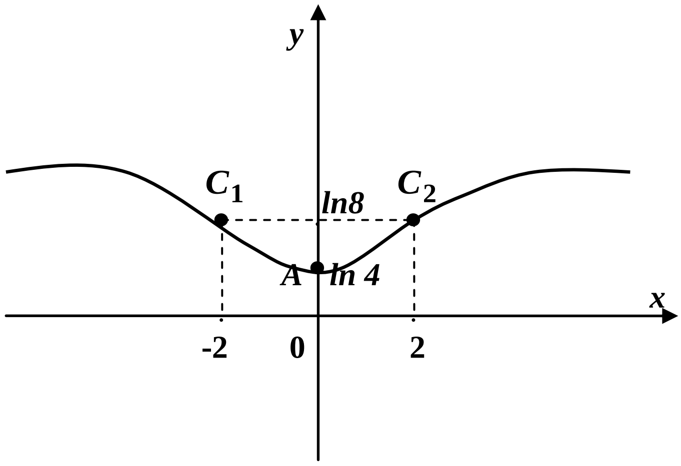
Для похилих асимптот знайдемо $k$ і $b$.

Будемо мати: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ln(x^2+4)}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x^2+4}=0,$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}ln(x^2+4)=+\infty.$$

Отже, похилих асимптот не буде.

8) Будуємо графік.



4. $y = x \cdot e^{-x}$.

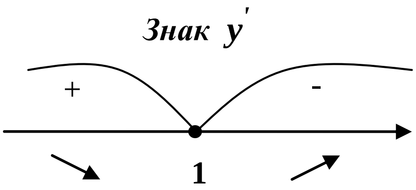
1) $D(y)\colon x \in (-\infty;+\infty)$.

2) Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Знайшли, що графік перетинає вісь $0y$ у точці $O(0;0)$. Якщо $y = 0$, то $x \cdot e^{-x} = 0$, звідки $e^{-x} \neq 0$, тому $x = 0$. Знову отримали ту саму точку $O(0;0)$, в якій графік перетинає вісь $0x$. З'ясовано , що тільки у початку координат графік перетинає обидві координатні осі.

3) Функція не періодична, не є парною або непарною $(y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x))$.

4) Функція неперервна в області визначення, тому точок розриву не має.

5) Обчислимо $y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$.




З умови $y' = 0$ знайдемо критичні точки.

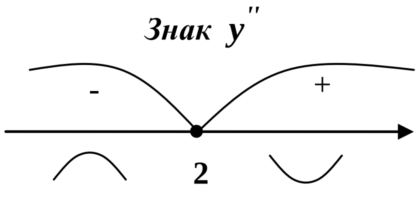
Будемо мати: $e^{-x}(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x} \neq 0$, тому $1 - x = 0$, звідки $x = 1$.

Функція зростає на інтервалі $(-\infty;1)$ та спадає на інтервалі $(1;+\infty)$. Зрозуміло, що $x = 1$ - точка максимуму функції. $y_{max} = y(1) = 1 \cdot e^{-1} = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}4$.

Точка $B\left(1;\dfrac{1}{e}\right)$ - екстремальна точка функції.

6) Знайдемо $y'' = \left(e^{-x} - xe^{-x}\right)' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$.

Тоді $y'' = 0\colon e^{-x}(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x} \neq 0$, тому $x - 2 = 0$, звідки $x = 2$ - критична точка функції.




Функція вгнута на інтервалі $(2;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;2)$.

Отже, у точці $x = 2$ функція має перетин.

$y(2) = 2 \cdot e^{-2} = \dfrac{2}{e^2} \approx 0{,}3$.

Тому $A\left(2;\dfrac{2}{e^2}\right)$ - точка перетину графіка функції.

7) Вертикальної асимптоти графік функції не має.

Для похилих асимптот знайдемо $k$ і $b$.

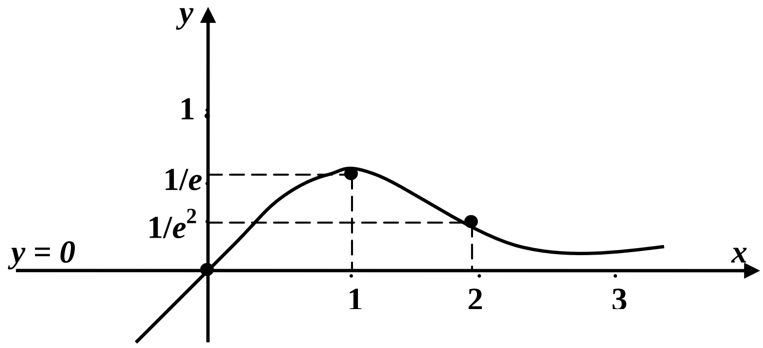
Отримаємо: $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$,

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Тому $y = 0$ - пряма, яка співпадає з віссю $0x$, буде горизонтальною асимптотою.

У випадку, коли $x \to -\infty$: $k = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$, тому ніякої асимптоти не буде.

8) Будуємо графік.




5. $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

1) Оскільки задана функція дробово-раціональна, то вона не існує в тих точках, де знаменник дорівнює нулю: $x^2 - 1 = 0$, звідки $x_{1,2} = \pm 1$.

Отже, $D(y)$: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Нехай $y = 0$, тоді $\frac{x^3}{x^2 - 1} = 0$, звідки $x = 0$.

Нехай $x = 0$, тоді $y = 0$. Отже, графік перетинає обидві координатні осі в точці $O(0;0)$, тобто проходить через початок координат.

3) Функція не періодична, вона непарна, тому що $y(-x) = \frac{-x^3}{(-x)^2 - 1} =$

$$= -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -y(x).$$

Її графік є симетричним відносно початку координат.

4) Маємо дві точки розриву II-го роду: $x_1 = -1$ та $x_2 = -1$, тому що

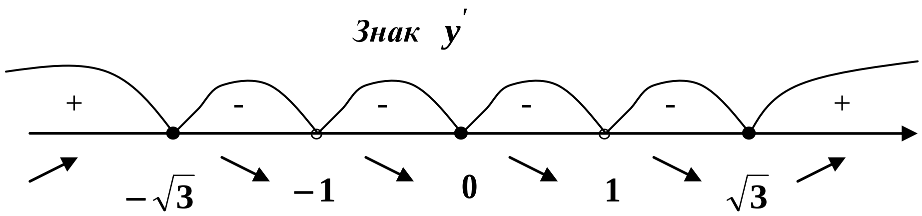
$$\lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \pm\infty \text{ та } \lim_{x \to 1 \pm 0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \pm\infty .$$

Отже, прямі $x=-1$ та $x=1$ є вертикальними асимптотами.

5) Знайдемо $y' = \dfrac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \dfrac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = \dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Розв'яжемо рівняння $y'=0:\ \dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=0$, звідки $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$ - критичні точки функції.

Помітимо, що похідна не існує при $x=\pm 1$, але вони обидві не входять до області визначенності функції.




Функція зростає на інтервалах $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$, функція спадає на інтервалах $\left(-\sqrt{3};-1\right)\cup\left(-1;0\right)\cup\left(0;1\right)\cup\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Похідна змінює знак при переході через точки $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$. А саме: $x_2=\sqrt{3}$ є точкою мінімуму функції, а $x_3=-\sqrt{3}$ - точкою максимуму.

$$y_{min}=y\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3^3}}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}}{2},\quad y_{max}=y\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, екстремальні точки $A_1\left(\sqrt{3};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_2\left(-\sqrt{3};-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

6) Обчислимо

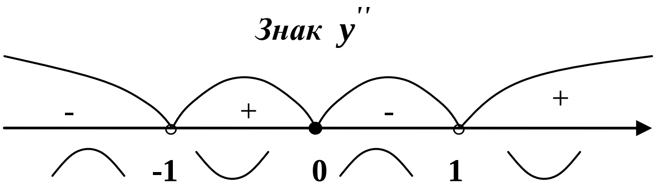
$$y''=\left(\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(4x^3-6x\right)\cdot\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-3x^2\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(2x^2-3\right)\cdot\left(x^2-1\right)^2-4x^3\cdot\left(x^2-3\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\left[\left(2x^2-3\right)\cdot\left(x^2-1\right)-2x^2\cdot\left(x^2-3\right)\right]}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2x\cdot\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Розв'яжемо рівняння $y'' = 0: \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0$, звідки $2x(x^2+3) = 0$, а саме $x = 0$ - це критична точка функції.

Помічаємо, що $y''$ не існує при $x = \pm 1 \notin D(y)$.




Функція вгнута на інтервалах $(-1;0)\cup(1;+\infty)$, функція опукла на інтервалах $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ .

При переході через $x=0$ $y''$ змінює знак.

$y(0) = \dfrac{0}{0-1} = 0$.Точка $O(0;0)$ є точкою перегину.

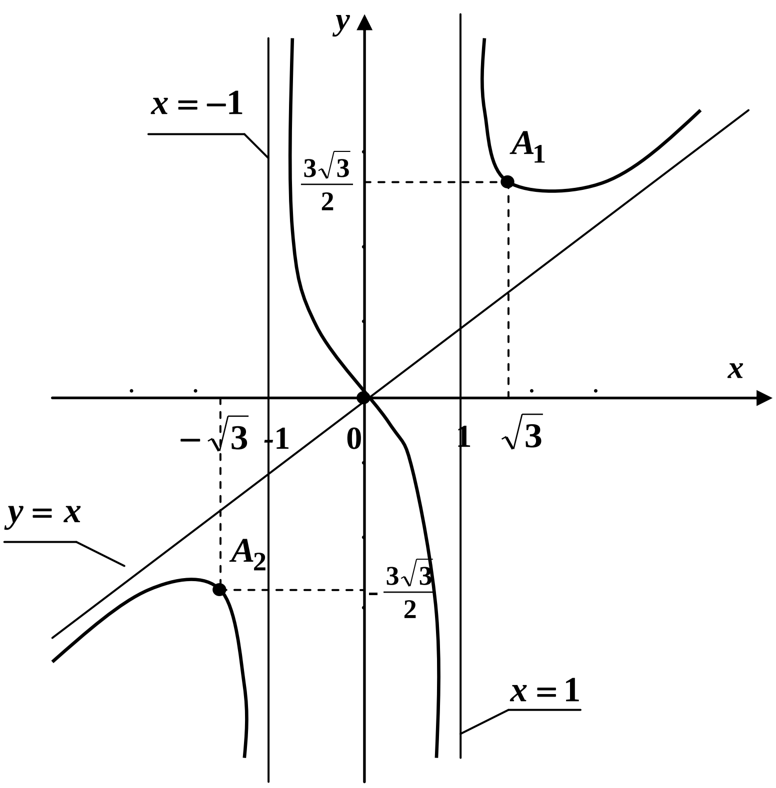
7) Вертикальні асимптоти: $x = \pm 1$. Для похилих асимптот знайдемо $k$ і $b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x^2-1)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x} = 0.$$

Отже, рівняння похилої асимптоти: $y = x$.

8) Побудуємо графік функції.



## Завдання для самостійної роботи

Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

1. $y = 2x^4 - x^2 + 1$;
2. $y = x^2\sqrt{x-3}$;
3. $y = x^2 - 2\ln x$;
4. $y = \dfrac{e^x}{x}$;
5. $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$.

## Л І Т Е Р А Т У Р А


**1.** Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001.

**2.** Овчинников П.П. та інші. Вища математика: Підручник. У 2 ч. – К.: Техніка, 2004.

**3.** Шипачёв В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998.

**4.** Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн. – К.: Либідь, 1994.

**5.** Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник / За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004.

**6.** Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов.- М.: Высшая школа, 2002.

**7.** Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.

Навчальне видання

Запорожченко Олена Євгенівна
Шинковська Ірина Леонідівна
Заєць Ірина Петрівна

# ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Навчальний посібник

Тем. план 2012, поз. 100

Підписано до друку 17.04.2012. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 3,11. Умов. друк. арк. 3,07. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна,4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ