МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

Л.П. КАГАДИЙ, И.Л. ШИНКОВСКАЯ,
И.П. ЗАЕЦ, Л.Ф. СУШКО

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть I

**Утверждено на заседании Ученого совета академии
в качестве учебного пособия. Протокол № 1 от 27.01.2014**

Днепропетровск НМетАУ 2014

УДК 517(075.8)
Кагадий Л.П., Шинковская И.Л., Заец И.П., Сушко Л.Ф. Высшая математика. Часть 1: Учебное пособие. – Днепропетровск : НМетАУ, 2014. – 90 с. (Библиотека иностранного студента).

Приведены подробные рекомендации к изучению дисциплины «Высшая математика». Теоретические положения сопровождаются решением типовых задач. Рекомендуются задания для самостоятельной работы.

Предназначено для иностранных студентов технических направлений всех форм обучения.

Илл. 38. Библиогр.: 15 наим.

Печатается в авторской редакции.

Ответственный за выпуск А.В. Павленко, д-р физ.-мат. наук, проф.

Рецензенты: Е.А. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф. (НГУ)
А.В. Сясев, канд. физ.-мат. наук, доц. (ДНУ)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

За последние годы составляющая международного образования в системе высшего образования претерпела перемены: значительно увеличилось число иностранных студентов, желающих получить образование в высших учебных заведениях Украины. В связи с этим значительно возросла ответственность вуза за качество подготовки специалистов.

Процесс обучения иностранных студентов имеет свою специфику и особенности. Цель предлагаемого пособия – помочь слушателям при изучении дисциплины «Высшая математика» разобраться и качественно усвоить учебный материал.

Первая часть учебного пособия включает в себя такие разделы высшей математики: «Элементы линейной алгебры», «Элементы векторной алгебры», «Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве». Приводятся основные теоретические положения и формулы, которые иллюстрируются подробным решением задач разного уровня сложности. В конце каждой темы предлагаются задачи для самостоятельной работы. Руководствуясь учебным пособием, студенты приобретут базовые знания по теории и получат навыки решения задач.

Для снижения уровня языковой адаптации в конце пособия приводится список математических терминов и словосочетаний, составленных по предлагаемому материалу каждого раздела, на французском и английском языках, а также правила чтения математических символов и выражений.

Пособие может быть также использовано для самостоятельной работы и подготовки к модульному контролю студентов технических направлений всех форм обучения.

Учебное пособие издается на русском языке, что обусловлено договором между НМетАУ и иностранными студентами о языке обучения.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Матрицы и действия над ними

Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов и записанная в виде

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m_2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

называется ***матрицей*** размера $m \times n$.

Кратко матрицу обозначают так: $A=(a_{ij})$. Числа a_{ij}, из которых составлена матрица, называют ***элементами матрицы***, причем $i=1,2,...,m$ - номер строки, $j=1,2,...,n$ - номер столбца.

Например, элементы $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ составляют i-ю строку, а элементы $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}$ - j-й столбец.

Матрица, состоящая из одной строки, называется ***матрицей – строкой***: $(a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n})$.

Матрица, состоящая из одного столбца, называется ***матрицей – столбцом***: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

Две матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называются ***равными***, если они имеют одинаковые размеры и равны их соответствующие элементы: $a_{ij}=b_{ij}$.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов $(m=n)$, называется ***квадратной***. Если $m \neq n$, то матрицу называют ***прямоугольной***.

Матрицы (a_{11}), $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ являются соответственно матрицами 1-го, 2-го и 3-го порядков.

В квадратной матрице n- го порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют ***главную диагональ***, а элементы $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ - ***побочную диагональ***.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю:

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица – это диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу, полученную из данной заменой каждой её строки соответствующим столбцом (с тем же номером), называют ***матрицей***, ***транспонированной к данной***:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется ***симметричной***, если $A^T = A$ и ***кососимметричной***, если $A^T = -A$.

Перейдём к операциям над матрицами.

Суммой $C = A + B$ ***двух матриц*** одинакового размера $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называют матрицу $C_{m\times n} = (c_{ij})$, элементы которой определяются по правилу

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots n. \tag{1.1}$$

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ ***на число*** λ называют матрицу $B_{m\times n} = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \lambda\, a_{ij}$ и записывают

$$B = \lambda\, A. \tag{1.2}$$

Пример 1.1.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти $C = 4A + B$.

Решение

Используя формулы (1.1) и (1.2), получим:

$$C = 4A + B = 4\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 & 4\cdot(-1) \\ 4\cdot 1 & 4\cdot 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + (-3) & -16 + 1 \\ 4 + 2 & 20 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

Разность матриц $A - B$ определяют как сумму матрицы A и матрицы B, умноженной на число (-1), то есть $A - B = A + (-1)B$.

Пример 1.1.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Найти $D = A - B^T$.

Решение

Сначала найдем матрицу B^T. Для этого в матрице B поменяем местами строки и столбцы. Получим: $B^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда $D = A - B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & 3-4 \\ 2-(-1) & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Справедливы следующие свойства рассмотренных операций:

1. $A + B = B + A$; 2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $A + \theta = \theta + A = A$; 4. $A - A = A + (-A) = \theta$;
5. $1 \cdot A = A$; 6. $\alpha(\beta A) = (\alpha \beta) A$;
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; 8. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$, λ, β -числа.

Матрицу A называют ***согласованной*** с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Произведением $C = AB$ двух согласованных ***матриц*** $A_{m\times k} = (a_{ij})$ и $B_{k\times n} = (b_{ij})$ называют матрицу $C_{m\times n} = (c_{ij})$, элементы которой равны сумме попарных произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1,2, \ldots, m, \quad j = 1,2, \ldots, n. \qquad (1.3)$$

Пример 1.1.3. Найти произведение матриц $C = AB$, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Решение

а) Матрица $A_{2\times 2}$ согласована с матрицей $B_{2\times 3}$. Получим матрицу C размера 2×3, элементы которой определяются формулой (1.3):

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7$,

$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12}b_{22} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 7$,

$c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12$,

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{12} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 14$,

$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 14$,

$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 6 = 24$.

Тогда $C = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 12 \\ 14 & 14 & 24 \end{pmatrix}$.

б) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 2 & 14 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

в) $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \\ -4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Матрицы A и B называют ***перестановочными***, если $AB = BA$.

Справедливы следующие свойства:

1. $A\theta = \theta$, $\theta A = \theta$;
2. $AE = A$, $EA = A$;
3. $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$;
4. $(AB)C = A(BC)$;
5. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, λ - число.

Задания для самостоятельной работы

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти: а) $2A - 3B$; б) $(A + B) - \frac{1}{2}B$; в) $B + A^T$; г) $(2A - B)^T$.

2. Найти произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1.2. Определители и их свойства. Вычисление определителей второго и третьего порядков

Каждой квадратной матрице A может быть поставлено в соответствие число, определяемое по элементам этой матрицы и называемое ***определителем (детерминантом)***.

Определителем 2-го порядка называется число

$$det\, A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}. \tag{1.4}$$

Согласно формуле для вычисления определителя 2-го порядка нужно из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Пример 1.2.1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5+a & 1 \\ a & -2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a & \sqrt{a} \\ 2\sqrt{a} & 1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & \sin x \end{vmatrix}$.

Решение

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-6) \cdot 3 = 2 + 18 = 20$;

б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 0 \cdot (-4) = 15$;

в) $\begin{vmatrix} 5+a & 1 \\ a & -2 \end{vmatrix} = -2(5+a) - 1 \cdot a = -10 - 2a - a = -10 - 3a$;

г) $\begin{vmatrix} a & \sqrt{a} \\ 2\sqrt{a} & 1 \end{vmatrix} = a \cdot 1 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a - 2a = -a$;

д) $\begin{vmatrix} \cos x & -1 \\ \sin 2x & 2\sin x \end{vmatrix} = 2\cos x \cdot \sin x + \sin 2x = 2\sin 2x$.

Определителем 3-го порядка называется число

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} -$$

$$- a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}\,a_{11}. \qquad (1.5)$$

Замечание. Приведенное правило вычисления определителя часто называют «правилом треугольника».

Пример 1.2.2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot(-2)\cdot 2 + (-1)\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 1 - (-2)\cdot(-1)\cdot 5 -$$

$$-2\cdot 2\cdot 2 = 30 - 2 - 12 - 9 - 10 - 8 = -11.$$

Рассмотрим ***основные свойства определителей.***

1. Величина определителя не изменится, если его строки заменить соответствующими столбцами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. Определитель меняет знак, если две его строки (столбца) поменять местами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} k\,a_{11} & k\,a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5. Определитель равен нулю, если соответствующие элементы двух его строк (столбцов) пропорциональны:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k\,a_{11} \\ a_{21} & k\,a_{21} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя можно представить в виде суммы двух слагаемых, то определитель можно записать в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + h_1 & a_{12} + h_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

7. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + k\,a_{21} & a_{12} + k\,a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Замечание. Перечисленные свойства справедливы для определителей любого порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называют определитель, который получается из данного вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Пример 1.2.3. Для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ найти миноры M_{12} и M_{23}.

Решение

Чтобы найти минор M_{12}, вычеркнем в данном определителе первую строку и второй столбец, после чего вычислим определитель второго порядка:

$$M_{12}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-1\cdot(-2)=2.$$

Для вычисления минора M_{23} вычеркнем вторую строку и третий столбец:

$$M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=1\cdot 5-2\cdot 2=1.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называют его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Пример 1.2.4. Для определителя примера 1.2.3 найти алгебраические дополнения A_{21} и A_{33}.

Решение

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-(-4-15)=19,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=3-(-2)=5.$$

<u>Теорема 1</u> (о разложении определителя). Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на их алгебраические дополнения: $\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$.

Например, $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$, $\quad\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=$

$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$. Это разложение определителей по элементам первой строки.

Пример 1.2.5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ -2 & 1 & 6\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix}$, разложив его по элементам:

а) первой строки ; б) третьего столбца.

Решение

а) Разложение по элементам первой строки определяется формулой $\varDelta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. В нашем случае:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 2\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 - 24 - 2(-6-18) + 5(-8-3) = -21 + 48 - 55 = -28.$$

б) Разложение по элементам третьего столбца выполним по формуле $\varDelta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$. Получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\cdot 5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(-8-3) - 6(4-6) + 3(1+4) = -28.$$

Пример 1.2.6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, упростив его.

Решение

Упростить определитель – это значит, используя свойства определителей, получить в какой-то строке (столбце) максимальное количество нулей, чтобы затем раскрыть определитель именно по этой строке (столбцу).

Прибавим к элементам первой строки соответствующие элементы третьей строки. Затем умножим первую строку на -2 и сложим со второй строкой. Получим определитель, в котором $a_{21} = a_{31} = 0$. Вычислим его, разложив по элементам первого столбца, в котором остался единственный отличный от нуля элемент a_{11}.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2+(-2)\cdot 1 & 8+(-2)\cdot 3 & 1+(-2)\cdot 2 \\ -1+1 & 1+3 & 2+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 - (-12) = 20.$$

Теорема 2. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если её определитель не равен нулю: $|A| = det\,A \neq 0$.

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если выполняется условие: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E - единичная матрица (см. п.1.1).

Теорема 3. Для существования обратной матрицы A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. Вычислить определитель матрицы A. Если $det\,A \neq 0$, то матрица A имеет обратную, в противном случае обратная матрица не существует.

2. Составить матрицу из алгебраических дополнений элементов матрицы A и транспонировать её.

3. Найти обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2.7. Найти обратную матрицу: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение

а) Воспользуемся алгоритмом нахождения обратной матрицы.

1. Вычислим $det\,A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3 \neq 0$. Значит, матрица A имеет обратную.

2. Найдём алгебраические дополнения всех её элементов :

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5$, $\qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$,

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4$, $\qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$.

Транспонированная матрица алгебраических дополнений имеет вид: $A^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{det\,A} A^T = \dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{4}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

б) 1. $det\,B = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1-6) -$
$-5(-3-12) - 2(6-4) = 57 \neq 0$, откуда следует, что для матрицы B можно найти обратную.

2. Алгебраические дополнения:

$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$, $\quad B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$,

$B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-15) = 15$, $\quad B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 6$,

$B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $\quad B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(-16) = 16$,

$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 17$, $\quad B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -12$,

$B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13$.

Транспонированная матрица алгебраических дополнений имеет вид:

$$B^T = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 17 \\ 15 & 6 & -12 \\ 2 & 16 & -13 \end{pmatrix}.$$

3. $B^{-1} = \dfrac{1}{det\,B} \cdot B^T = \dfrac{1}{57}\begin{pmatrix} -7 & 1 & 17 \\ 15 & 6 & -12 \\ 2 & 16 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{7}{57} & \dfrac{1}{57} & \dfrac{17}{57} \\ \dfrac{15}{57} & \dfrac{6}{57} & -\dfrac{12}{57} \\ \dfrac{2}{57} & \dfrac{16}{57} & -\dfrac{13}{57} \end{pmatrix}$.

Справедливы следующие свойства для двух невырожденных матриц A и B одного порядка:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

2. $(A^{-1})^{-1} = A$;

3. $det(A^{-1}) = \frac{1}{det\,A}$;

4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2x^2 & x \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} cos^2\alpha & tg\alpha \\ -ctg\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ разложением:

а) по второй строке; б) по первому столбцу.

3. Вычислить определители, предварительно упростив их:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$.

4. Найти обратную матрицу A^{-1}, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Системой n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.6}$$

где a_{ij} - коэффициенты при неизвестных, b_i - свободные члены $(i, j = 1,2,...,n)$.

Упорядоченный набор чисел $\{x_1^\circ, x_2^\circ, ..., x_n^\circ\}$ называют ***решением системы***, если при подстановке этого набора вместо $x_1, x_2, ..., x_n$ каждое уравнение системы обращается в тождество.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется ***совместной***, а система, не имеющая решений, называется ***несовместной***.

Совместная система называется ***определённой***, если она имеет единственное решение.

Система, имеющая более одного решения, называется ***неопределённой***. Неопределённая система всегда имеет бесчисленное множество решений.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна, и в случае совместности найти её решение (или множество решений).

Система ***двух линейных уравнений с двумя неизвестными*** имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.7}$$

Рассмотрим её решение ***методом Крамера***. Введём обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение и справедливы ***формулы Крамера***:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}. \tag{1.8}$$

Здесь Δ называется определителем системы, а Δ_{x_1}, Δ_{x_2} - определители, которые получены из определителя Δ путём замены в нём первого и второго столбцов соответственно столбцом свободных членов.

Пример 1.3.1. Решить систему уравнений : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$

Решение

Найдем определитель системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0$, система имеет единственное решение.

Вычислим $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 6 = -14$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21$.

По формулам Крамера (1.8) получим: $x_1 = \dfrac{-14}{-7} = 2,\qquad x_2 = \dfrac{-21}{-7} = 3.$

Выполним проверку. Для этого подставим найденные значения переменных в систему: $\begin{cases} 2 + 2 \cdot 3 \equiv 8, \\ 3 \cdot 2 - 3 \equiv 3. \end{cases}$

Система решена верно.

Система ***трёх линейных уравнений с тремя неизвестными*** имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.9}$$

Введём обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Если $\varDelta \neq 0$, то система имеет единственное решение и справедливы ***формулы Крамера***:

$$x_1 = \frac{\varDelta_{x_1}}{\varDelta}, \qquad x_2 = \frac{\varDelta_{x_2}}{\varDelta}, \qquad x_3 = \frac{\varDelta_{x_3}}{\varDelta}. \tag{1.10}$$

Здесь $\varDelta$ - определитель системы, а $\varDelta_{x_1}$, $\varDelta_{x_2}$, $\varDelta_{x_3}$ - определители, которые получены из определителя $\varDelta$ путём замены первого, второго и третьего столбцов соответственно столбцом свободных членов.

Пример 1.3.2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases}$

Решение

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-5-1) - (25+1) - 5 + 1 =$$

$$= -18 - 26 - 4 = -48 \neq 0.$$

Система имеет единственное решение.

Найдем $\varDelta_{x_1}$, $\varDelta_{x_2}$, $\varDelta_{x_3}$:

$$\varDelta_{x_1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & -1 \end{vmatrix} = -2(-5-1) -$$

$$-(50-12) - 10 - 12 = 12 - 38 - 22 = -48,$$

$$\varDelta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -12 \end{vmatrix} = 3(50-12) + 2(25+1) -$$

$$-60 - 10 = 114 + 52 - 70 = 96,$$

$$\varDelta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -12 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -12 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(12+10) - (-60-10) -$$

$$-2(-5+1) = 66 + 70 + 8 = 144.$$

По формулам Крамера (1.10) :

$$x_1 = \frac{-48}{-48} = 1, \quad x_2 = \frac{96}{-48} = -2, \quad x_3 = \frac{144}{-48} = -3.$$

Выполним проверку. Для этого подставим значения x_1, x_2, x_3 в каждое из уравнений системы. Получим: $\begin{cases} 3\cdot 1 - 2 - 3 \equiv -2, \\ 5\cdot 1 + 2 + 3 \equiv 10, \\ 1 + 2 + 5\cdot(-3) \equiv -12. \end{cases}$

Система решена правильно.

Замечание. Если определитель системы $\Delta = 0$, то

а) система имеет бесчисленное множество решений, если $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$ $\left(\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0\right)$;

б) система не имеет решений, если хотя бы один из определителей Δ_{x_1}, Δ_{x_2} $\left(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}\right)$ отличен от нуля.

Пример 1.3.3. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ -5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

Решение

а) Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$,

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 2 \\ 9 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 3 \\ 9 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все определители системы равны нулю, то она или несовместна или имеет бесчисленное множество решений. Заметим, что если первое уравнение системы умножить на 2 и вычесть второе уравнение, то получим третье. Т.е. третье уравнение является следствием первого уравнения и может быть отброшено. Решим систему оставшихся двух уравнений, разрешив их относительно x_1 и x_2: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 - 3x_3, \\ -5x_1 - 3x_2 = 3 - 2x_3. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 - 3x_3 & 1 \\ 3 - 2x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3(1 - 3x_3) - (3 - 2x_3) = 11x_3 - 6,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 - 3x_3 \\ -5 & 3 - 2x_3 \end{vmatrix} = 2(3 - 2x_3) + 5(1 - 3x_3) = -19x_3 + 11.$$

Тогда $x_1 = -11x_3 + 6$, $x_2 = 19x_3 - 11$.

Величина x_3 может принимать произвольные значения. Например, при $x_3 = 0$: $x_1 = 6, x_2 = -11$. Таким образом, система имеет бесчисленное множество решений.

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$.

Нет необходимости вычислять остальные определители. Система не имеет решений.

Вернёмся к системе (1.9) и рассмотрим её решение ***матричным методом***.

Введём следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - матрица системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов.

Тогда, согласно правилу умножения матриц, система (1.9) перепишется одним матричным уравнением с неизвестной матрицей $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}. \tag{1.11}$$

Если матрица $\boldsymbol{A}$ имеет обратную матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$, то решение уравнения (1.11) может быть найдено по формуле:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}. \tag{1.12}$$

Итак, чтобы решить систему уравнений (1.9), достаточно найти матрицу, обратную матрице системы $\boldsymbol{A}$ и умножить её на матрицу свободных членов.

Пример 1.3.4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 17, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$

Решение

Запишем данную систему уравнений в матричной форме: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B},$ где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 3 - 90 - 24 + 18 - 10 = -87 \neq 0,$ значит, матрица $\boldsymbol{A}$ невырожденная и можно найти обратную матрицу.

Система уравнений имеет единственное решение.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -24, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 20,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -19, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17.$$

Тогда $A^{-1} = -\dfrac{1}{87}\begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix}.$

По формуле (1.12) найдем решение системы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3\cdot 17 - 24\cdot(-3) - 21\cdot 10 \\ -7\cdot 17 - 2\cdot(-3) + 20\cdot 10 \\ -19\cdot 17 + 7\cdot(-3) + 17\cdot 10 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} -87 \\ 87 \\ -174 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$x_1 = 1,\quad x_2 = -1,\quad x_3 = 2$ - искомое решение.

Результат можно проверить подстановкой найденных значений в исходную систему (см. примеры 1.3.1, 1.3.2).

Задания для самостоятельной работы

1. Решить системы уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = -5, \\ 5x - 3y = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

2. При каких значениях a и b система $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b, \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = -1, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3. \end{cases}$ имеет:

а) одно решение;

б) бесчисленное множество решений;

в) не имеет решений.

3. Решить системы уравнений матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 = -2, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Векторы и линейные операции над ними. Векторы в прямоугольной системе координат

Вектором называется направленный отрезок в пространстве. Если начало вектора находится в точке $\boldsymbol{A}$, а конец – в точке $\boldsymbol{B}$, то вектор обозначают так: $\overline{\boldsymbol{AB}}$ или $\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{AB}}$ (рис. 2.1).

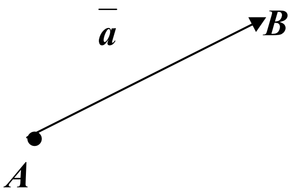


Рис. 2.1

Длина вектора называется его ***модулем*** и обозначается $|\overline{\boldsymbol{a}}|$ или $|\overline{\boldsymbol{AB}}|$.

Вектор, длина которого равна $\mathbf{0}$, называется ***нулевым*** и обозначается $\overline{\mathbf{0}}$. Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным вектором (ортом)*** и обозначается $\overline{\boldsymbol{a}^{\mathbf{0}}}$. Нулевой вектор не имеет направления, а направление единичного вектора совпадает с направлением вектора $\overline{\boldsymbol{a}}$.

Векторы, лежащие на одной или на параллельных прямых, называются ***коллинеарными*** (независимо от того, направлены они одинаково или противоположно).

Векторы, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются ***компланарными***.

Два вектора считаются ***равными***, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины.

Рассмотрим ***линейные операции над векторами.***

<u>Сложение векторов</u>. Пусть даны векторы $\overline{\boldsymbol{a}}$ и $\overline{\boldsymbol{b}}$. Возьмём произвольную точку $\boldsymbol{O}$ и из неё отложим вектор $\overline{\boldsymbol{a}}$, затем из его конца отложим вектор $\overline{\boldsymbol{b}}$. ***Суммой*** $\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}}$ векторов называется вектор $\overline{\boldsymbol{c}}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго (рис. 2.2). Это правило сложения векторов называют ***правилом треугольника***. Его можно обобщить на случай любого конечного числа слагаемых, а именно: суммой нескольких векторов будет вектор, замыкающий ломаную, построенную из них (рис. 2.3).

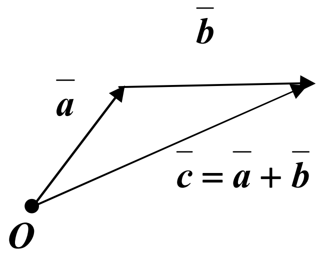


Рис. 2.2

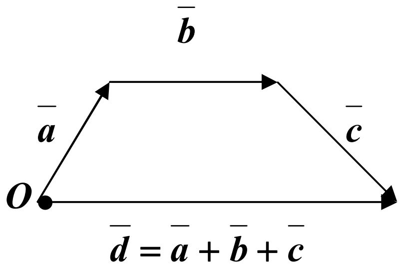


Рис. 2.3

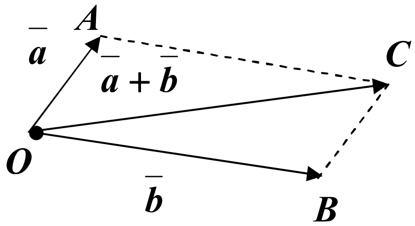


Рис. 2.4

Для сложения двух векторов можно использовать ***правило параллелограмма***, для этого отложим векторы от произвольной точки $\boldsymbol{O}$ $\left(\overline{\boldsymbol{OA}}=\bar{\boldsymbol{a}}\ \text{и}\ \overline{\boldsymbol{OB}}=\bar{\boldsymbol{b}}\right)$. Построим на этих векторах параллелограмм $\boldsymbol{OABC}$. Тогда суммой векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ будет вектор $\overline{\boldsymbol{OC}}$ - диагональ параллелограмма, проведенная из вершины $\boldsymbol{O}$ (рис. 2.4).

<u>Вычитание векторов</u>. Вычесть какой-либо вектор – это значит прибавить противоположный ему вектор: $\bar{\boldsymbol{a}}-\bar{\boldsymbol{b}}=\bar{\boldsymbol{a}}+\left(-\bar{\boldsymbol{b}}\right)$.

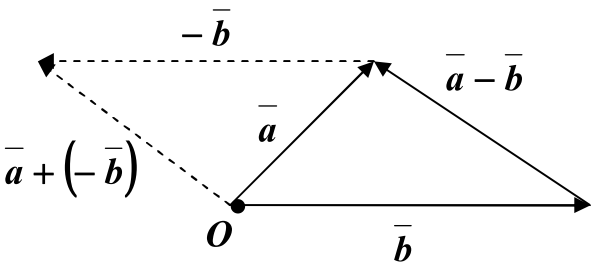


Рис. 2.5

Следовательно, чтобы построить ***разность векторов*** $\bar{\boldsymbol{a}}-\bar{\boldsymbol{b}}$, нужно отнести векторы к общему началу и выбрать замыкающий вектор, направленный в сторону $\bar{\boldsymbol{a}}$ (того вектора, из которого производится вычитание) (рис. 2.5).

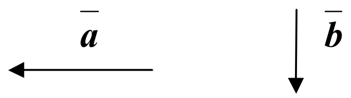
<u>Умножение вектора на число</u>. Произведением вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ ***на число*** $\boldsymbol{\lambda}$ называют вектор $\bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{a}}$, который:

1) имеет направление вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$, если $\boldsymbol{\lambda}>\mathbf{0}$ и противоположное – если $\boldsymbol{\lambda}<\mathbf{0}$;

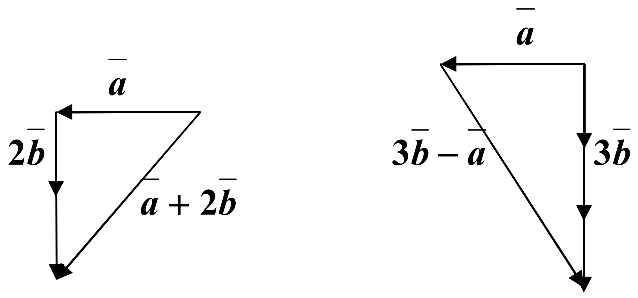
2) $\left|\bar{c}\right|=\left|\lambda\right|\left|\bar{a}\right|$.

В частности, $\left(-\mathbf{1}\right)\cdot\bar{\boldsymbol{a}}=-\bar{\boldsymbol{a}}$; $\mathbf{0}\cdot\bar{\boldsymbol{a}}=\bar{\mathbf{0}}$; $\mathbf{1}\cdot\bar{\boldsymbol{a}}=\bar{\boldsymbol{a}}$.

Пример 2.1.1. Даны ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Построить векторы $\bar{a}+2\bar{b}$, $3\bar{b}-\bar{a}$.



Решение



Справедливы следующие ***свойства линейных операций***:

1) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$;

2) $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$;

3) $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$;

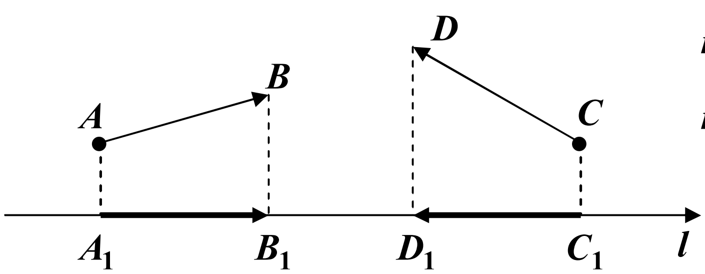
4) $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$;

5) $\alpha(\beta\bar{a})=(\alpha\beta)\bar{a}$;

6) $(\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$;

7) $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$.

<u>Проекция вектора на ось</u>. Пусть даны ось l и вектор $\bar{a}=\overline{AB}$. Из его начала и конца опустим перпендикуляры на ось. Их основания обозначим A_1 и B_1. ***Проекцией вектора*** $\bar{a}$ ***на ось*** l $(np_l\bar{a})$ называют длину вектора $\overline{A_1B_1}$, взятую со знаком $''+''$, если направление вектора совпадает с направлением оси, или со знаком $''-''$, если эти направления противоположны (рис. 2.6).



$$np_l\overline{AB}=\left|\overline{A_1B_1}\right|,$$
$$np_l\overline{CD}=\left|\overline{C_1D_1}\right|.$$

Рис. 2.6

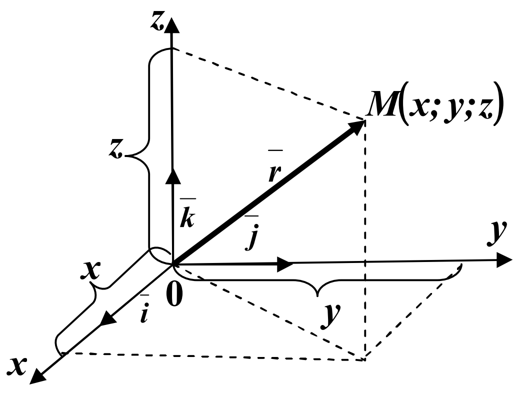


Рис. 2.7

Прямоугольная система координат. Пусть в пространстве заданы три попарно перпендикулярные оси $\boldsymbol{OX}$, $\boldsymbol{OY}$, $\boldsymbol{OZ}$ и единичные векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, которые направлены по этим осям соответственно. Произвольной точке M пространства можно поставить в соответствие вектор $\bar{r} = \overline{OM}$, называемый ***радиус – вектором*** точки M. Проекции вектора $\bar{r}$ на координатные оси – это координаты вектора. Если $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, то $\bar{r} = (x; y; z)$ - координаты вектора (рис. 2.7).

Длина радиус – вектора по его координатам вычисляется по формуле

$$|\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Пусть $\bar{a} = \overline{AB}$ - произвольный вектор в пространстве, разложение которого по ортам имеет вид:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\,, \qquad (2.1)$$

а точки A и B заданы своими координатами $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. Тогда ***координаты вектора*** $\bar{a}$ находят по формулам:

$$a_x = x_2 - x_1; \quad a_y = y_2 - y_1; \quad a_z = z_2 - z_1. \qquad (2.2)$$

Таким образом, чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала.

Длина вектора $\bar{a}$ определяется по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \qquad (2.3)$$

Пример 2.1.2. Найти периметр параллелограмма $ABCD$, вершинами которого являются точки $A(8;0;6)$, $B(8;-4;6)$, $C(6;-2;5)$.

Решение

В параллелограмме $\overline{AB} = \overline{DC};\ \overline{BC} = \overline{AD}.$ Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. По формуле (2.2) получим: $\overline{AB} = (8-8; -4-0; 6-6)$, $\overline{AB} = (0;-4;0)$,

$\overline{BC} = (6-8; -2-(-4); 5-6)$, $\overline{BC} = (-2; 2; -1)$.

Используя формулу (2.3), найдем длины векторов:

$|\overline{AB}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4$, $|\overline{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$.

Тогда периметр параллелограмма: $P = 2\left(|\overline{AB}| + |\overline{BC}|\right) = 2(4+3) = 14$.

Направление вектора $\overline{a}$ в пространстве определяется углами α, β, γ, которые вектор образует с осями координат (рис. 2.8). Косинусы этих углов называют ***направляющими косинусами*** вектора. Они определяются по формулам:

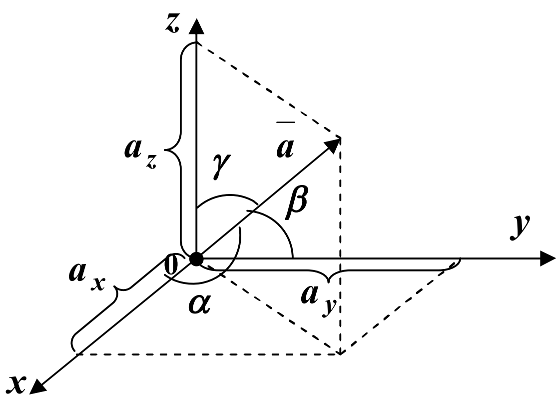


Рис. 2.8

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}. \qquad (2.4)$$

Легко видеть, что справедливо тождество: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Направляющие косинусы вектора $\overline{a}$ совпадают с координатами его орта $\overline{a^0}$: $\cos\alpha = a_x^0$, $\cos\beta = a_y^0$, $\cos\gamma = a_z^0$.

Таким образом, координатами единичного вектора служат его направляющие косинусы: $\overline{a^0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

<u>Правила действий над векторами, заданными своими координатами</u>

Если $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

1) $\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x;\ a_y \pm b_y;\ a_z \pm b_z)$;

2) $\lambda\overline{a} = (\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z)$, λ - число;

3) $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z$;

4) $\overline{a} \parallel \overline{b}$ ($\overline{a}$ коллинеарен $\overline{b}$) $\Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$.

Рассмотрим ***задачу о делении отрезка в заданном отношении.***

Пусть точка $M(x;y;z)$ делит отрезок между точками $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ в отношении $\dfrac{AM}{MB}=\lambda$ (рис. 2.9).

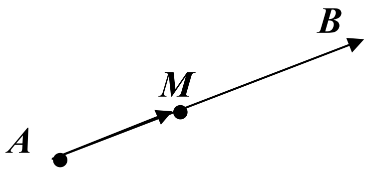


Рис. 2.9

Тогда ***координаты точки*** M находят по формулам :

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (2.5)$$

При делении отрезка пополам $\lambda=1$, поэтому ***координаты середины отрезка*** определяются из формул:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (2.6)$$

Пример 2.1.3. В треугольнике ABC найти длину медианы AM, если $A(2;9;0)$, $B(-4;0;6)$, $C(0;10;-2)$.

Решение

Так как точка M – середина отрезка BC, применим формулу (2.6), чтобы найти ее координаты:

$$x_M=\frac{-4+0}{2}=-2,\quad y_M=\frac{0+10}{2}=5,\quad z_M=\frac{6+(-2)}{2}=2.$$

Тогда координаты вектора $\overline{AM}=(-2-2;\,5-9;\,2-0)=(-4;-4;2)$ и $\left|\overline{AM}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{16+16+4}=6.$

2.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, которое равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos\left(\bar{a},\hat{}\ \bar{b}\right), \qquad (2.7)$$

где $\left(\bar{a},\hat{}\ \bar{b}\right)$ - наименьший угол, на который нужно повернуть один из векторов, чтобы его направление совпало с направлением другого вектора.

Если векторы заданы своими координатами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то скалярное произведение находят по формуле:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (2.8)$$

Таким образом, скалярное произведение векторов равно сумме попарных произведений их соответствующих координат.

Пример 2.2.1. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} = 4\bar{k} - \bar{i}$ и $\bar{b} = 3\bar{j} + \bar{i} - \bar{k}$.

Решение

Координаты векторов: $\bar{a} = (-1; 0; 4)$, $\bar{b} = (1; 3; -1)$.

Вычислим по формуле (2.8) скалярное произведение векторов: $\bar{a} \cdot \bar{b} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -1 - 4 = -5$.

<u>Свойства скалярного произведения:</u>

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;
2) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$;
3) $\lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda\bar{b})$;
4) $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$;
5) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$.

Равенство $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ или $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ называют ***условием перпендикулярности векторов***.

Пример 2.2.2. При каком значении β векторы $\bar{a} = (\beta; -3; 2)$ и $\bar{d} = \bar{i} + 2\bar{j} - \beta\bar{k}$ перпендикулярны?

Решение

Используем условие перпендикулярности векторов .

Найдем $\bar{a} \cdot \bar{d} = \beta \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-\beta) = -\beta - 6 = 0 \Rightarrow \beta = 6$.

Пример 2.2.3. Вычислить длину вектора $\overline{a} = 2\overline{m} - 3\overline{n}$, если $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 3$ и угол между векторами $\overline{m}$ и $\overline{n}$ равен 60^0.

Решение

Найдем $|\overline{a}|^2 = \overline{a}^2$: $\overline{a}^2 = (2\overline{m} - 3\overline{n})^2 = 4\overline{m}^2 - 12\overline{m}\cdot\overline{n} + 9\overline{n}^2$.

Но $\overline{m}^2 = |\overline{m}|^2 = 2^2 = 4$, $\overline{n}^2 = |\overline{n}|^2 = 3^2 = 9$, $\overline{m}\cdot\overline{n} = 2\cdot 3\cdot \cos 60^0 = 3$.

Тогда получим : $|\overline{a}|^2 = 4\cdot 4 - 12\cdot 3 + 9\cdot 9 = 61 \Rightarrow |\overline{a}| = \sqrt{61}.$

Проекция вектора $\overline{a}$ на направление вектора $\overline{b}$ определяется по формуле:

$$np_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|}. \tag{2.9}$$

Угол между векторами находят по формуле:

$$\cos(\overline{a},\wedge\,\overline{b}) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\,|\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{2.10}$$

Пример 2.2.4. Даны векторы $\overline{a} = 12\overline{i} - 3\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} - 3\overline{j} - 2\overline{k}$. Вычислить проекцию вектора $\overline{b} + \overline{c}$ на вектор $\overline{a}$. Найти $\cos(\overline{b} + \overline{c};\wedge\,\overline{a})$.

Решение

Найдем координаты вектора $\overline{b} + \overline{c} = (1 + 1;\ 2 - 3;\ 4 - 2)$, $\overline{b} + \overline{c} = (2; -1;\ 2)$.

Вычислим проекцию $(\overline{b} + \overline{c})$ на вектор $\overline{a}$ по формуле (2.9):

$$np_{\overline{a}}(\overline{b} + \overline{c}) = \frac{(\overline{b} + \overline{c})\cdot\overline{a}}{|\overline{a}|} = \frac{2\cdot 12 + (-1)\cdot(-3) + 2(-3)}{\sqrt{12^2 + (-3)^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{3\sqrt{2}}.$$

Используя формулу (2.10), найдем $\cos(\overline{b} + \overline{c};\wedge\,\overline{a})$:

$$\cos(\overline{b} + \overline{c};\wedge\,\overline{a}) = \frac{(\overline{b} + \overline{c})\cdot\overline{a}}{|\overline{b} + \overline{c}|\cdot|\overline{a}|} = \frac{2\cdot 12 + (-1)\cdot(-3) + 2(-3)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{12^2 + (-3)^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{9\sqrt{2}}.$$

Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется третий вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, который:

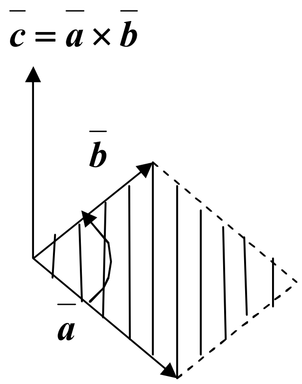


Рис. 2.10

1) перпендикулярен этим векторам;

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма со сторонами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$|\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\,\sin(\bar{a},\wedge\,\bar{b}). \tag{2.11}$$

3) направлен так, что с его конца кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ виден против часовой стрелки (рис. 2.10).

Если векторы заданы своими координатами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то векторное произведение находят по формуле:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \tag{2.12}$$

<u>Свойства векторного произведения</u>:

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$;

2) $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$;

3) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$;

4) $\bar{a} \times \bar{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$.

Равенство $\bar{a} \times \bar{b} = \mathbf{0}$ или $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$ называют ***условием коллинеарности векторов.***

Пример 2.2.5. При каких значениях переменных x и y будут коллинеарными векторы $\overline{AB}$ и $\bar{c}$, если $A(x;8;-2)$, $B(4;5;1)$ и $\bar{c} = (-2;\ 6;1-y)$?

Решение

Координаты вектора $\overline{AB} = (4-x;-3;3)$. Используем условие коллинеарности векторов $\overline{AB}$ и $\overline{c}$ – это пропорциональность их координат: $\dfrac{4-x}{-2}=\dfrac{-3}{6}=\dfrac{3}{1-y}$,

откуда получим уравнения для нахождения x и y:

$$\frac{4-x}{-2}=-\frac{1}{2},\;\; 4-x=1 \;\Rightarrow\; x=3 \;\text{ и }\; \frac{3}{1-y}=-\frac{1}{2},\;\; 1-y=-6 \;\Rightarrow\; y=7.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис.2.11), определяется по формуле

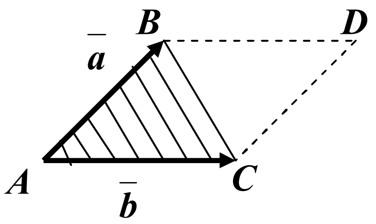


Рис. 2.11

$$S=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|. \qquad (2.13)$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1\,;y_1\,;z_1)$, $B(x_2\,;y_2\,;z_2)$, $C(x_3\,;y_3\,;z_3)$ будет равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а значит

$$S_{\Delta\,ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|. \qquad (2.14)$$

Пример 2.2.6. Найти площадь треугольника, заданного координатами вершин: $A(1;-2;8)$, $B(0;0;4)$, $C(6;2;0)$.

Решение

Выберем два вектора, на которых построен данный треугольник, например, $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $\overline{AB}=(-1;2;-4)$, $\overline{AC}=(5;4;-8)$. По формуле (2.12) найдем их векторное произведение:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -1 & 2 & -4\\ 5 & 4 & -8\end{vmatrix}=\overline{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & -4\\ 4 & -8\end{vmatrix}-\overline{j}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 5 & -8\end{vmatrix}+\overline{k}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{i}\cdot(-16+16)-\overline{j}\cdot(8+20)+\overline{k}\cdot(-4-10)=-28\overline{j}-14\overline{k}.$$

Тогда площадь треугольника по формуле (2.14) будет равна:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-28)^2+(-14)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{980}=7\sqrt{5}\ \text{(кв. ед.).}$$

Угол между векторами находят по формуле:

$$\sin\left(\overline{a},\wedge\ \overline{b}\right)=\frac{\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|}{\left|\overline{a}\right|\ \left|\overline{b}\right|}. \qquad (2.15)$$

Смешанным произведением трёх векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется число, которое равно векторному произведению $\overline{a}\times\overline{b}$, умноженному скалярно на вектор $\overline{c}$:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}. \qquad (2.16)$$

Если векторы заданы своими координатами $\overline{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$, $\overline{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$, $\overline{c}=\left(c_x;c_y;c_z\right)$, то их смешанное произведение находят по формуле:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2.17)$$

Свойства смешанного произведения:

1) $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\cdot\overline{a}$.

Круговая перестановка сомножителей не изменяет величины смешанного произведения.

2) $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=-\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)\cdot\overline{c}$, $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=-\left(\overline{a}\times\overline{c}\right)\cdot\overline{b}$.

Перестановка двух соседних сомножителей меняет знак смешанного произведения.

3) $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=0 \Leftrightarrow \overline{a},\overline{b},\overline{c}$ - компланарны.

Равенство $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$ называют ***условием компланарности векторов.***

Пример 2.2.7. Лежат ли точки $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$, $D(5;0;-6)$ в одной плоскости?

Решение

Если данные точки лежат в одной плоскости, то в этой плоскости лежат и векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, т.е. векторы компланарны. Проверим выполнение условия комланарности векторов: $\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = 0$.

Найдем координаты векторов и их смешанное произведение:

$$\overline{AB} = (-1; 3; 3), \quad \overline{AC} = (0; 4; 2), \quad \overline{AD} = (3; 1; -4).$$

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1(-16-2) + 3\cdot(6-12) = 0.$$

Значит, векторы компланарны, а точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Если $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} > 0$, то векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют ***правую тройку*** (рис. 2.12). В противном случае (когда $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} < 0$) тройку векторов называют ***левой*** (рис. 2.13).

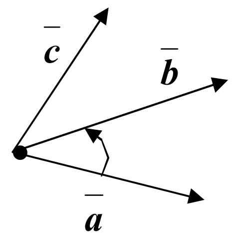


Рис. 2.12

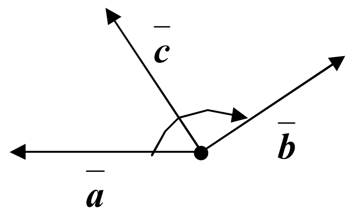


Рис. 2.13

Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ (рис. 2.14), равен модулю смешанного произведения этих векторов:

$$V_{парал.} = \left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right|. \qquad (2.18)$$

Объём треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$ (рис. 2.15) будет в шесть раз меньше объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$, $\overline{AD} = \overline{c}$, а значит,

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB} \times \overline{AC}\right)\cdot \overline{AD}\right|. \qquad (2.19)$$

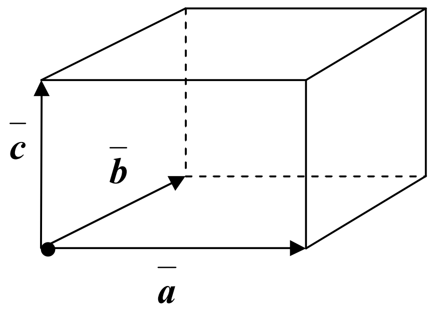


Рис. 2.14

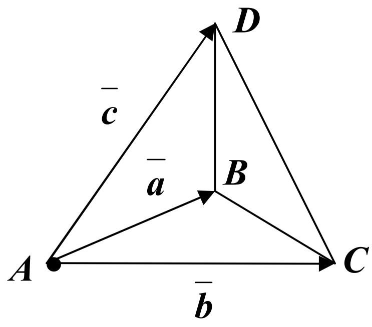


Рис. 2.15

Пример 2.2.8. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$, $\bar{b} = \bar{k} - 3\bar{j}$, $\bar{c} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$.

Решение

Для вычисления объема используем формулу (2.18). Сначала найдем смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-15 - 2) = -51.$$

Значит, объем параллелепипеда равен $V_{пар} = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = |-51| = 51$ (куб. ед.).

Задания для самостоятельной работы

1. На векторах $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$ построен параллелограмм $OABC$. M – середина BC, K – середина OB. Выразить векторы $\overline{OC}$, $\overline{BA}$, $\overline{OM}$, $\overline{KM}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2. Даны векторы $\bar{a} = -2\bar{i} - 3\bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{k} - 2\bar{j}$. Найти длины векторов:

   а) $\bar{a} + 2\bar{b}$; б) $3\bar{c} - \bar{a}$; в) $2\bar{a} + 3\bar{b} - \bar{c}$.

3. Точки $A(1;-2;-1)$, $B(3;4;2)$, $C(3;1;-2)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найти координаты четвертой вершины D параллелограмма и длины его диагоналей.

4. Найти угол между векторами $\overline{a} = -\overline{i} + \overline{j}$ и $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$ и площадь параллелограмма, построенного на них.

5. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} - \overline{c}$ на вектор $\overline{b}$, если $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + 3\overline{j}$, $\overline{c} = 3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$.

6. Даны координаты вершин пирамиды $OABC$: $O(0;0;0)$, $A(1;2;-1)$, $B(-2;3;4)$, $C(1;0;-2)$. Вычислить угол ABC, площадь грани ABC, объем пирамиды.

7. Известно, что $\overline{a} \cdot \overline{b} = 6$, $\left|\overline{a}\right| = 3$, $\left|\overline{b}\right| = 3$. Чему равно $\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$?

3. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

3.1. Прямая линия на плоскости

Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.1}$$

при условии, что коэффициенты A и B одновременно не равны нулю, называется ***общим уравнением*** прямой. Вектор $\vec{n} = (A; B)$, перпендикулярный к данной прямой, называется её ***нормальным вектором***.

Рассмотрим отдельные случаи общего уравнения.

Значения коэффициентов	Вид уравнения	Расположение прямой
$C = 0$	$Ax + By = 0$	Проходит через начало координат
$A = 0$	$By + C = 0$	Параллельна оси OX
$B = 0$	$Ax + C = 0$	Параллельна оси OY
$A = C = 0$	$y = 0$	Совпадает с осью OX
$B = C = 0$	$x = 0$	Совпадает с осью OY

Если $M_0(x_0; y_0)$ - точка, принадлежащая прямой, $\vec{n}$ - нормальный вектор прямой (рис. 3.1), то прямая задаётся уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{3.2}$$

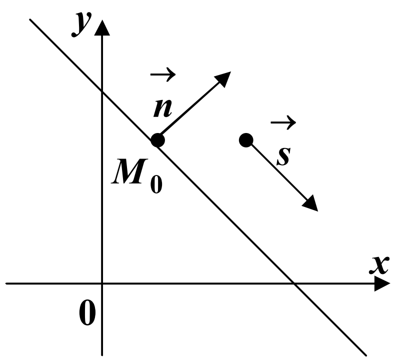


Рис. 3.1

Каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}, \qquad (3.3)$$

где $\vec{s}=(m;n)$ - ***направляющий вектор*** прямой.

Уравнение прямой, ***проходящей через две заданные точки*** $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, записывается так:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (3.4)$$

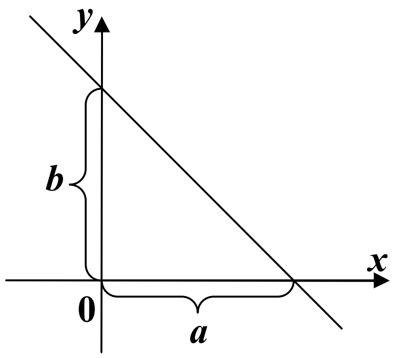


Рис. 3.2

Уравнение прямой ***в отрезках на осях*** (рис. 3.2) имеет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (3.5)$$

где a и b - величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат OX и OY соответственно.

Уравнение прямой ***с угловым коэффициентом*** (рис. 3.3) записывается так:

$$y=kx+b, \qquad (3.6)$$

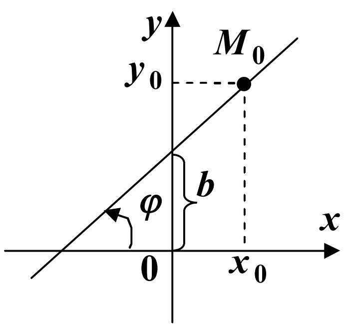


Рис. 3.3

где k - угловой коэффициент прямой ($k=tg\varphi$, φ - угол между прямой и положительным направлением оси OX);

b - величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY.

Уравнение прямой, ***проходящей через заданную точку*** $M_0(x_0;y_0)$ ***в заданном направлении*** (с известным угловым коэффициентом), имеет вид:

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (3.7)$$

Его также называют уравнением ***пучка прямых***.

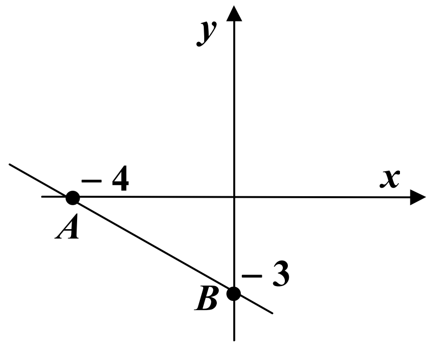
Пример 3.1.1. Построить прямые: а) $3x+4y+12=0$; б) $2x-y-3+0$;

в) $5x+12=0$; г) $2y-7=0$.

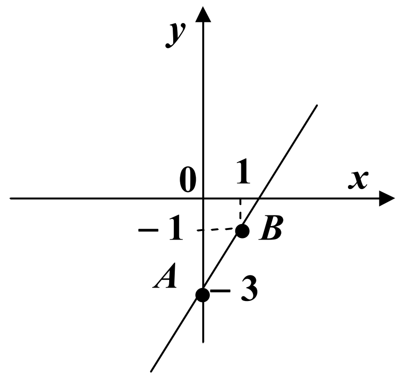
Решение

а) Чтобы построить прямую, преобразуем её общее уравнение в уравнение в отрезках на осях (3.5):

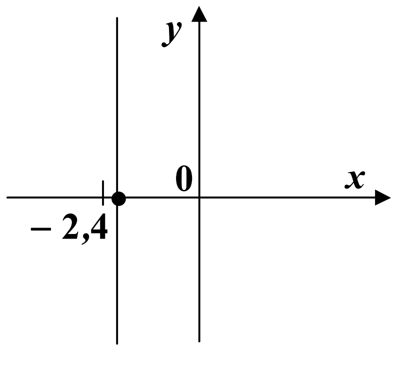
$\mathbf{3x+4y=-12}$, $\dfrac{\mathbf{3x}}{\mathbf{-12}}+\dfrac{\mathbf{4y}}{\mathbf{-12}}=\dfrac{\mathbf{-12}}{\mathbf{-12}}$, $-\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{4}}-\dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{3}}=\mathbf{1}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{-4}}+\dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{-3}}=\mathbf{1}$. Значит, данная прямая пересекает ось $\boldsymbol{OX}$ в точке $\boldsymbol{A}(\mathbf{-4;0})$, а ось $\boldsymbol{OY}$ в точке $\boldsymbol{B}(\mathbf{0;-3})$ $(\boldsymbol{a}=\mathbf{-4}, \boldsymbol{b}=\mathbf{-3})$. Через $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ проведём прямую.



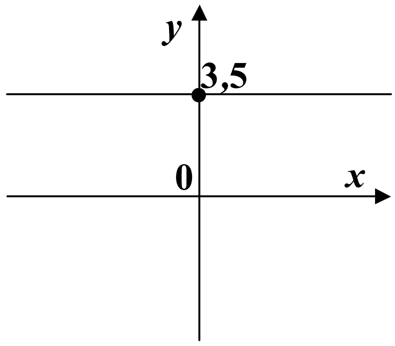
б) Приведем данное общее уравнение прямой к уравнению с угловым коэффициентом (3.6). Для этого выразим $\boldsymbol{y}$ через $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{y}=\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{3}$. Найдем две точки, принадлежащие прямой: если $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, то $\boldsymbol{y}=\mathbf{-3}$; если $\boldsymbol{x}=\mathbf{1}$, то $\boldsymbol{y}=\mathbf{-1}$. Через точки $\boldsymbol{A}(\mathbf{0;-3})$ и $\boldsymbol{B}(\mathbf{1;-1})$ проведем прямую.



в) Прямая параллельна оси $\boldsymbol{OY}$ (коэффициент $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$). Выразим $\boldsymbol{x}$ из уравнения: $\boldsymbol{x}=\dfrac{\mathbf{-12}}{\mathbf{5}}=\mathbf{-2{,}4}$. Построим прямую.



г) Так как коэффициент $A=0$, то данная прямая параллельна оси OX и пересекает ось OY в точке $y=\dfrac{7}{2}=3{,}5$.



Пример 3.1.2. Составить уравнения прямых, которые заданы условиями:

а) двумя точками $M(-1;3)$ и $K(2;-4)$;

б) точкой $A(3;2)$ и нормальным вектором $\vec{n}=(2;-1)$;

в) точкой $C(-1;6)$ и направляющим вектором $\vec{s}=(3;5)$;

г) точкой $P(3;-5)$ под углом 45^0 к оси OX;

д) точкой $E(2;-1)$ параллельно оси OY.

Решение

а) Уравнение прямой, проходящей через две точки, имеет вид (3.4). Подставим координаты точек M и K в это уравнение:

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)}=\frac{y-3}{-4-3},\quad \frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-7},\quad -7(x+1)=3(y-3)\quad \Rightarrow\quad 7x+3y-2=0.$$

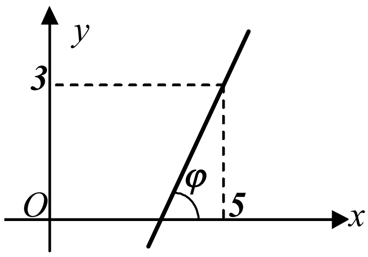
б) Используем уравнение (3.2). По условию $A=2, B=-1, x_0=3, y_0=2$. Получим: $2(x-3)-(y-2)=0$ или $2x-y-4=0$.

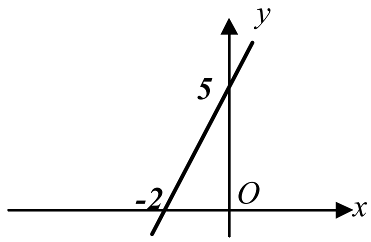
в) Так как прямая задана точкой и направляющим вектором, используем каноническое уравнение (3.3). При $x_0=-1, y_0=6$ и $m=3, n=5$ уравнение принимает вид: $\dfrac{x-(-1)}{3}=\dfrac{y-6}{5}$, $5(x+1)=3(y-6)\ \Rightarrow\ 5x-3y+23=0$.

г) Воспользуемся уравнением (3.7), в котором $x_0=3,\ y_0=-5$ и $k=tg45^0=1$: $\quad y-(-5)=1(x-3)\ \Rightarrow\ y=x-8$ или $x-y-8=0$.

д) Используем каноническое уравнение прямой (3.3). Так как прямая параллельна оси *ОУ*, то в качестве направляющего вектора можно выбрать единичный вектор $\bar{j} = (0;1)$. Тогда ее уравнение: $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+1}{1}$ или $x - 2 = 0$.

Пример 3.1.3. Записать уравнение прямой, изображенной на рисунке. Найти для нее координаты нормали и угловой коэффициент.

а) 

б) 

Решение

а) Воспользуемся уравнением (3.7). Для данной прямой известна точка$(5;3)$ и угол наклона прямой к оси *OX*: $\varphi = arctg3$, тогда $k = tg(arctg3) = 3$. Уравнение прямой : $y - 3 = 3(x - 5)$ или $3x - y - 12 = 0$.

Нормальный вектор этой прямой $\bar{n} = (A;\, B) = (3;\, -1)$, а угловой коэффициент $k = 3$.

б) Для данной прямой удобно использовать уравнение в отрезках на осях (3.5), где $a = -2$, $b = 5$. Тогда получим: $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{5} = 1$.

Приведем это уравнение к общему виду: $-5x + 2y = 10$ или $5x - 2y + 10 = 0$. Значит, $\bar{n} = (A;\, B) = (5;\, -2)$, $k = -\dfrac{A}{B} = \dfrac{5}{2}$.

Пример 3.1.4. Дан четырехугольник *ABCD*: $A(1;-2)$, $B(1;6)$, $C(4;7)$ и $D(5;2)$. Найти координаты точки пересечения диагоналей.

Решение

Составим уравнения диагоналей *AC* и *BD* четырехугольника.

$$AC:\ \frac{x-1}{4-1} = \frac{y+2}{7+2},\quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{9},\quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} \Rightarrow\ 3x - y - 5 = 0.$$

BD: $\dfrac{x-1}{5-1}=\dfrac{y-6}{2-6}$, $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-6}{-4}$, $x-1=-y-6 \Rightarrow x+y-7=0$.

Чтобы найти точку пересечения прямых AC и BD, решим систему уравнений:

$$\begin{cases}3x-5y-5=0,\\ x+y-7=0;\end{cases} \quad \begin{cases}4x-12=0,\\ y=-x+7;\end{cases} \quad \begin{cases}x=3,\\ y=4.\end{cases}$$

Если две прямые заданы общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то ***угол между прямыми*** (рис. 3.4) находится по формуле

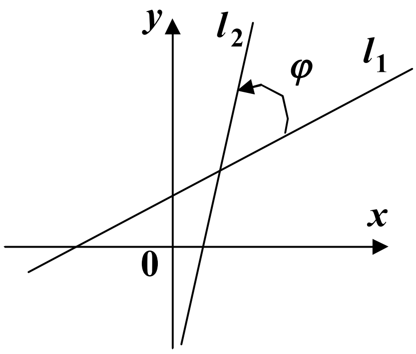


Рис. 3.4

$$cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (3.8)$$

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то ***угол между прямыми*** определяется так:

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|. \qquad (3.9)$$

Пример 3.1.5. Найти угол между прямыми $2x+y-3=0$ и $y=3x+5$.

Решение

Угол между прямыми вычислим по формуле (3.9). Для этого найдем угловые коэффициенты прямых: $k_1=-2$ и $k_2=3$.

Тогда $tg\varphi=\left|\dfrac{3-(-2)}{1+3\cdot(-2)}\right|=|-1|=1$, откуда $\varphi=45^0$.

Условие параллельности прямых:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}; \quad k_1=k_2. \qquad (3.10)$$

Пример 3.1.6. Среди данных прямых найти параллельные:

а) $5x-y=0$; б) $x-5y+2=0$; в) $\dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y+4}{1}$; г) $-\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{5}=1$; д) $y=5$.

Решение

Найдем угловые коэффициенты каждой прямой:

а) $5x - y = 0$, $y = 5x \Rightarrow k = 5$;

б) $x - 5y + 2 = 0$, $y = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} \Rightarrow k = \frac{1}{5}$;

в) $\frac{x-2}{-5} = \frac{y+4}{1}$, $x - 2 = -5y - 20$, $y = -\frac{1}{5}x - \frac{18}{5} \Rightarrow k = -\frac{1}{5}$;

г) $-\frac{x}{1} + \frac{y}{5} = 1$, $-5x + y = 5$, $y = 5x + 5 \Rightarrow k = 5$;

д) $y = 5 \Rightarrow k = 0$.

По условию параллельности прямых (3.10), делаем вывод: прямые а) и г) параллельны.

Пример 3.1.7. Даны точки $A(3;2), B(-1;4), C(-1;2)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB.

Решение

1 способ. Найдем уравнение прямой AB: $\frac{x-3}{-1-3} = \frac{y-2}{4-2}$, $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{2}$, $2(x-3) = -4(y-2) \Rightarrow x + 2y + 1 = 0$. Тогда $k_{AB} = -\frac{1}{2}$. Искомая прямая и прямая AB параллельны, значит, их угловые коэффициенты равны: $k = k_{AB} = -\frac{1}{2}$. Для записи искомой прямой используем формулу (3.7): $y - 2 = -\frac{1}{2}(x+1)$, $2y - 4 = -x - 1$ или $x + 2y - 3 = 0$.

2 способ. Так как искомая прямая и прямая AB параллельны, то вектор $\overline{AB} = (-4;2)$ является направляющим вектором для искомой прямой. Подставим координаты точки C и вектора $\overline{AB}$ в каноническое уравнение:

$$\frac{x-(-1)}{-4} = \frac{y-2}{2}, \quad \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1}, \quad x + 1 = -2y + 4 \Rightarrow x + 2y - 3 = 0.$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0; \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{3.11}$$

Пример 3.1.8. Перпендикулярны ли прямые $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ и $2x - 3y + 5 = 0$?

Решение

Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением (3.11). Запишем уравнение первой прямой в виде $y = -\frac{3}{2}x + 3$. Тогда $k_1 = -\frac{3}{2}$. Угловой коэффициент второй прямой равен $k_2 = \frac{2}{3}$. Как видим, $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, значит, прямые перпендикулярны.

Пример 3.1.9. В параллелограмме ***MKPC*** даны координаты трех вершин $M(-4;2), K(2;-4), P(5;0)$. Найти уравнение высоты ***MN***.

Решение

Высота ***MN*** параллелограмма – это перпендикуляр, проведенный из точки ***M*** к прямой ***KP***, значит $k_{MN} = -\frac{1}{k_{KP}}$.

Найдем уравнение KP: $\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-(-4)}{0-(-4)}$, $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{4}$, откуда

$4(x-2) = 3(y+4) \Rightarrow 4x - 3y - 20 = 0$, значит $k_{KP} = \frac{4}{3}$.

Значит, $k_{MN} = -\frac{3}{4}$, и уравнение ***MN*** запишется в виде: $y - 2 = -\frac{3}{4}(x+4)$, $4y - 8 = -3x - 12$ или $3x + 4y + 4 = 0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.12}$$

Пример 3.1.10. Найти длину высоты MN, используя условия задачи 3.1.9.

Решение

Длину высоты найдем как расстояние от точки $M(-4;2)$ до прямой KP, заданной уравнением $3x+4y+4=0$. Применяя формулу (3.12), получим:

$$|MN| = \frac{|4(-4) - 3\cdot 2 - 20|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{42}{5}.$$

Пример 3.1.11. Прямая задана l уравнением $4x+3y+1=0$. Найти уравнения прямых l_1 и l_2, параллельных l и отстоящих от нее на расстоянии трех единиц.

Решение

По условию прямые l_1 и l_2 параллельны прямой l, значит, их векторы нормали равны: $\overline{n_1} = \overline{n_2} = (4;3)$. Будем искать уравнения прямых в виде $4x+3y+C=0$.

На прямой l выберем произвольную точку, например, точку A с абсциссой $x=-1$. Ее ордината равна $y=1$. Расстояние d от точки A до прямой l равно расстоянию от прямых до l. Вычислим его по формуле (3.12):

$$d = \frac{|4(-1) + 3\cdot 1 + C|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|C-1|}{5}.$$

По условию $d=3$. Получим уравнение $|C-1|=15$, откуда $C-1=15 \Rightarrow C=16$ или $C-1=-15 \Rightarrow C=-14$.

Таким образом, уравнения прямых: $4x+3y+16=0$ и $4x+3y-14=0$.

Задания для самостоятельной работы

1.Построить прямые:

а) $2x-y+6=0$; б) $3x+4y+12=0$; в) $3x-2y=0$; г) $2x+3=0$;

д) $y-1=0$.

2. Дан треугольник ABC : $A(-3;-2)$, $B(1;6)$, $C(5;-4)$. Найти:

а) уравнение стороны AC; б) уравнение и длину медианы BM; в) угол A;

г) длину высоты BN.

3. Прямая проходит через точку $K(2;-3)$ и образует с положительным направлением оси OX угол $\varphi = 135^0$. Принадлежит ли этой прямой точка $A(-2;5)$?

4. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых $7x - y + 3 = 0$ и $3x + 5y - 4 = 0$ и точку $B(2;1)$.

5. Дана прямая m: $2x + 3y + 4 = 0$ и точка $C(3;-1)$. Записать уравнение прямой, которая проходит: а) через точку C параллельно m; б) через точку C перпендикулярно m; в) через точку C под углом 45^0 к прямой m.

6. Две противолежащих вершины квадрата лежат в точках $F(-1;1)$ и $G(5;3)$. Найти уравнения сторон и диагоналей квадрата.

7. Записать уравнения прямых, параллельных прямой $5x - 2y - 1 = 0$ и удаленных от точки $M(1;-2)$ на $\sqrt{29}$ единиц.

3.2. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола

Линией или ***кривой второго порядка*** называется плоская кривая, которая описывается уравнением второй степени относительно текущих координат x и y. В общем случае такое уравнение имеет вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{3.13}$$

где A, B, C, D, E, F - заданные действительные числа (A, B, C не равны нулю одновременно).

Рассмотрим важные частные случаи общего уравнения второй степени, дающие разные линии. Простейшая линия второго порядка – окружность.

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от одной и той же точки, называемой её центром.

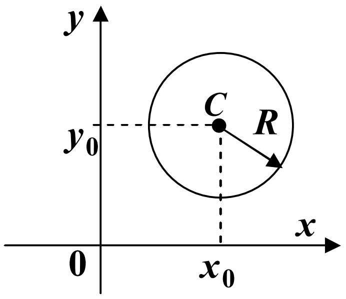


Рис. 3.5

Уравнение окружности с центром в точке $C(x_0\,; y_0)$ и радиусом R (рис. 3.5) имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (3.14)$$

Если центр окружности находится в начале координат $(x_0 = 0, y_0 = 0)$, то уравнение окружности запишется так:

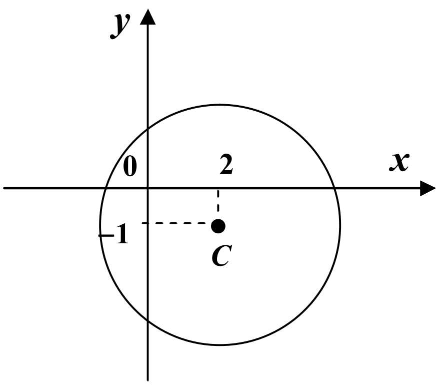
$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (3.15)$$

Замечание. Общее уравнение (3.13) определяет окружность, если в нём $A = C$ и $B = 0$.

Пример 3.2.1. Построить окружность $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$.

Решение

Данная окружность имеет центр $C(2;-1)$ и радиус $R = 4$. Построим окружность в координатной плоскости:



Пример 3.2.2. Составить уравнение окружности по следующим данным:

а) центр совпадает с началом координат, радиус равен $\sqrt{5}$;

б) центр находится в точке $F(0;3)$, радиус равен 8;

в) центр находится в точке $D(-2;-4)$, окружность проходит через начало координат;

г) точки $A(3;-2)$ и $B(5;4)$ - являются концами диаметра окружности.

Решение

а) Используем уравнение (3.15), в котором $R^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$. Тогда наша окружность запишется так: $x^2 + y^2 = 5$.

б) Подставим координаты центра $x_0 = 0,\ y_0 = 3$ и радиус $R = 8$ в уравнение (3.14). Будем иметь: $x^2 + (y-3)^2 = 64$.

в) Так как окружность проходит через начало координат $O(0;0)$, то DO - радиус окружности. Найдем его: $R = |DO| = |\overline{OD}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$. Значит, уравнение окружности имеет вид: $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 20$.

г) Если AB -диаметр окружности, то центр окружности C является его серединой, причем $|AC| = |BC| = R$.

Координаты центра определим по формуле (2.6):

$$x_0 = \frac{3+5}{2} = 4,\ y_0 = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

Радиус окружности $R = \sqrt{(4-3)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{10}$.

Тогда искомое уравнение: $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$.

Пример 3.2.3. Построить окружность $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.

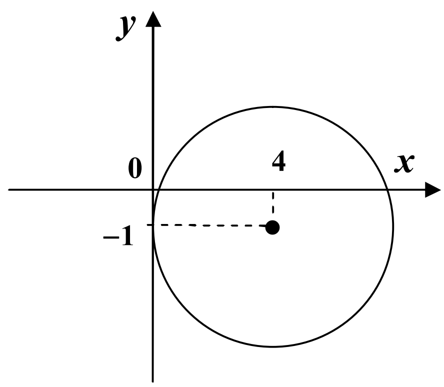
Решение

Приведем уравнение окружности к каноническому виду (3.14). Для этого выполним преобразования:

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0\ ,\quad \left(x^2 - 8x + 16 - 16\right) + \left(y^2 + 2y + 1 - 1\right) + 1 = 0\ ,$$

$$(x-4)^2 - 16 + (y+1)^2 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow \quad (x-4)^2 + (y+1)^2 = 16.$$

Это уравнение задаёт окружность с центром в точке $C(4;-1)$ и радиусом $R = 4$. Построим ее:



Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса ***с фокусами на оси*** OX имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b), \tag{3.16}$$

где a - большая полуось, b - малая полуось (рис. 3.6).

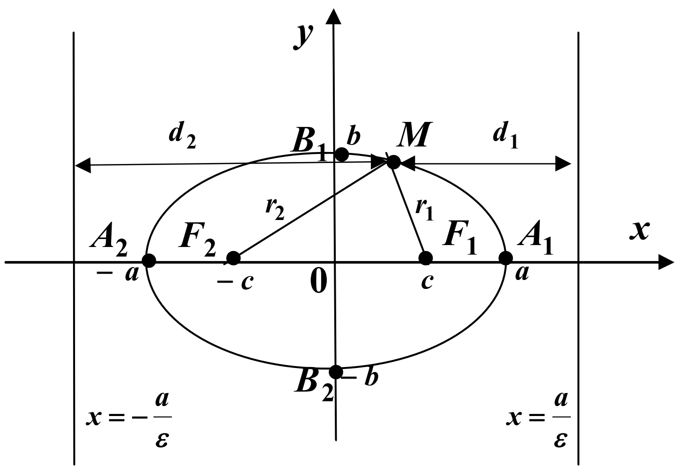


Рис. 3.6

Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ называют ***вершинами*** эллипса .

Точки $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ - ***фокусы*** эллипса $\left(c=\sqrt{a^2-b^2}\right)$.

Отрезок $A_1A_2=2a$ называют ***большой осью*** эллипса, $B_1B_2=2b$ - ***малой осью*** эллипса.

Отрезок $F_1F_2=2c$ называют ***фокусным расстоянием*** эллипса.

Эксцентриситет эллипса – это число, равное отношению расстояния между фокусами к большой оси эллипса:

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \qquad (\varepsilon<1)\ . \tag{3.17}$$

Если $a=b$, то уравнение (3.16) определяет окружность $(\varepsilon=1)$.

Отрезки $F_1M=r_1$ и $F_2M=r_2$ называют ***фокальными радиусами точки*** M. Они вычисляются по формулам:

$$r_1=a-\varepsilon\, x_M, \quad r_2=a+\varepsilon\, x_M\ . \tag{3.18}$$

Прямые, перпендикулярные к фокальной оси и отстоящие от центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$, называются ***директрисами*** эллипса. Их уравнения:

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}. \tag{3.19}$$

Каждая директриса обладает следующим свойством:

$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon$, где d_1, d_2 - расстояния произвольной точки $M(x;y)$ эллипса до соответствующей директрисы.

Если ***фокусы*** эллипса расположены ***на оси*** OY, то уравнение эллипса имеет тот же вид (3.16), но в этом случае $a<b$ (a - малая полуось, b - большая полуось) (рис. 3.7).

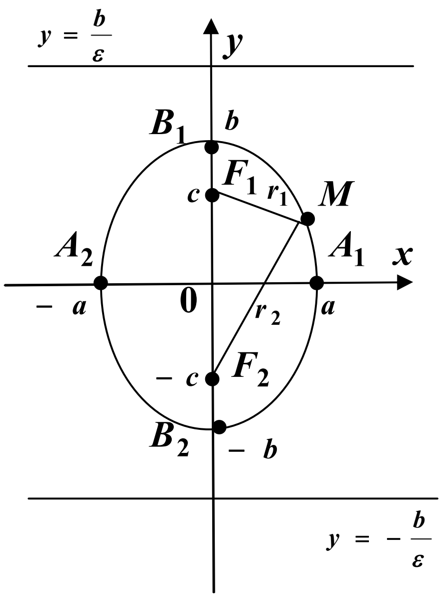


Рис. 3.7

Фокусы эллипса находятся в точках $F_1(0;c)$ и $F_2(0;-c)$ $\left(c=\sqrt{b^2-a^2}\right)$.

Эксцентриситет эллипса

$$\varepsilon=\frac{c}{b}. \tag{3.20}$$

Расстояние от точки M, лежащей на эллипсе, ***до фокусов*** вычисляются по формулам:

$$r_1=b-\varepsilon\, y_M, \quad r_2=b+\varepsilon\, y_M. \tag{3.21}$$

Уравнения директрис запишутся так:

$$y=\pm\frac{b}{\varepsilon}. \tag{3.22}$$

Эллипс ***с центром в точке*** $C(x_0;y_0)$ (рис. 3.8) задаётся уравнением

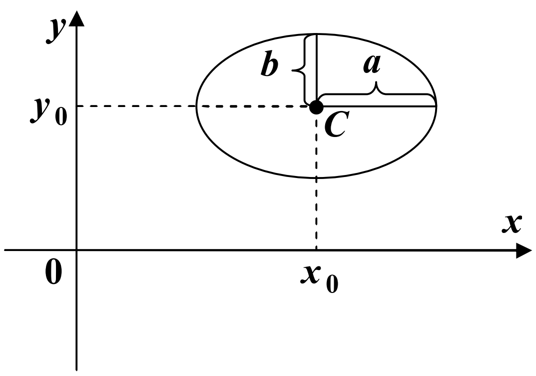


Рис. 3.8

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \tag{3.23}$$

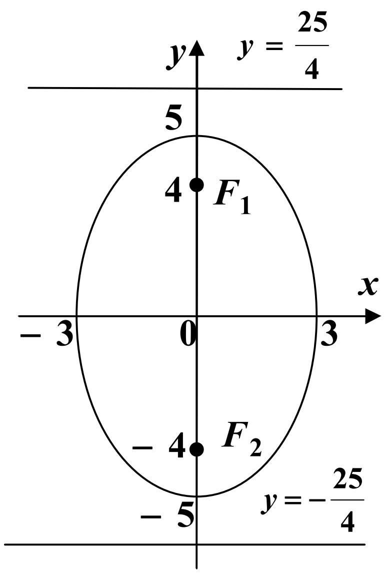
Замечание. Общее уравнение (3.13) определяет эллипс, если в нём $A\neq C$ и $A\cdot C>0$.

Пример 3.2.4. Построить эллипс $25x^2+9y^2-225=0$. Найти длины осей, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения его директрис.

Решение

Приведем уравнение эллипса к каноническому виду (3.16):

$$25x^2+9y^2-225=0\ ,\ 25x^2+9y^2=225\ \Rightarrow\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$$



$a^2=9$, $a=3\Rightarrow 2a=6$ - малая ось.

$b^2=25$, $b=5\Rightarrow 2b=10$ - большая ось.

Найдем $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$. Фокусы эллипса лежат на оси ОУ и имеют координаты $F_1(0;4)$ и $F_2(0;-4)$.

Эксцентриситет вычислим по формуле (3.20): $\varepsilon=\frac{4}{5}$. Запишем уравнения директрис, используя формулу (3.22): $y=\pm\frac{5}{4/5}=\pm\frac{25}{4}$.

Построим эллипс.

Пример 3.2.5. Составить уравнения эллипса, если:

а) большая ось $2a=10$, малая ось $2b=4$;

б) малая ось $2b=24$, расстояние между фокусами $2c=10$;

в) фокусы имеют координаты $F_1(0;3)$ и $F_2(0;-3)$, эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{3}{5}$;

г) большая ось $2b=10$ и эллипс проходит через точку $A(-6;-4)$.

Решение

а) Подставляя в уравнение (3.16) значения параметров $a=5$, $b=2$, получим: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.

б) Из условия задачи ясно, что $b=12$ и $c=5$. Найдем большую полуось эллипса: $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$.

Тогда уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$.

в) Расстояние от начала координат до любого фокуса эллипса $c = 3$. Так как фокусы лежат на оси OY, то эксцентриситет определяется формулой (3.20): $\frac{c}{b} = \frac{3}{5}$, откуда $b = \frac{5c}{3} = \frac{5 \cdot 3}{3} = 5$.

Тогда малая полуось эллипса $a = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

г) Из условия ясно, что $b = 5$. Необходимо найти параметр a. Точка $A(-6;-4)$ принадлежит эллипсу, значит ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса:

$$\frac{(-6)^2}{a^2} + \frac{(-4)^2}{25} = 1, \quad \frac{36}{a^2} + \frac{16}{25} = 1, \quad \frac{36}{a^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow \quad a^2 = 100.$$

Тогда искомое уравнение: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Пример 3.2.6. Определить траекторию точки M, при движении по которой M остается втрое ближе к точке $A(1;0)$, чем к прямой $x - 9 = 0$.

Решение

Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит искомой линии. Выразим расстояние от $M(x; y)$ до $A(1;0)$: $|MA| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Расстояние от точки M до прямой $x - 9 = 0$: $d = \frac{|x-9|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x - 9|$ (см. формулу 3.12).

По условию $3|MA| = d$.

Получим: $3\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x - 9|$.

Возводя обе части уравнения в квадрат, будем иметь:

$$9(x-1)^2 + 9y^2 = (x-9)^2, \quad 9x^2 - 18x + 9 + 9y^2 = x^2 - 18x + 81,$$

$8x^2 + y^2 - 72 = 0$ или $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{72} = 1$ - каноническое уравнение эллипса.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы ***с фокусами на оси*** $\boldsymbol{OX}$ имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (3.24)$$

где a - действительная полуось, b - мнимая полуось (рис. 3.9).

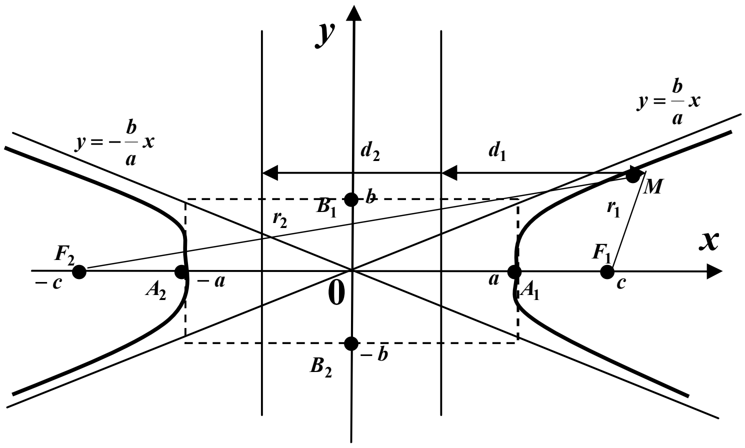


Рис. 3.9

Гипербола имеет две ***действительные вершины*** $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$. Отрезок $A_1A_2=2a$ называют ***действительной осью*** гиперболы; $B_1B_2=2b$ - ***мнимой осью*** гиперболы.

Точки $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ - ***фокусы*** гиперболы $\left(c=\sqrt{a^2+b^2}\right)$.

Эксцентриситет гиперболы – это число, равное отношению расстояния между фокусами к действительной оси :

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \quad (\varepsilon>1). \qquad (3.25)$$

Фокальные радиусы точки $\boldsymbol{M}$ гиперболы вычисляются по формулам:

$$r_1=\left|a-\varepsilon\, x_M\right|, \quad r_2=\left|a+\varepsilon\, x_M\right|. \qquad (3.26)$$

Прямые, перпендикулярные к фокальной оси и отстоящие от центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$, называются ***директрисами*** гиперболы. Их уравнения имеют вид:

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}. \qquad (3.27)$$

Для директрис гиперболы имеет место указанное выше свойство:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon .$$

Асимптоты гиперболы – это прямые, расстояние от которых до произвольной точки гиперболы стремится к нулю по мере её неограниченного удаления от начала координат (это диагонали основного прямоугольника гиперболы со сторонами $2a$ и $2b$). Их уравнения:

$$y = \pm \frac{b}{a} x . \qquad (3.28)$$

Если ***фокусы*** гиперболы лежат ***на оси*** OY, то гипербола определяется уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3.29)$$

где b - действительная полуось, a - мнимая полуось (рис. 3.10).

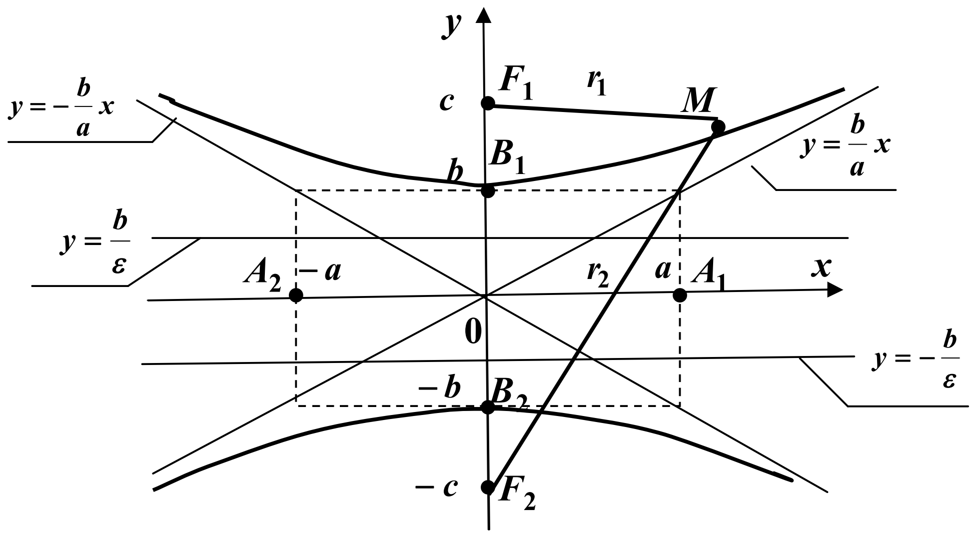


Рис. 3.10

Действительные вершины гиперболы находятся в точках $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$.

Фокусы гиперболы: $F_1(0;c)$ и $F_2(o;-c)$ $\left(c = \sqrt{a^2 + b^2}\right)$.

Эксцентриситет гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{b} . \qquad (3.30)$$

Расстояние от точки M гиперболы ***до*** её ***фокусов***:

$$r_1 = |b - \varepsilon\, y_M|, \quad r_2 = |b + \varepsilon\, y_M|. \tag{3.31}$$

Директрисы гиперболы задаются уравнениями

$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon}. \tag{3.32}$$

Асимптоты гиперболы имеют вид:

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{3.33}$$

Если для гиперболы $a = b$, то она задаётся уравнением $x^2 - y^2 = a^2$ и называется ***равносторонней***.

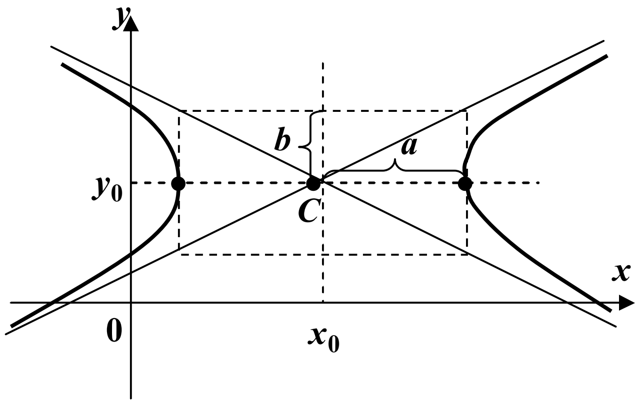


Рис. 3.11

Если ***центр*** гиперболы находится ***в точке*** $C(x_0\,;\,y_0)$ (рис. 3.11), то её уравнение

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{3.34}$$

Замечание. Общее уравнение (3.13) определяет гиперболу, если в нём $B = 0$ и $A \cdot C < 0$.

Пример 3.2.7. Построить гиперболу $x^2 - 4y^2 - 36 = 0$. Найти её оси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения асимптот.

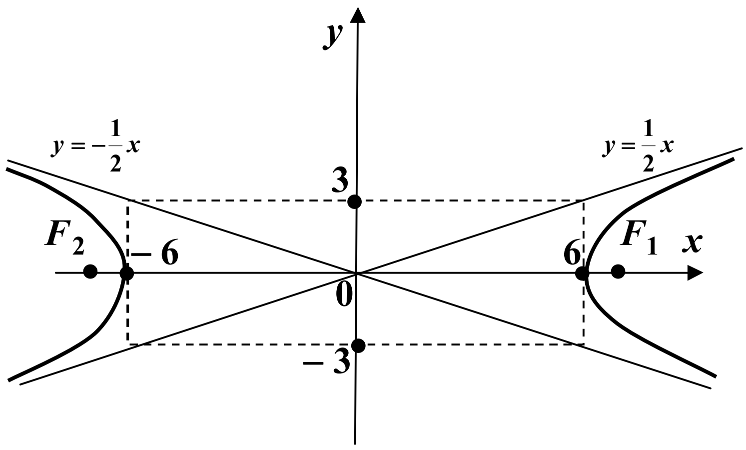
Решение

Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду (3.24):

$$x^2 - 4y^2 - 36 = 0,\; x^2 - 4y^2 = 36 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Имеем: $a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$; $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. Тогда действительная ось гиперболы $2a = 12$, а мнимая ось $2b = 6$. Найдем расстояние от начала координат до фокусов: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5}$. Тогда фокусы гиперболы находятся в точках: $F_1\left(3\sqrt{5};0\right)$ и $F_2\left(-3\sqrt{5};0\right)$.

Эксцентриситет гиперболы вычислим по формуле (3.25): $\varepsilon = \dfrac{3\sqrt{5}}{6} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Для записи уравнений асимптот используем формулу (3.28): $y = \pm\dfrac{3}{6}x = \pm\dfrac{1}{2}x$. Построим гиперболу.



Пример 3.2.8. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси OX, если:

а) ее оси $2a = 10$ и $2b = 16$;

б) расстояние между фокусами $2c = 10$ и ось $2b = 8$;

в) ось $2a = 16$ и эксцентриситет $\varepsilon = 5/4$;

г) уравнение асимптот $y = \pm\dfrac{4}{3}x$, а расстояние между фокусами $2c = 20$.

Решение

а) $2a = 10 \Rightarrow a = 5$; $2b = 16 \Rightarrow b = 8$. Подставив найденные значения a и b в формулу (3.24), найдем уравнение искомой гиперболы: $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{64} = 1$.

б) По условию $b = 4$ и $c = 5$. Найдем действительную полуось:
$c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$.

Получим уравнение: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

в) $a=8$, а $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{4}\Rightarrow$ $c=\dfrac{5\cdot 8}{4}=10$. Тогда $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

Искомое уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$.

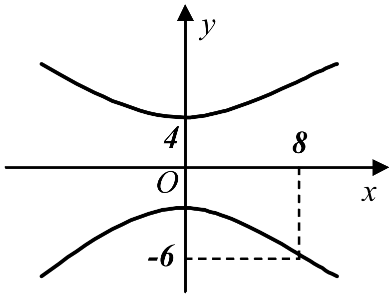
г) $c=10$, а уравнения асимптот $y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm\dfrac{4}{3}x$, $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow$ $a=\dfrac{3b}{4}$.

Для гиперболы параметры a, b, c связаны формулой $c^2=a^2+b^2$:

$100=\dfrac{9b^2}{16}+b^2$, $\dfrac{25b^2}{16}=100$, $b^2=64$, значит, $b=8\Rightarrow$ $a=\dfrac{3\cdot 8}{4}=6$.

Тогда уравнение гиперболы запишется так: $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$.

Пример 3.2.9. Записать уравнение кривой, изображенной на рисунке



Решение

Дана гипербола с фокусами на оси OY, для которой известна вершина $B_1(0;4)$ и произвольная точка с координатами $(8;-6)$. Подставим $b=4$, $x=8$ и $y=-6$ в уравнение (3.29) и найдем из него a^2:

$$-\frac{8^2}{a^2}+\frac{(-6)^2}{4^2}=1,\quad -\frac{64}{a^2}+\frac{36}{16}=1,\quad \frac{64}{a^2}=\frac{9}{4}-1,\quad \frac{64}{a^2}=\frac{5}{4}\Rightarrow\quad a^2=\frac{256}{5}.$$

Каноническое уравнение гиперболы: $-\dfrac{x^2}{256/5}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Преобразуем это уравнение в общее:

$$-\frac{5x^2}{256}+\frac{y^2}{16}=1,\ -5x^2+16y^2=256\ \Rightarrow\ 5x^2-16y^2+256=0.$$

Пример 3.2.10. Определяет ли уравнение $16x^2-9y^2-64x-18y-89=0$ гиперболу? Построить кривую.

Решение

Приведём уравнение к каноническому виду:

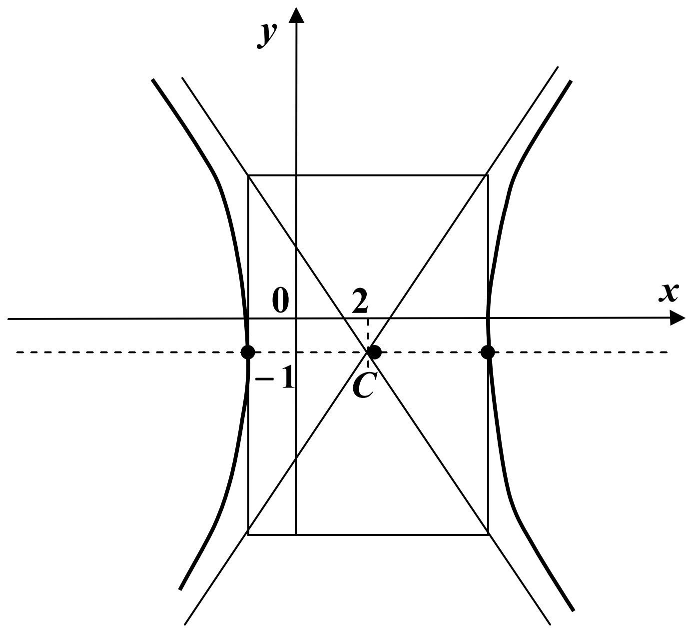
$16x^2-9y^2-64x-18y-89=0$, $16\left(x^2-4x\right)-9\left(y^2+2y\right)-89=0$,

$16\left(x^2-4x+4-4\right)-9\left(y^2+2y+1-1\right)-89=0$,

$16(x-2)^2-64-9(y+1)^2+9-89=0$, $16(x-2)^2-9(y+1)^2=144$,

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=1 .$$

Полученное уравнение определяет гиперболу с центром в точке $C(2;-1)$, осями $2a=6$ и $2b=8$. Построим гиперболу.



Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой фокусом и от данной прямой, называемой директрисой.

Параболы с вершиной в начале координат и ***осью симметрии OX*** задаются уравнениями:

$$y^2=2px \quad \text{или} \tag{3.35}$$

$$y^2=-2px, \tag{3.36}$$

где p - параметр параболы.

Фокус таких парабол находится в точке $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ (рис. 3.12) или $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$ (рис. 3.13). ***Директриса*** определяется уравнением $x=-\frac{p}{2}$ или $x=\frac{p}{2}$ соответственно.

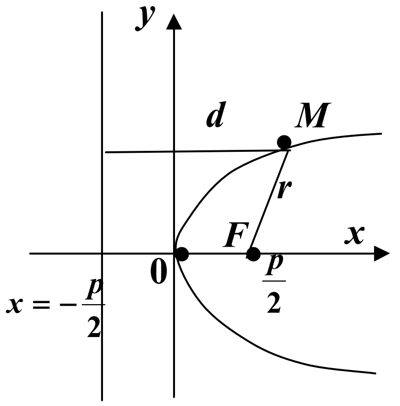


Рис. 3.12

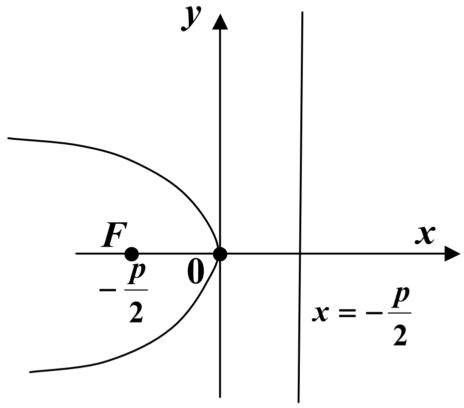


Рис. 3.13

Если ***осью симметрии*** параболы является ***ось*** OY, то уравнения парабол имеют вид:

$$x^2=2py \quad \text{или} \tag{3.37}$$

$$x^2=-2py. \tag{3.38}$$

Для этих парабол ***фокус*** находится в точке $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ (рис. 3.14) или $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$ (рис. 3.15). Уравнение ***директрисы*** запишется $y=-\frac{p}{2}$ или $y=\frac{p}{2}$ соответственно.

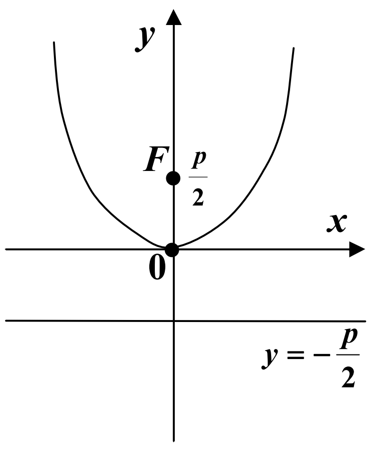


Рис. 3.14

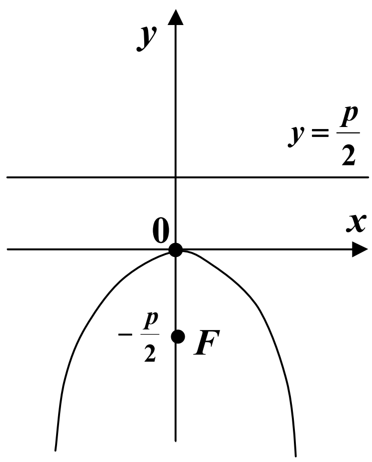


Рис. 3.15

Замечание. Параметр параболы p выражает расстояние от её фокуса до директрисы ($p > 0$).

Фокальный радиус произвольной точки M параболы вычисляется по формулам: $r = \left| x + \frac{p}{2} \right|$ (для парабол симметричных относительно оси OX) и $r = \left| y + \frac{p}{2} \right|$ (для парабол, симметричных относительно оси OY).

Для любой точки M, лежащей на параболе, из определения кривой следует, что $\frac{r}{d} = 1$ (эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$).

Уравнения парабол ***с вершиной в точке*** $C(x_0 ; y_0)$ ***и осью симметрии параллельной оси*** OX (рис. 3.16) имеют вид:

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0). \qquad (3.39)$$

Уравнения парабол ***с вершиной в точке*** $C(x_0 ; y_0)$ ***и осью симметрии параллельной оси*** OY (рис. 3.17) записываются так:

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0). \qquad (3.40)$$

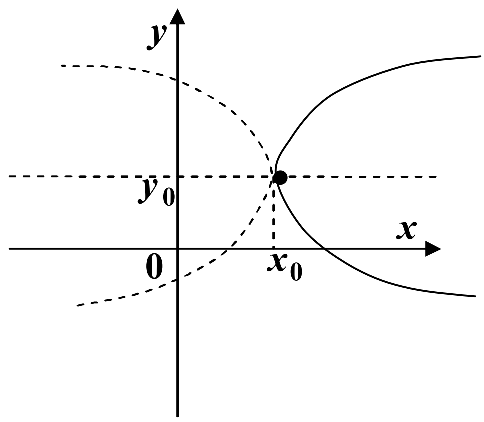


Рис. 3.16

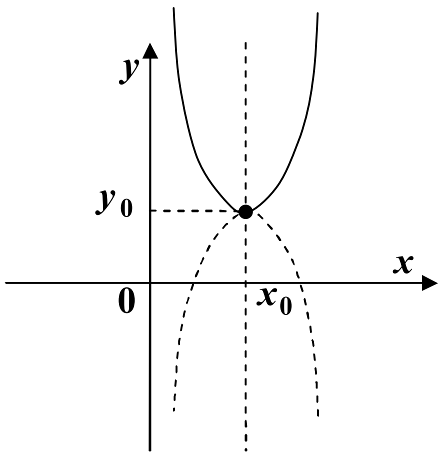


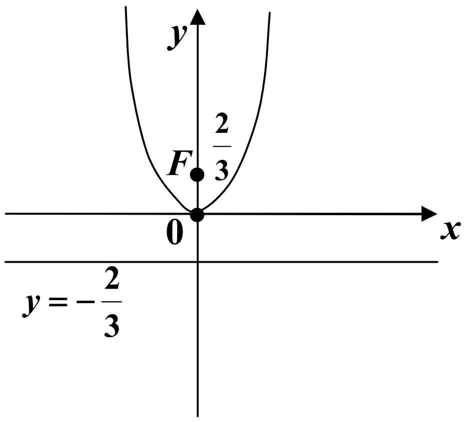
Рис. 3.17

Замечание. Общее уравнение (3.13) определяет параболу, если в нём $B = 0$ и $A \cdot C = 0$.

Пример 3.2.11. Построить параболу $3x^2-8y=0$. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

Решение

Приведем уравнение параболы к виду (3.37): $3x^2=8y\Rightarrow\ x^2=\frac{8}{3}y$. Уравнение определяет параболу с вершиной в точке $O(0;0)$ и осью симметрии OY. Ее параметр: $2p=\frac{8}{3}\Rightarrow p=\frac{4}{3}$. Парабола имеет фокус в точке $F\left(0;\frac{2}{3}\right)$ и директрису $y=-\frac{2}{3}$. Построим параболу.



Пример 3.2.12. Составить уравнение параболы, если:

а) вершина лежит в точке $(0;0)$, а координаты фокуса $F(4;0)$;

б) расстояние между фокусом и директрисой равно 6, вершина находится в точке $(0;0)$, парабола лежит в нижней полуплоскости;

в) парабола симметрична относительно оси ординат и проходит через точку $M(5;1)$;

г) вершина имеет координаты $(-2;2)$, расстояние между фокусом и директрисой равно пяти, а ветви направлены влево.

Решение

а) Так как фокус параболы расположен на положительном направлении оси OX, то уравнение ищем в виде (3.35).

Необходимо найти параметр p: $\frac{p}{2}=4\Rightarrow 2p=16$.

Тогда уравнение параболы $y^2=16x$.

б) Данным задачи соответствует уравнение (3.38). По условию $p = 6$, поэтому уравнение параболы: $x^2 = -12y$.

в) Парабола, симметричная относительно оси ординат, задается уравнением (3.37). Так как точка $M(5;1)$ лежит на параболе, то её координаты удовлетворяют уравнению кривой: $5^2 = 2p \cdot 1 \Rightarrow 2p = 25$.

Тогда парабола задается уравнением $x^2 = 25y$.

г) Для составления уравнения параболы со смещенной вершиной воспользуемся формулой (3.39). Подставим значения $x_0 = -2$, $y_0 = 2$, $p = 5$ в это уравнение: $(y-2)^2 = -10(x+2)$.

Пример 3.2.13. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $F(3;1)$ и от прямой $x + 2 = 0$. Построить кривую.

Решение

Пусть $M(x;y)$ принадлежит данному геометрическому месту точек. Выразим расстояние от $M(x;y)$ до $F(3;1)$: $|MF| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$.

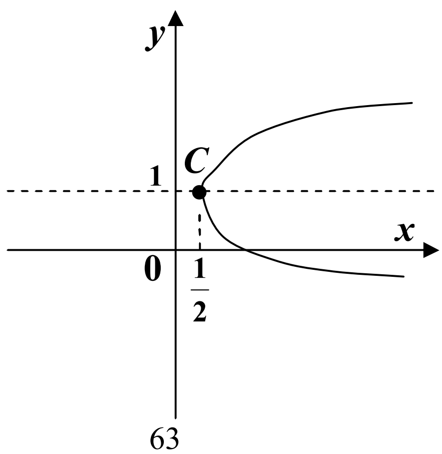
Расстояние d от точки $M(x;y)$ до прямой $x + 2 = 0$: $d = \dfrac{|x+2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x+2|$.

По условию $|MF| = d$. Подставляя, получим:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = |x+2|, \quad (x-3)^2 + (y-1)^2 = (x+2)^2,$$

$$x^2 - 6x + 9 + (y-1)^2 = x^2 + 4x + 4, \quad (y-1)^2 = 10x - 5 \Rightarrow$$

$(y-1)^2 = 10\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ - уравнение параболы с вершиной в точке $C\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.



Задания для самостоятельной работы

1. Построить кривые: а) $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$; б) $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$;

в) $5y^2 + 16x = 0$; г) $3x^2 - 8y + 4 = 0$.

Для ***эллипса*** найти координаты фокусов и уравнения директрис, для ***гиперболы*** - эксцентриситет и уравнения асимптот, для ***параболы*** – расстояние между фокусом и директрисой.

2. Записать уравнение геометрического места точек, удаленных от точки $B(0;-2)$ на расстоянии 5 единиц.

3. Составить уравнение эллипса, если его малая ось $2a = 10$, а $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{74}}{5}$.

4. Построить равностороннюю гиперболу с фокусами $F_1(\sqrt{17};0)$ и $F_2(-\sqrt{17};0)$.

5. Составить уравнение параболы, которая симметрична относительно оси OY и проходит через точку пересечения окружности $x^2 + y^2 + 4y = 0$ с прямой $x + y = 0$.

6. Привести уравнения кривых к каноническому виду и построить :

а) $x^2 + 2x + y^2 - 8y + 1 = 0$; б) $y^2 - 12y - x + 14 = 0$; в) $x^2 + 4y^2 - 24y = 0$;

г) $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$.

7. Определить траекторию движения точки $M(x;y)$, которая при перемещении остается вдвое ближе к прямой $x = 1$, чем к точке $F(4;0)$.

3.3. Плоскость

Уравнение первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.41}$$

где A, B, C одновременно не равны нулю, называется ***общим уравнением плоскости***. Вектор $\overline{N} = (A;B;C)$ называется ***нормальным вектором (или нормалью)*** плоскости.

Рассмотрим частные случаи этого уравнения.

1. Если в уравнении отсутствует слагаемое с какой-нибудь переменной, то плоскость параллельна соответствующей координатной оси.

Например, плоскость, заданная уравнением $Ax + Cz + D = 0$, параллельна оси $OY(B = 0)$.

2. Если в уравнении отсутствуют слагаемые с двумя переменными, то плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости.

Например, плоскость, заданная уравнением $Ax + D = 0$, параллельна плоскости $Oyz(B = C = 0)$.

3. Если в уравнении отсутствует свободный член, то плоскость проходит через начало координат и задаётся уравнением $Ax + By + Cz = 0$ $(D = 0)$.

4. Если в уравнении отсутствуют слагаемое с какой-нибудь переменной и свободный член, то плоскость проходит через соответствующую координатную ось. Например, плоскость $Ax + By = 0$ проходит через ось $Oz(C = D = 0)$.

Приведём уравнения координатных плоскостей: $z = 0$ (плоскость Oxy); $x = 0$ (плоскость Oyz); $y = 0$ (плоскость Oxz).

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***с нормальным вектором*** $\overline{N} = (A; B; C)$ (рис. 3.18) имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3.42)$$

Уравнение плоскости в отрезках на осях записывается так:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (3.43)$$

где a, b, c - величины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно (рис. 3.19).

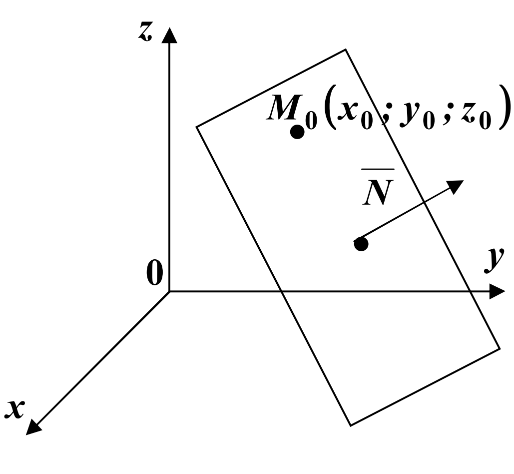


Рис. 3.18

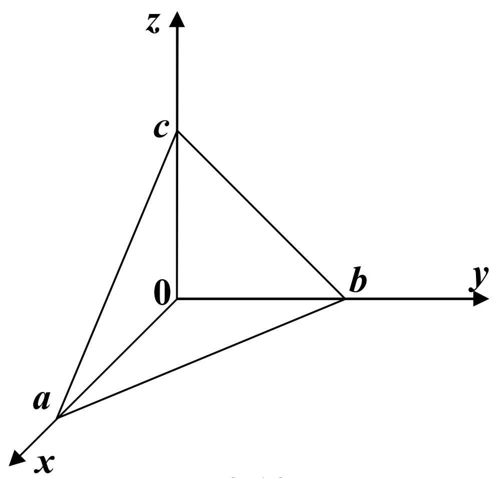


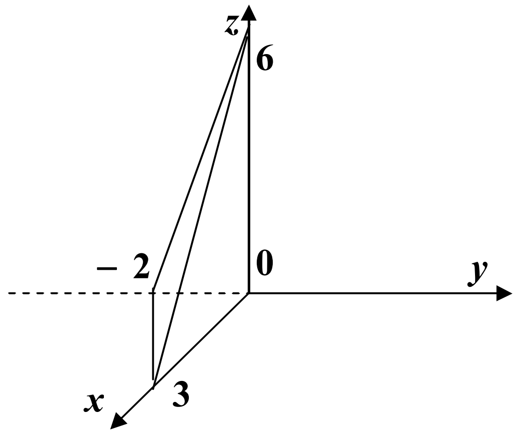
Рис. 3.19

Пример 3.3.1. Построить плоскости: а) $\boldsymbol{2x-3y+z-6=0}$; б) $\boldsymbol{y-4z+4=0}$; в) $\boldsymbol{y-5=0}$.

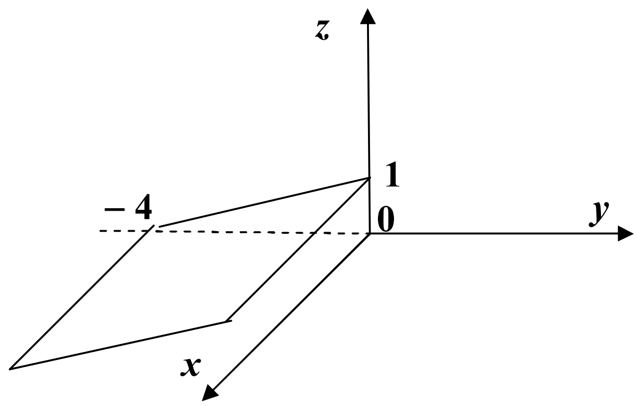
Решение

Преобразуем общее уравнение плоскости в уравнение в отрезках на осях:

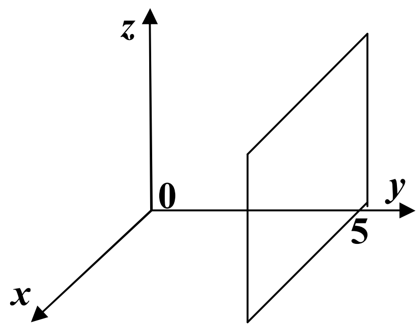
а) $\boldsymbol{2x-3y+z-6=0}$, $\boldsymbol{2x-3y+z=6} \Rightarrow \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{3}}-\dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{2}}+\dfrac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{6}}=\boldsymbol{1}$.



б) $\boldsymbol{y-4z+4=0}$, $\boldsymbol{y-4z=-4} \Rightarrow \dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{-4}}+\dfrac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{1}}=\boldsymbol{1}$. Плоскость параллельна оси $\boldsymbol{Ox}$, т.е. проходит через прямые, параллельные этой оси.



в) $\boldsymbol{y-5=0} \Rightarrow \dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{5}}=\boldsymbol{1}$. Плоскость параллельна координатной плоскости $\boldsymbol{Oxz}$, т.е. проходит через прямые, параллельные осям $\boldsymbol{Ox}$ и $\boldsymbol{Oz}$.



Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{3.44}$$

Пример 3.3.2. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $A(-2;1;3)$ перпендикулярно вектору $\overline{AC}$, если $C(2;-1;4)$;

б) через точку $M(-1;1;3)$ и ось Oy;

в) через точку $P(1;0;-1)$ параллельно плоскости $2x-y+3z=0$;

г) через точки $A(1;1;1)$, $B(0;-1;2)$ и $C(2;3;-1)$.

Решение

а) Вектор $\overline{AC}=(2-(-2);-1-1;4-3)=(4;-2;1)$ является нормалью к плоскости. Подставим координаты вектора и точки $A(-2;1;3)$ в уравнение (3.41): $4(x-(-2))-2(y-1)+1(z-3)=0$, $4x+8-2y+2+z-3=0 \Rightarrow$ $4x-2y+z+7=0$ - искомое уравнение.

б) ***1 способ***. Так как плоскость проходит через ось Oy, то ее общее уравнение имеет вид $Ax+Cz=0$ $(B=D=0)$. Точка $M(-1;1;3)$ лежит в плоскости, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости: $A\cdot(-1)+C\cdot 3=0$, $-A+3C=0 \Rightarrow A=3C$. Тогда искомое уравнение: $3Cx+Cz=0 \Rightarrow 3x+z=0$.

2 способ. Плоскость α проходит через ось Oy, значит, единичный вектор этой оси $\bar{j}=(0;1;0)$ лежит в этой плоскости. Плоскость также проходит через начало координат и точку $M(-1;1;3)$, т.е. вектор $\overline{OM}=(-1;1;3)$ принадлежит α. Так как векторное произведение двух векторов, лежащих в одной плоскости, дает вектор, перпендикулярный этой плоскости, то его можно принять в качестве нормали к плоскости:

$$\overline{N}=\bar{j}\times\overline{OM}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3\bar{i}+\bar{k} \;\Rightarrow\; \overline{N}=(3;0;1).$$

Уравнение плоскости: $3(x+1)+1(z-3)=0$,

$$3x+3+z-3=0 \Rightarrow 3x+z=0.$$

в) Плоскость $2x-y+3z=0$ имеет нормальный вектор $\overline{N}=(2;-1;3)$. Так как искомая плоскость α параллельна данной, то вектор $\overline{N}$ перпендикулярен α, т.е. может служить ее нормалью.

Тогда уравнение плоскости: $2(x-1)-(y-0)+3(z+1)=0$,

$$2x-2-y+3z+3=0 \Rightarrow 2x-y+3z+1=0.$$

г) Используем уравнение плоскости, проходящей через три точки (3.44):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0-1 & -1-1 & 2-1 \\ 2-1 & 3-1 & -1-1 \end{vmatrix}=0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

Вычислим определитель разложением по элементам первой строки:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$2(x-1)-(y-1)=0, \qquad 2x-1-y+1=0 \;\Rightarrow\; 2x-y-1=9.$$

Угол между двумя плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ равен острому углу между их нормальными векторами $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ (см. формулу 2.10) и вычисляется так:

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (3.45)$$

Пример 3.3.3. Найти угол между плоскостями $x-2y+z-1=0$ и $y+3z-1=0$.

Решение

Нормалями плоскостей являются векторы $\overline{N_1}=(1;-2;1)$ и $\overline{N_2}=(0;1;3)$. Угол φ между ними найдем по формуле (3.45):

$$\cos\varphi=\frac{|1\cdot 0-2\cdot 1+1\cdot 3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{0^2+1^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{60}} \Rightarrow \varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{60}}.$$

Условием параллельности двух плоскостей является коллинеарность их нормалей, а по условию коллинеарности векторов (см. п. 2.2):

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (3.46)$$

Пример 3.3.4. Параллельны ли плоскости $2x-y+z+1=0$ и $4x-2y-2z+5=0$?

Решение

Проверим выполнение условия параллельности плоскостей (3.46). Нормальные векторы плоскостей $\overline{N}_1=(2;-1;1)$ и $\overline{N}_2=(4;-2;-2)$ не коллинеарны, т.к. $\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{1}{-2}$. Значит, плоскости не параллельны.

Условием перпендикулярности двух плоскостей является перпендикулярность их нормалей, а по условию перпендикулярности векторов (см. п. 2.2):

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (3.47)$$

Пример 3.3.5. При каком значении α плоскости $x-y+1=0$ и $\alpha x+y-z+1=0$ перпендикулярны?

Решение

Используем условие перпендикулярности плоскостей (3.47). Найдём скалярное произведение нормалей $\overline{N}_1=(1;-1;0)$ и $\overline{N}_2=(\alpha;1;-1)$:

$$\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2=1\cdot\alpha-1\cdot1+0\cdot(-1)=\alpha-1=0\Rightarrow\alpha=1.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+$ $+D=0$ определяют по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.48)$$

Пример 3.3.6. Найти расстояние от точки $A(1;5;4)$ до плоскости, которая отсекает от координатных осей отрезки $a=1,\ b=3,\ c=-2$.

Решение

Составим уравнение плоскости α в отрезках на осях (3.43): $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}-\frac{z}{2}=1$. Общее уравнение этой плоскости: $6x+2y-3z-6=0$.

Тогда расстояние d от точки $A(1;5;4)$ до плоскости α можно вычислить по формуле (3.48):

$$d=\frac{|6\cdot 1+2\cdot 5-3\cdot 4-6|}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{14}}=\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Построить плоскости $x-3y+4z+12=0$; $4x-y-8=0$; $z=-3$.
2. Записать уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1;0;-1)$:
   а) параллельно векторам $\bar{a}=(0;1;-2)$ и $\bar{b}=(-1;0;1)$;
   б) перпендикулярно плоскостям $x+2y+1=0$ и $3x-2y+z-4=0$;
   в) и точку $N(1;-1;2)$ перпендикулярно плоскости $x-2y+3z+5=0$.
3. Найти объем пирамиды, которую отсекает плоскость $6x+2y-3z+12=0$ от координатного угла.
4. Найти расстояние между плоскостями $x+5y-2z=0$ и $x+5y-2z+1=0$, если они параллельны, или угол между ними, если они пересекаются.

3.4. Прямая в пространстве

Прямую в пространстве будем рассматривать как линию пересечения двух плоскостей (рис. 3.20):

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Уравнения (3.47) называются ***общими уравнениями прямой***.

Уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\bar{s} = (l; m; n)$, имеют вид:

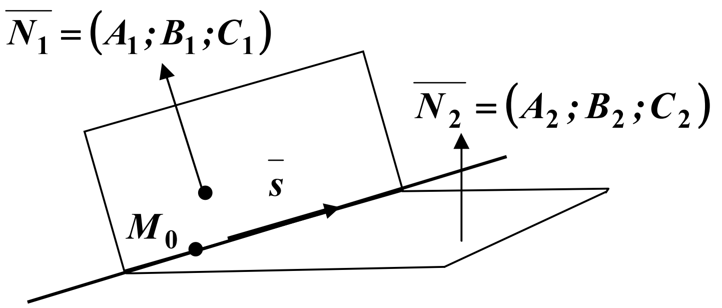


Рис. 3.20

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad (3.50)$$

и называются ***каноническими уравнениями прямой***. Вектор $\bar{s}$ - ***направляющий вектор*** прямой (рис. 3.20).

Если каждое из отношений формулы (3.48) приравнять параметру t, а затем разрешить полученные соотношения относительно переменных, получим ***параметрические уравнения прямой***

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \qquad (3.51)$$

Пример 3.4.1. Прямая задана общими уравнениями $\begin{cases} 2x - y + 2z - 4 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0. \end{cases}$

Записать канонические и параметрические уравнения прямой.

Решение

Выберем какую-либо точку M на прямой. Для этого одну координату зададим произвольно, а две другие определим из уравнений прямой.

Пусть $x = 0$, тогда $\begin{cases} -y + 2z - 4 = 0, \\ 2y - z - 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2, \\ z = 3. \end{cases}$

Точка $M(0;2;3)$ лежит на прямой.

Найдем направляющий вектор прямой $\bar{s}$. Так как прямая принадлежит двум плоскостям с нормалями $\overline{N}_1 = (2;-1;2)$ и $\overline{N}_2 = (1;2;-1)$, то она перпендикулярна векторам $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ и $\bar{s} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2$.

$$\bar{s}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3\bar{i}+4\bar{j}+5\bar{k}\quad\Rightarrow$$

$\bar{s}=(-3;4;5)$.

Канонические уравнения прямой составим по формуле (3.50): $\frac{x-0}{-3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$ или $\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

Тогда параметрические уравнения (см.(3.51)): $\begin{cases}x=-3t,\\ y=2+4t,\\ z=3+5t.\end{cases}$

Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.52)$$

Пример 3.4.2. Составить уравнения прямой, которая проходит:

а) через точки $M_1(1;-2;1)$ и $M_2(3;1;-1)$;

б) через точку $A(2;0;-3)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{1}$;

в) через точку $D(2;1;4)$ перпендикулярно прямым $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ и

$$\begin{cases}x=3-7t,\\ y=1+2t,\\ z=1+3t.\end{cases}$$

Решение

а) Для составления уравнений воспользуемся формулой (3.52): $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-(-2)}{1-(-2)}=\frac{z-1}{-1-1}\;\Rightarrow\;\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$.

б) Так как прямые параллельны, то их направляющие векторы коллинеарны, значит, могут быть и равными, т.е. $\bar{s}=\overline{s_1}=(5;-2;1)$.

Составим канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;0;-3)$ с направляющим вектором $\bar{s}=(5;-2;1)$: $\frac{x-2}{5}=\frac{y-0}{-2}=\frac{z-(-3)}{1}$ или $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{1}$.

в) Прямая перпендикулярна двум данным прямым с направляющими векторами $\overline{s_1}=(1;2;-1)$ и $\overline{s_2}=(-7;2;3)$. Тогда ее направляющий вектор $\bar{s}$ перпендикулярен $\overline{s_1}$ и $\overline{s_2}$, т.е. $\bar{s}=\overline{s_1}\times\overline{s_2}$.

$$\bar{s}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & -1\\ -7 & 2 & 3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -7 & 3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -7 & 2\end{vmatrix}=8\bar{i}+4\bar{j}+16\bar{k}.$$

Подставим координаты точки D и направляющего вектора в канонические уравнения прямой (3.50): $\frac{x-3}{8}=\frac{y-(-2)}{4}=\frac{z-1}{16}$ или $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{4}$.

Пример 3.4.3. Найти точку пересечения прямых $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$ и $\frac{x-4}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-4}{2}$.

Решение

Запишем уравнения прямых в параметрическом виде:

$$l_1:\begin{cases}x=1+t,\\ y=-1+3t,\\ z=2+4t;\end{cases}\quad \text{и}\quad l_2:\begin{cases}x=4+3t,\\ y=-2-t,\\ z=4+2t.\end{cases}$$

Пусть $(x_0;y_0;z_0)$ - точка пересечения, которой в уравнениях первой прямой соответствует значение параметра t_1, а в уравнениях второй прямой – значение параметра t_2:

$$\begin{cases}x_0=1+t_1,\\ y_0=-1+3t_1,\\ z_0=2+4t_1;\end{cases}\quad \text{и}\quad \begin{cases}x_0=4+3t_2,\\ y_0=-2-t_2,\\ z_0=4+2t_2.\end{cases}$$

Координаты точки пересечения прямых должны удовлетворять уравнениям обеих прямых, а именно:

$$\begin{cases} 1 + t_1 = 4 + 3t_2, \\ -1 + 3t_1 = -2 - t_2, \\ 2 + 4t_1 = 4 + 2t_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 - 3t_2 = 3, \\ 3t_1 + t_2 = -1, \\ 4t_1 - 2t_2 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 - 3t_2 = 3, \\ 4t_1 - 2t_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0, \\ t_2 = -1. \end{cases}$$

Тогда искомая точка имеет координаты: $\begin{cases} x_0 = 1 + 0 = 1, \\ y_0 = -1 + 3 \cdot 0 = -1, \\ z_0 = 2 + 4 \cdot 0 = 2. \end{cases}$

$M(1;-1;2)$ - точка пересечения прямых.

Замечание. Если полученная система не имеет решений, то прямые не пересекаются.

Если прямая перпендикулярна одной из координатных осей, то её уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 lt, \\ y = y_0, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0. \end{cases}$$

($\perp$ оси Ox) ($\perp$ оси Oy) ($\perp$ оси Oz).

Под углом между двумя прямыми $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ и $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ будем понимать угол между направляющими векторами этих прямых $\overline{s_1}$ и $\overline{s_2}$ (см. формулу 2.10) и вычислять так:

$$\cos\varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{3.53}$$

Пример 3.4.4. Найти угол между прямыми $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ и $\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = 5 + t. \end{cases}$

Решение

Направляющие векторы прямых: $\overline{s_1} = (1;-2;3)$ и $\overline{s_2} = (3;-2;1)$.

По формуле (3.53) найдем косинус угла φ между прямыми:

$$cos\,\varphi = \frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{5}{7} \Rightarrow \varphi = arccos\frac{5}{7}.$$

Условием параллельности двух прямых является коллинеарность их направляющих векторов, а значит,

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (3.54)$$

Условием перпендикулярности двух прямых будет перпендикулярность их направляющих векторов, следовательно

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \qquad (3.55)$$

Пример 3.4.5. При каком значении m прямые $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{m} = \frac{z-1}{-2}$ и $\frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$ а) параллельны; б) перпендикулярны ?

Решение

а) Направляющие векторы прямых: $\overline{s_1} = (1;m;-2)$ и $\overline{s_2} = (-2;1;4)$. Условие параллельности прямых определяется формулой (3.54): $\frac{1}{-2} = \frac{m}{1} = \frac{-2}{4} \Rightarrow m = 4$.

б) Прямые перпендикулярны, если выполняется условие (3.55): $1 \cdot (-2) + m \cdot 1 + (-2) \cdot 4 = 0$, $m - 10 = 0 \;\Rightarrow\; m = 10$.

Пример 3.4.6. Найти расстояние между прямыми $\begin{cases} x = -1 - 2t, \\ y = 3 + t, \\ z = 3 + t; \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = t, \\ z = -2 + t. \end{cases}$

Решение

Данные прямые параллельны, так как $\overline{s_1} = \overline{s_2} = (-2;1;1)$. Расстояние между параллельными прямыми – это расстояние от точки взятой на одной из них, до ее проекции на другую прямую.

Прямая l_1 проходит через точку $M(-1;3;3)$. Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - проекция данной точки на прямую l_2. Тогда $|MM_0|$ - искомое расстояние. Будем считать, что точке M_0 соответствует параметр t_0 прямой l_2, тогда её координаты равны: $x_0 = 1 - 2t_0$, $y_0 = t_0$ и $z_0 = -2 + t_0$.

Векторы $\overline{s_1}$ и $\overline{MM_0} = (-2t_0 + 2;t_0 - 3;t_0 - 5)$ перпендикулярны, значит, $\overline{s_1} \cdot \overline{MM_0} = 0$.

Будем иметь: $(2 - 2t_0)\cdot(-2) + (t_0 - 3)\cdot 1 + (t_0 - 5)\cdot 1 = 0$,

$$-4 + 4t_0 + t_0 - 3 + t_0 - 5 = 0,\ 6t_0 - 12 = 0 \Rightarrow t_0 = 2.$$

Тогда координаты точки M_0: $x_0 = 1 - 2\cdot 2 = -3$, $y_0 = 2$, $z_0 = -2 + 2 = 0$, а координаты вектора $\overline{MM_0} = (-2;-1;-3)$.

Найдем $|MM_0|$: $|MM_0| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Лежат ли точки $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;1)$ и $C(0;-3;-4)$ на одной прямой?

2. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(3;1;-1)$ параллельно оси Ox.

3. Доказать, что прямые $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z = 0 \end{cases}$ и $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{3}$ перпендикулярны.

4. Как расположены относительно друг друга прямые $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$ и $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$?

5. Составить уравнение и найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $M(1;0;4)$ на прямую $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0, \\ 2x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$.

3.5. Прямая и плоскость в пространстве

Под углом между прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ ***и плоскостью*** $Ax+By+Cz+D=0$ будем понимать угол между прямой и её проекцией на плоскость.

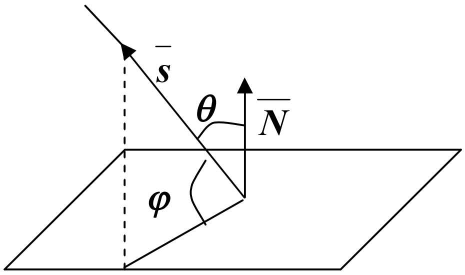


Рис. 3.21

Он измеряется острым углом θ между нормалью к плоскости и направляющим вектором прямой (рис. 3.21), и определяется по формуле:

$$\sin\varphi=\cos\theta=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (3.56)$$

Пример 3.5.1. Найти угол между прямой $\begin{cases}x=1,\\ y=2t,\\ z=-1+t\end{cases}$ и плоскостью $x-y-z+1=0$.

Решение

Нормаль к плоскости имеет координаты $\bar{N}=(1;-1;-1)$, а направляющий вектор прямой $\bar{s}=(0;2;1)$. По формуле (3.56) вычислим угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot 0-1\cdot 2-1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{5}}=\sqrt{0,6}\ \Rightarrow \varphi=\arcsin\sqrt{0,6}.$$

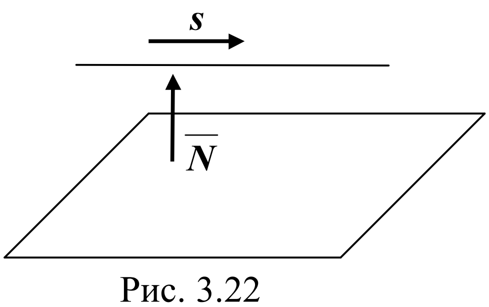


Рис. 3.22

Условием параллельности прямой и плоскости является перпендикулярность нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой (рис. 3.22), а значит,

$$Al+Bm+Cn=0. \qquad (3.57)$$

Пример 3.5.2. При каком значении коэффициента A плоскость $Ax+2y-z+5=0$ параллельна прямой $\begin{cases} x=2t, \\ y=-1+3t, \\ z=3+3t. \end{cases}$

Решение

Плоскость и прямая параллельны, если выполняется условие (3.57). Координаты нормали плоскости $\overline{N}=(A;2;-1)$, а направляющего вектора прямой $\overline{s}=(2;3;3)$.

Найдем $\overline{N}\cdot\overline{s}=A\cdot 2+2\cdot 3-1\cdot 3=2A+3=0 \Rightarrow A=-\dfrac{3}{2}$.

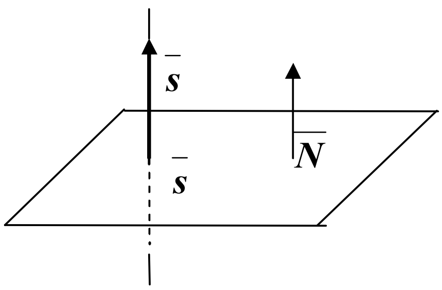


Рис. 3.23

Условием перпендикулярности прямой и плоскости является коллинеарность нормали к плоскости и направляющего вектора прямой (рис. 3.23):

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}. \qquad (3.58)$$

Пример 3.5.3. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $B(2;1;0)$ перпендикулярно плоскости $6x-2y+z-4=0$.

Решение

По условию перпендикулярности прямой и плоскости (3.58) можно считать, что $\overline{s}=\overline{N}=(6;-2;1)$. Запишем канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-0}{1}$ или $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$.

Точку пересечения прямой и плоскости находят из системы уравнений

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases} \qquad (3.59)$$

Пример 3.5.4. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-6}{4}$ и плоскости $3x+y-2z=0$.

Решение

Запишем уравнения прямой в параметрическом виде: $\begin{cases} x=-2-3t, \\ y=3+2t, \\ z=6+4t. \end{cases}$

Чтобы найти координаты точки пересечения прямой и плоскости, решим систему уравнений (см. (3.59)): $\begin{cases} x=-2-3t, \\ y=3+2t, \\ z=6+4t, \\ 3x+y-2z=0. \end{cases}$

Подставив значения x, y и z в четвертое уравнение системы, получим : $3(-2-3t)+(3+2t)-2(6+4t)=0$, $-15t-15=0 \Rightarrow t=-1$.

Найдем координаты точки пересечения: $\begin{cases} x=-2-3\cdot(-1), \\ y=3+2\cdot(-1), \\ z=6+4\cdot(-1); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=2. \end{cases}$

$M(1;1;2)$ - искомая точка.

Пример 3.5.5. Заданы прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$ и точка $D(3;0;1)$. Составить уравнение плоскости, которая проходит через данную прямую и точку D.

Решение

Точка $C(2;0;-1)$ лежит на прямой, значит, она принадлежит и плоскости, которая проходит через эту прямую. Нормаль плоскости перпендикулярна направляющему вектору прямой $\bar{s}=(2;1;-2)$ и вектору $\overline{CD}=(1;0;2)$. Тогда

$$\bar{N}=\bar{s}\times\overline{CD}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2\bar{i}-6\bar{j}-\bar{k}.$$

Запишем общее уравнение плоскости:

$2(x-2)-6(y-0)-(z+1)=0 \Rightarrow 2x-6y-z-5=0$.

Пример 3.5.6. Лежит ли прямая $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ в плоскости $x+y-z-6=0$?

Решение

Для того, чтобы прямая лежала в плоскости, должны выполняться условия: произвольная точка прямой должна принадлежать плоскости и направляющий вектор прямой должен быть перпендикулярен нормали к плоскости. Проверим выполнение этих условий.

Точка $M(2;3;-1)$ прямой принадлежит плоскости, так как её координаты удовлетворяют уравнению плоскости: $2+3-(-1)-6=0$.

Найдем скалярное произведение векторов $\bar{s}=(2;1;3)$ и $\bar{N}=(1;1;-1)$: $\bar{s}\cdot\bar{N}=2\cdot1+1\cdot1+3\cdot(-1)=0 \Rightarrow$ векторы перпендикулярны.

Значит, прямая лежит в плоскости.

Задания для самостоятельной работы

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(3;-2;5)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z}{5}$.

2. Записать уравнения прямой, проходящей через точку $P(1;1;-1)$ параллельно плоскостям $x+y+z+1=0$ и $x-y-z+2=0$.

3. Убедиться, что прямые лежат в одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости: а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$ и $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$;

б) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ и $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$.

4. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases}x-2y-5=0,\\ x-z-1=0\end{cases}$ перпендикулярно плоскости $3x-y+2z-2=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 224 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
4. Щипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
6. Белоусов И.В. Матрицы и определители: Учебное пособие по линейной алгебре. – Кишинёв: ИПФ, 2007. – 101 с.
7. Стрелковская Н.В., Буслаев А.Г. Векторная алгебра: Учебное пособие для иностранных студентов. – Одесса: ОНАС им. Попова, 2011. – 92 с.
8. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис – пресс, 2009. – 576 с.
9. Щипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2003. –304 с.
10. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 336 с.
11. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – СПб.: Лань, 2009. – 336 с.
12. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика. Приклади і задачі: Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 624 с.
13. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 2001. – 385 с.
14. Кагадій Л.П., Павленко А.В., Чуднов К.У. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Частина 1: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2004. – 44 с.
15. Кагадій Л.П., Павленко А.В., Чуднов К.У. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Частина 2: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2004. – 47 с.

Приложение 1

СПИСОК МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И СЛОВОСОЧЕТАНИЙ НА РУССКОМ И ФРАНЦУЗСКОМ ЯЗЫКАХ

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

алгебраическое дополнение – le cofacteur

вычислить определитель – calculer le déterminant

главная диагональ – diagonale principale

единичная матрица - matrice d'identité

квадратная матрица - matrice carrée

матрица – matrice

матричный метод – procédé de matrice

метод Крамера – la méthode de Kramer

минор – mineur

номер столбца – le numéro de la colonne

номер строки – le numéro de ligne

обратная матрица - matrice inverse

определитель – déterminant

определитель второго порядка – le déterminant du deuxième ordre

определитель матрицы - determinant de la matrice

определитель системы - le déterminant du système

определитель третьего порядка - le déterminant du troisième ordre

побочная диагональ – secondaire diagonale

решить систему уравнений - résoudre le système des équations

система линейных уравнений – le système des équations linéaires

столбец – colonne

строка - ligne

транспонированная матрица - matrice transpose

Раздел 2. Элементы векторной алгебры

абсцисса – abscisse

аппликата – applicate

вектор – vecteur

векторное произведение–produit vectorielle

вершина треугольника – le sommet du triangle

коллинеарные векторы – les vecteurs colinéaires
компланарные векторы – vecteurs coplanaires
координаты вектора – les coordonnées du vecteur
координаты точки- les coordonnées du point
модуль (длина) вектора – le module du vecteur
направление – guidage
объем параллелепипеда – le volume du parallélépipède
объем пирамиды – le volume de la pyramide
ордината – ordonnée
орты – unitaire
отрезок – segment
ось – axe
параллелограмм – parallélogramme
площадь – la surface
проекция –projection
прямоугольник – rectangle
система координат – coordonner
скалярное произведение векторов – produit scalaire des vecteurs
смешанное произведение векторов – produit mélangée des vecteurs
точка – point
треугольник – triangle
угол – anglem
угол между векторами – l'angle entre les vecteurs

Раздел 3. Элементы аналитической геометрии

асимптоты гиперболы – les asymptotes de l'hyperbole
большая ось – un grand axe
выделить полный квадрат –allouer le carré complet, distinguer le carré plein
вершина параболы – le sommet de la parabole
ветви кривой – les branches de la courbe
высота – la hauteur
гипербола – l'hyperbole
действительная ось – l'axe valable
диаметр – le diamètre
директриса – la directrice

каноническое уравнение – l'équation canonique
кривые второго порядка – les courbes du deuxième ordre
лежит в плоскости – s'étend dans un plan
малая ось – un petit axe
медиана – mediane
мнимая ось – l'axe imaginaire
найти точку пересечения прямых – trouver le point d'intersection des lignes droites
направляющий вектор – vecteur de direction
нормальный вектор (нормаль) – vecteur normal (normal)
окружность – la circonférence
парабола – la parabole
параллельные прямые – les lignes droites parallèles
перпендикулярные прямые – les lignes droites perpendiculaires
плоскость – plan
полуось – le demi-axe
построить линию – construire la ligne
привести к виду – conduire à une
принадлежит – appartient
проходит через – s'étend à travers
прямая – la ligne droite
пучок прямых – faisceau de droites
радиус – le rayon
расстояние от точки до прямой – la distance du point à ligne droite
середина – milieu
серединный перпендикуляр – du milieu perpendiculaire
скрещивающиеся прямые – lignes obliques
составить уравнение прямой – poser l'équation de la ligne droite
угловой коэффициент – le coefficient angulaire
угол между прямыми – l'angle entre les lignes droites
уравнение прямой – l'équation de la ligne droite
фокус, фокусы – lefoyer, les foyers
центр – centre
эксцентриситет – excentricite
эллипс – l'ellips

Приложение 2

СПИСОК МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И СЛОВОСОЧЕТАНИЙ НА РУССКОМ И АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКАХ

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

алгебраическое дополнение – cofactor
вычислить определитель – to calculate the determinant
главная диагональ – main diagonal
единичная матрица - unit matrix
квадратная матрица - square matrix
матрица – matrix
матричный метод – matrix method
метод Крамера – Cramer's method
минор – minor
номер столбца – column number
номер строки – line number, row number
обратная матрица - reciprocal matrix
определитель – determinant
определитель второго порядка –the second order determinant
определитель матрицы – determinant of matrix
определитель системы - determinant of the system
определитель третьего порядка - the third order determinant
побочная диагональ – collateral diagonal
решить систему уравнений - to solve set of equations
система линейных уравнений – set of simple equations
столбец – column
строка - line, row
транспонированная матрица - transposed matrix

Раздел 2. Элементы векторной алгебры

абсцисса – abscissa
аппликата – applicate
вектор – vector
векторное произведение – vector product, cross product

вершина треугольника – apex of triangle
коллинеарные векторы – collinear vectors
компланарные векторы – coplanar vectors
координаты вектора – coordinates of vector
координаты точки – coordinates of point
модуль (длина) вектора – magnitude of vector
направление – direction
объем параллелепипеда – the parallelepiped volume, volume of the parallelepiped
объем пирамиды – volume of the pyramid
ордината – ordinate
орты –orts, the unit vectors
отрезок – segment, interval
ось – axis , axle
параллелограмм – parallelogram
площадь – area
проекция – projection
прямоугольник – rectangle
система координат – system of axes
скалярное произведение – scalar product, inner product
смешанное произведение – mixed product
точка – point
треугольник – triangle
угол – angle
угол между векторами – the angle between vectors

Раздел 3. Элементы аналитической геометрии

асимптоты гиперболы – asymptotes of hyperbola
большая ось – major axis
выделить полный квадрат – to allocate a full square
ветви кривой – branches of curve
высота – height, altitude
гипербола – hyperbola
действительная ось – real axis
диаметр – diameter

директриса – directrix
каноническое уравнение – canonical equation
кривые второго порядка – the second order curves
лежит в плоскости – lying in a plane
малая ось – minor axis
медиана – median
мнимая ось – imaginary axis, conjugate axis
найти точку пересечения прямых – to find a point of lines intersection
направляющий вектор – directional vector
нормальный вектор (нормаль) – normal vector (normal)
окружность – circle
парабола – parabola
параллельные прямые – parallel straight lines
перпендикулярные прямые – perpendicular (normal) straight lines
плоскость – plane, flat
полуось – half-axle
построить линию– to construct the line
привести к виду –to lead to form
принадлежит – belongs
проходит через – extends through
прямая – straight line
пучок прямых – pencil of lines
радиус – radius
расстояние от точки до прямой – distance from the point to a straight line
середина – middle
серединный перпендикуляр – middle perpendicular
скрещивающиеся прямые – skew lines
составить уравнение прямой – to work out an equation of the straight
угловой коэффициент – angular coefficient
угол между прямыми – the angle between the straight lines
уравнение прямой – equation of the straight
фокус– focus
центр окружности – center of a circle
эксцентриситет – eccentricity
эллипс – ellipse

Приложение 3

ЧТЕНИЕ СИМВОЛОВ И ВЫРАЖЕНИЙ

$a+b$	а плюс b
$a-b$	а минус b
$\cdot \times$	умножить
:	разделить
=	равно
~	эквивалентно
$\approx$	приближенно равно
$\neq$	не равно
>	больше
<	меньше
$\geq$	больше или равно (не меньше)
$\leq$	меньше или равно (не больше)
$x \to \infty$	x стремится к бесконечности
$n!$	факториал
x^2	x в квадрате (x во второй степени)
x^3	x в кубе (x в третьей степени)
x^5	x в пятой степени
$\frac{1}{2}$	одна вторая (половина)
$\frac{3}{5}$	три пятых
$5\frac{3}{4}$	пять целых и три четвертых
0,01	нуль целых и одна сотая (одна сотая)
0,2	нуль целых и две десятых (две десятых)
3,005	три целых и пять тысячных
$\frac{x}{y}$	дробь x на y (отношение x к y)
xy	произведение x и y
$\sqrt{a}$	квадратный корень из a (корень из a)
$\sqrt[3]{a}$	кубический корень из a

$\sqrt[5]{a^2}$	корень пятой степени из a в квадрате
y'	игрек штрих (производная y)
y''	игрек два штриха (вторая производная y)
$\frac{dy}{dx}$	дэ игрек по дэ икс
$y=f(x)$	игрек равен эф от икс
$f(0)$	эф от нуля
$\int$	интеграл
$\int\limits_a^b$	определенный интеграл от a до b
$\int\limits_a^b f(x)dx$	интеграл от a до b функции эф от икс дэ икс
$log_2 x$	логарифм икс по основанию два
$lg\ x$	десятичный логарифм икс
$ln\ x$	натуральный логарифм икс
$\overline{m}$	вектор эм
$\lvert a \rvert$	модуль a (длина a)
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$	предел функции эф от икс,если икс стремится к бесконечности
$sin\ x$	синус икс
$cos\ x$	косинус икс
$tg\ x$	тангенс икс
$ctg\ x$	котангенс икс
$arcsin\ x$	арксинус икс
$arccos\ x$	арккосинус икс
$arctg\ x$	арктангенс икс
$arcctg\ x$	арккотангенс икс
$\parallel$	параллельно
$\perp$	перпендикулярно
$\cap$	пересечение
$\cup$	объединение
$\in$	принадлежит

Учебное издание

Кагадий Лариса Петровна
Шинковская Ирина Леонидовна
Заец Ирина Петровна
Сушко Лариса Федоровна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Часть I

Учебное пособие

Тем. план 2014, поз. 95

Подписано к печати 15.03.2011.Формат 60x84 1/16. Бумага типогр. Печать плоская.
Уч.- изд. л. 5,30. Усл. печ. л. 5,22. Тираж 100 экз. Заказ №

Национальная металлургическая академия Украины
49600, г. Днепропетровск- 5, пр. Гагарина, 4

Редакционно-издательский отдел НМетАУ