МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Т.М. КАДИЛЬНИКОВА, Т.П. БАС, І.Л. ШИНКОВСЬКА,
Л.Ф. СУШКО, І.П. ЗАЄЦЬ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина I

Дніпропетровськ НМетАУ 2012

УДК 517(07)
Вища математика. Частина І: Навч. посібник / Т.М. Кадильникова, Т.П. Бас, І.Л. Шинковська та ін. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 53 с.

Наведені докладні рекомендації до вивчення дисципліни «Вища математика». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями та ілюстраціями, а також розв'язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів напряму 6.040106 – екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування.

Іл. 17. Бібліогр.: 7 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.П. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.- мат. наук, проф. (НГУ)
Ю.Я. Годес, канд. фіз.- мат. наук, доц. (ДНУ)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Т.М. КАДИЛЬНИКОВА, Т.П. БАС, І.Л. ШИНКОВСЬКА,
Л.Ф. СУШКО, І.П. ЗАЄЦЬ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина I

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник. Протокол № 1 від 30.01.2012

Дніпропетровськ НМетАУ 2012

З М І С Т

В С Т У П

Характерною особливістю останніх десятиріч є швидка математизація різних галузей науки, техніки, економіки та управління. Створення нових теорій і технологій, вивчення та прогнозування складних процесів та явищ все частіше зводиться до побудови та дослідження відповідних математичних моделей. Тому сучасний інженер повинен мати досить високий рівень підготовки, що передбачає не тільки знання основ математики, а й добре володіння математичними методами, які застосовуються при розв'язанні задач з спеціальності.

Основне призначення цього навчального посібника – допомогти студентам – екологам в опануванні дисципліни «Вища математика». Зміст та структура посібника цілком відповідають робочій програмі дисципліни для студентів напряму 6.040106 – екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування. У другій частині продовжується знайомство з «Інтегральним численням функції однієї змінної» (розглядаються глави «Визначений інтеграл та його застосування» та «Невласні інтеграли»),»Звичайними диференціальними рівняннями» та «Числовими рядами».

Автори сподіваються, що проста побудова посібника, доступне викладання, що супроводжується розв'язанням багатьох прикладів із поясненням, допоможе студентам при самостійній роботі над навчальним матеріалом.

Тема 1. МАТРИЦІ. ВИЗНАЧНИКИ МАТРИЦЬ. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. ФОРМУЛИ КРАМЕРА.

Матрицею розміру $\mathbf{m\times n}$ називається сукупність елементів a_{ij}, розміщених у вигляді прямокутної таблиці, що має **m** рядків і **n** стовпців:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Перший індекс кожного елемента вказує на номер рядка, в якому цей елемент розміщений, другий – на номер стовпця. Матриці позначають великими буквами латинського алфавіту: ***A, B, C,…***уживають також більш компактний запис **A=(*a*)** $\mathbf{A=(a_{ij})_{mn}}$.

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців (тобто **m = n**), називається **квадратною** матрицею порядку **n.**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - квадратна матриця порядку **n.**

Елементи $a_{11}, a_{22},\ldots,a_{nn}$ утворюють головну діагональ матриці, елементи $a_{1n}, a_{2(n-1)},\ldots,a_{n1}$ – побічну.

Визначником другого порядку квадратної матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Визначником третього порядку квадратної матриці

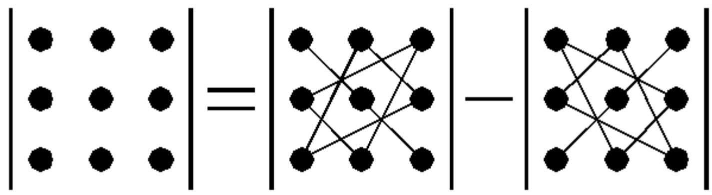
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

називається число:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для обчислення визначників третього порядку існує *правило трикутника*, яке схематично можна зобразити так:



Аналогічно для квадратної матриці A n-го порядку можна розглянути її визначник n-го порядку. Визначник матриці A часто позначають **det** A.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник, який дістають з визначника матриці A викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебричним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів непарна $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Визначник вищого порядку можна обчислити за допомогою визначників нижчого порядку **розкладом за елементами якогось рядка або стовпця**. Зокрема, для визначників третього порядку маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебричні доповнення.

Основні властивості визначників:

1. Значення визначника не змінюється, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями, а стовпці – рядками.
2. Перестановка двох рядків (стовпців) визначника рівнозначна множенню його на –1.
3. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника.
5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.
6. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
7. Якщо кожний елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких один у згаданому рядку (стовпці) має перші з заданих доданків, а інший – другі; елементи, що знаходяться на решті місць, у всіх трьох

визначниках одні й ті самі.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться.

Системою *m* лінійних рівнянь з *n* змінними $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається система
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де a_{ij} – коефіцієнти при змінних, b_i - вільні члени, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Упорядкована сукупність чисел $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ називається **розв'язком** системи, якщо при заміні x_1 на a_1, x_2 на a_2, … , x_n на a_n у кожному рівнянні системи дістанемо n правильних числових рівностей.

Система, що має розв'язок, називається **сумісною.**

Система, яка не має жодного розв'язку, називається **несумісною.**

Система з єдиним розв'язком називається **визначеною,** а з більшим числом розв'язків – **невизначеною.**

Система двох лінійних рівнянь з двома змінними має вигляд:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

а систему трьох лінійних рівнянь з трьома змінними записують у вигляді:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.2}$$

Метод Крамера. Цей метод розв'язування систем лінійних рівнянь зводиться до обчислення визначників. Так, розв'язок системи **(1.1)** можна знайти за **формулами Крамера**:
$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$, за умови, що $\Delta \neq 0$.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - називається визначником системи **(1)**, а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ - визначники, які дістають з визначника Δ заміною першого та другого стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Формули Крамера для системи **(1.2)** мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ - визначник системи **(2)** , а

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$ – визначники,

які дістають з визначника Δ заміною першого, другого і третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Система **(1.1)** (система **(1.2)**) має:

а) єдиний розв'язок, коли $\Delta \neq 0$;

б) безліч розв'язків, коли $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$ $(\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0)$;

в) не має жодного розв'язку, коли $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ $(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3})$ відмінний від нуля.

Зразки розв'язування задач

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

а) Використовуючи формулу для обчислення визначника другого порядку, маємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-6) \cdot 3 = 2 + 18 = 20.$$

б) Користуючись правилом трикутника, знаходимо

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 1 -$$

$$-(-2)\cdot(-1)\cdot 5-2\cdot 2\cdot 2=30-2-12-9-10-8=-11.$$

2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ -2 & 1 & 6\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix}$, розклавши його за елементами першого рядка.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ -2 & 1 & 6\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix}1 & 6\\ 4 & 3\end{vmatrix}+(-1)^3\cdot 2\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 3 & 3\end{vmatrix}+(-1)^4\cdot 5\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=3-24-2(-6-18)+5(-8-3)=-21+48-55=-28.$$

3. Обчислити визначник, спочатку спростивши його: $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 8 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}$.

Розв'язання.

Додамо перший рядок до третього рядка, потім помножимо перший рядок на –2 і додамо його до другого рядка і отримаємо визначник, в якому елементи $a_{21}=a_{31}=0$. Отриманий визначник розкладаємо за елементами першого стовпця.

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 8 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2+(-2)\cdot 1 & 8+(-2)\cdot 3 & 1+(-2)\cdot 2\\ -1+1 & 1+3 & 2+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 4 & 4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=8-(-12)=20.$$

4.Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

$$a)\begin{cases}x_1+2x_2=8,\\ 3x_1-x_2=3.\end{cases}\qquad б)\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=-2,\\ 5x_1-x_2-x_3=10,\\ x_1-x_2+5x_3=-12.\end{cases}$$

Розв'язання.

а) Знаходимо визначник системи

$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1-6=-7\neq 0$, тому система має єдиний розв'язок. Знаходимо

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}8 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-8-6=-14;\qquad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}1 & 8\\ 3 & 3\end{vmatrix}=3-24=-21.$$

За формулами Крамера отримаємо: $x_1=\dfrac{-14}{-7}=2,\qquad x_2=\dfrac{-21}{-7}=3.$

б) Знаходимо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3(-5-1)-(25+1)-5+1=$$

$$=-18-26-4=-48\neq 0.$$

Система має єдиний розв'язок. Знаходимо Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} :

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 10 & -1 & -1\\ -12 & -1 & 5\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}10 & -1\\ -12 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}10 & -1\\ -12 & -1\end{vmatrix}=$$

$$-2(-5-1)-(50-12)-10-12=12-38-22=-48;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 5 & 10 & -1\\ 1 & -12 & 5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}10 & -1\\ -12 & 5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 10\\ 1 & -12\end{vmatrix}=3(50-12)+2(25+1)-$$

$$-60-10=114+52-70=96;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & -1 & 10\\ 1 & -1 & -12\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-1 & 10\\ -1 & -12\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5 & 10\\ 1 & -12\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3(12+10)-$$

$$(-60-10)-2(-5+1)=66+70+8=144.$$

За формулами Крамера маємо:

$$x_1=\frac{-48}{-48}=1;\quad x_2=\frac{96}{-48}=-2;\quad x_3=\frac{144}{-48}=-3.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити визначники

а) $\begin{vmatrix}10 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & 1 & -3\\ 3 & -4 & 2\end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 5\\ 4 & 2 & 5\end{vmatrix}$.

2. Розв'язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0,\\ x_1-x_2-3x_3=13,\\ 3x_1-2x_2+4x_3=-15;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1+4x_2+x_3=4,\\ 3x_1+6x_2+2x_3=4,\\ 4x_1-x_2-3x_3=1.\end{cases}$

Тема 2. ВЕКТОРИ В ПРОСТОРІ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ. ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ. СКАЛЯРНИЙ, ВЕКТОРНИЙ, МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ.

Розглянемо напрямлений відрізок $\bar{a} = \overline{AB}$, де A – початок, B – кінець. Будемо називати його **вектором.**

Довжину вектора будемо позначати $|\bar{a}| = |\overline{AB}|$.

Додавання векторів.

Щоб побудувати суму даних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки, побудувати на них паралелограм. Сумою векторів буде діагональ, що виходить з початку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (рис. 2.1).

Цей спосіб побудови називається ***правилом паралелограма***.

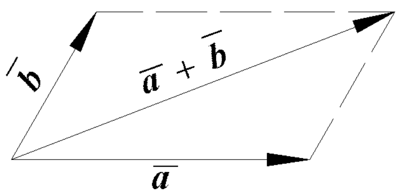


Рис. 2.1

Суму двох векторів можна побудувати ще й за ***правилом трикутника***.

Для цього треба відкласти вектор $\bar{b}$ від кінця вектора $\bar{a}$. Сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ буде вектор, що з'єднує початок $\bar{a}$ з кінцем $\bar{b}$ (рис. 2.2).

Щоб побудувати суму n даних векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, треба від довільної

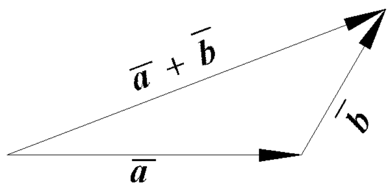


Рис. 2.2

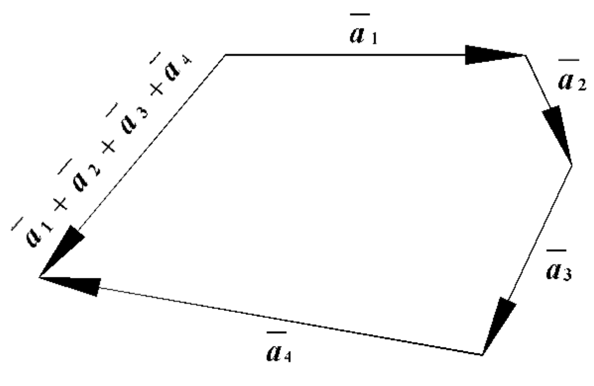


Рис. 2.3

точки відкласти $\bar{a}_1$, потім від його кінця відкласти $\bar{a}_2$ і т.д., нарешті від кінця $\bar{a}_{n-1}$ відкласти $\bar{a}_n$. Сумою векторів буде вектор, напрямлений від початку $\bar{a}_1$ до кінця $\bar{a}_n$ (рис. 2.3).

Різниця векторів.

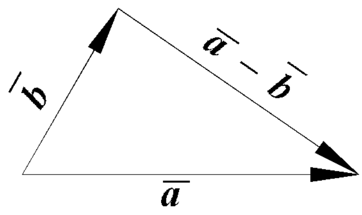


Рис. 2.4

Щоб побудувати різницю векторів $\bar{a}-\bar{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки, з'єднати їх кінці та вибрати на цьому відрізку напрямок від кінця $\bar{b}$ до кінця $\bar{a}$ (рис. 2.4).

Множення вектора на число.

Добутком ненульового вектора $\bar{a}$ на число k називається вектор, який :

1) має напрям вектора $\bar{a}$, якщо $k>0$, і протинапрям, якщо $k<0$;
2) $|k\cdot\bar{a}|=|k|\cdot|\bar{a}|$.

Ці три операції називаються **лінійними операціями** над векторами.

Прямокутна система координат.

Нехай у просторі задано три попарно перпендикулярні осі **OX, OY, OZ.** **Координатами вектора** $\bar{a}$ на осі називаються проекції вектора на ці осі. Записують $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$, де $a_x=np_{ox}\bar{a}$, $a_y=np_{oy}\bar{a}$, $a_z=np_{oz}\bar{a}$.

Якщо $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$-одиничні вектори, що напрямлені по *OX, OY, OZ*, **то** $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$.

Якщо $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, то **координати вектора** $\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.

Правила дій над векторами, заданими своїми координатами.

Якщо $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то

$$\bar{a}+\bar{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z);$$

$$\bar{a}-\bar{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z);$$

$$k\cdot\bar{a}=(k\cdot a_x,k\cdot a_y,k\cdot a_z).$$

Довжина вектора $|\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Скалярним добутком векторів називається число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right).$$

Якщо вектори задані своїми координатами $\bar{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\bar{b}=(b_x;\ b_y;\ b_z)$, то скалярний добуток знаходять за формулою:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Кут між векторами обчислюють за формулою:

$$\cos\left(\bar{a}\ \hat{,}\ \bar{b}\right)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ має вигляд:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Скалярний квадрат вектора дорівнює: $\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos(0)=|\bar{a}|^2$.

Проекція вектора $\bar{a}$ на напрям вектора $\bar{b}$: $\quad np_{\bar{b}}\bar{a}=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$.

Векторним добутком двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається третій вектор $\bar{c}$, який задовольняє умови:

1) $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\left(\bar{a}\ \hat{,}\ \bar{b}\right)$;

2) $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$;

3) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку.

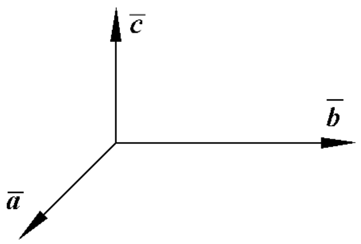


Рис. 2.5

Векторний добуток позначається символом $\bar{a}\times\bar{b}$. З визначення випливає, що $\bar{a}\times\bar{b}=-\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)$.

Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$$S_{пар}=|\bar{a}\times\bar{b}|;\qquad S_{\Delta}=\frac{1}{2}S_{пар}=\frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|.$$

Векторний добуток векторів, заданих своїми координатами, обчислюють так:

$$|\bar{a}\times\bar{b}|=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

Умова колінеарності двох векторів $\bar{a}$ **і** $\bar{b}$ має вигляд:

$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$ (або $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$).

Мішаним добутком трьох векторів називається добуток $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$. Частіше мішаний добуток позначається $\overline{abc}$.

Якщо вектори задані своїми координатами, то мішаний добуток знаходять за формулою: $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ як на сторонах, дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів:

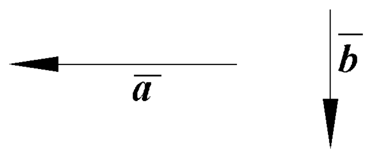
$$V_{пар} = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|,$$

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|.$$

Умова компланарності трьох векторів має вигляд: $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$.

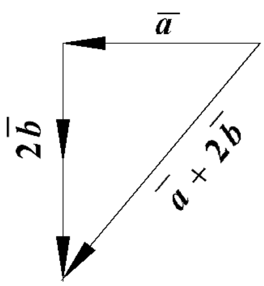
Зразки розв’язування задач

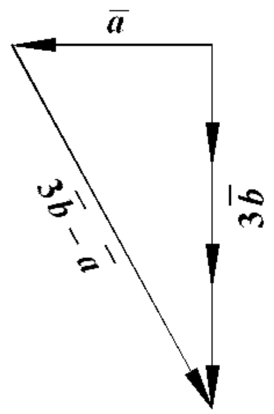
Задача 1. Дано ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Побудувати вектори $\overline{a} + 2\overline{b}$,



$3\overline{b} - \overline{a}$.

Розв’язання.





Задача 2. Знайти периметр трикутника, вершинами якого є точки $A(8;0;6)$, $B(8;-4;6)$, $C(6;-2;5)$.

Розв’язання. Знайдемо координати векторів, що створюють трикутник:

$\overline{AB} = (8-8;-4-0;6-6)$, $\overline{AB} = (0;-4;0)$;

$\overline{AC} = (6-8;-2-0;5-6)$, $\overline{AC} = (-2;-2;-1)$;

$\overline{BC} = (6-8;-2-(-4);5-6)$, $\overline{BC} = (-2;2;-1)$,

та їх довжини $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4$, $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$,

$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$. Тоді периметр трикутника $P = 4 + 3 + 3 = 10$.

Задача 3. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a} = 4\bar{k} - \bar{i}$, $\bar{b} = 3\bar{j} + \bar{i} - \bar{k}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів: $\bar{a}(-1;\ \ 0;\ \ 4)$, $\bar{b}(1;\ \ 3;\ \ -1)$. Тоді скалярний добуток дорівнює $\bar{a} \cdot \bar{b} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -1 - 4 = -5$.

.

Задача 4. Задано вектори $\bar{a} = 12\bar{i} - 3\bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k}$. Обчислити проекцію вектора $\bar{b} + \bar{c}$ на вектор $\bar{a}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\bar{b} + \bar{c} = (1 + 1;\ \ 2 - 3;\ \ 4 - 2)$; $\bar{b} + \bar{c} = (2;\ \ -1;\ \ 2)$ та $\bar{c} = (12;\ \ -3;\ \ -3)$.

Обчислимо проекцію $(\bar{b} + \bar{c})$ на вектор $\bar{a}$ за формулою:

$$np_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = \frac{(\bar{b} + \bar{c}) \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{2 \cdot 12 + (-1) \cdot (-3) + 2(-3)}{\sqrt{12^2 + (-3)^2 + (-3)^2}} = \frac{24 + 3 - 6}{\sqrt{144 + 9 + 9}} = \frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

Задача 5. Знайти площу трикутника за координатами його вершин: $A(1;\ \ -2;\ \ 8)$, $B(0;\ \ 0;\ \ 4)$, $C(6;\ \ 2;\ \ 0)$.

Розв'язання. Розглянемо два вектори, на яких побудовано трикутник, наприклад, $\overline{AB}$

$\overline{AB} = (-1;\ \ 2;\ \ -4)$, $\overline{AC} = (5;\ \ 4;\ \ -8)$, тоді

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i} \cdot (-16 + 16) - j \cdot (8 + 20) + \bar{k} \cdot (-4 - 10) = -28\bar{j} - 14\bar{k}.$$

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-28)^2 + (-14)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5 \cdot 14^2} = 7\sqrt{5}(кв.\ \ од.)$$

Задача 6. Обчислити об'єм паралелепіпеда і піраміди, побудованих на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$, $\bar{b} = \bar{k} - 3\bar{j}$, $\bar{c} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$.

Розв'язання. Об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю мішаного добутку векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-15 - 2) = -51.$$

$$V_{пар} = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = |-51| = 51(куб.\ \ од.).$$

Тоді $V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = \frac{1}{6}V_{пар} = \frac{51}{6} = \frac{17}{2} = 8{,}5(куб.\ \ од.)$

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Дано вектори $\bar{a} = -2\bar{i} - 3\bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{k} - 2\bar{j}$. Знайти довжини векторів 1) $\bar{a} + 2\bar{b}$, 2) $3\bar{c} - \bar{a}$.

Задача 2. Точки $A(1;-2;-1)$, $B(3;4;2), C(3;1;-2)$ є вершинами паралелограма, причому A і C – протилежні вершини. Знайдіть четверту вершину D, а також периметр паралелограма.

Задача 3. Знайти кут між векторами $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$ і $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$, а також площу паралелограма, побудованого на них.

Задача 4. Обчислити проекцію вектора $\bar{a} - \bar{c}$ на вектор $\bar{b}$, якщо $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{c} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$.

Задача 5. Дано координати вершин піраміди:: $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(-2;\ 3;\ 4)$, $C(1;\ 0;\ -2)$. Обчислити: кут ABC; площу грані $ABC;$ об'єм піраміди $OABC$.

Тема 3. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

Рівняння вигляду $Ax + By + C = 0$, за умови, що коефіцієнти A і B одночасно не дорівнюють нулю, називається ***загальним*** рівнянням прямої. Розглянемо окремі випадки загального рівняння.

Значення коефіцієнтів	Вид рівняння	Положення прямої
$C = 0$	$Ax + By = 0$	Проходить через початок координат
$A = 0$	$By + C = 0$	Паралельна осі Ox
$B = 0$	$Ax + C = 0$	Паралельна осі Oy
$A = C = 0$	$y = 0$	Збігається з віссю Ox
$B = C = 0$	$x = 0$	Збігається з віссю Oy

Нехай $M_0(x_0;\ y_0)$ - задана точка прямої, а $\bar{q} = (m;\ n)$ - вектор, колінеарний прямій, тоді рівняння:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

називається ***канонічним рівнянням прямої***.

Рівняння прямої у відрізках на осях має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

де a і b - відповідно абсциса і ордината точки перетину прямої з осями Ox і Oy.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд:

$$y = kx + b,$$

де $k = tg\alpha$ - кутовий коефіцієнт, який дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напряму осі Ox, b - ордината точки перетину прямої з віссю Oy.

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $A(x_1;\ \ y_1)$ і $B(x_2;\ \ y_2)$, має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Кут φ ***між двома прямими***, заданими загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, обчислюють за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Якщо прямі задані рівняннями $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, то кут між прямими обчислюється за формулою: $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

Умова паралельності двох прямих: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$; $k_1 = k_2$.

Умова перпендикулярності двох прямих: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$; $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

Рівняння пучка прямих, які проходять через дану точку $M(x_0,\ \ y_0)$, має вигляд: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Відстань від точки $M(x_0,\ \ y_0)$ ***до прямої*** $Ax + By + C = 0$ обчислюється за формулою: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Побудувати прямі

а) $3x + 4y + 12 = 0$; **б)** $5x + 12 = 0$; **в)** $2y - 7 = 0$.

Розв'язання.

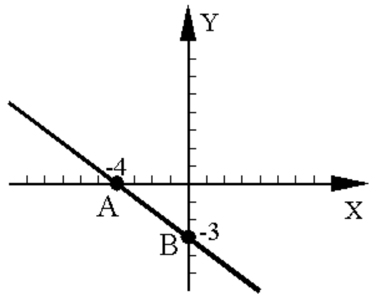


Рис.3.1

а) Щоб побудувати пряму, знайдемо координати точок перетину з осями Ox і Oy. Припустивши, що $y = 0$, дістанемо $3x + 12 = 0$, $x = -4$, $A(-4;\ \ 0)$. При $x = 0$ дістанемо $4y + 12 = 0$, $y = -3$, $B(0;\ \ -3)$. Через точки A і B проводимо шукану пряму (рис. 3.1).

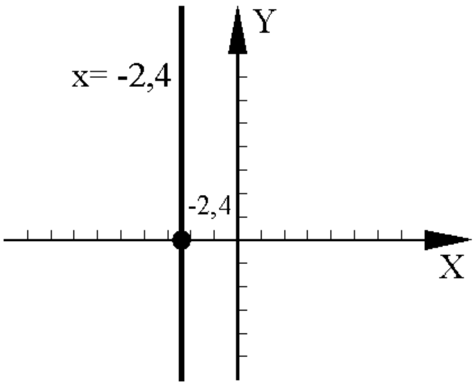


Рис. 3.2

б) Знайдемо змінну x з рівняння $5x+12=0$: $x=-\frac{12}{5}=-2{,}4.$

На осі Ox візьмемо точку $(-2{,}4;0)$ і проведемо пряму паралельно осі Oy (рис. 3.2).

в) Знайдемо змінну y з рівняння

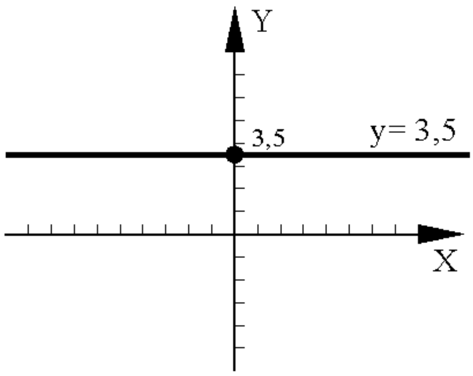


Рис. 3.3

$2y-7=0$: $y=\frac{7}{2}=3{,}5$.

На осі Oy візьмемо точку $(0;3{,}5)$ і проведемо пряму паралельно осі Ox (рис. 3.3).

Задача 2. Загальне рівняння прямої $3x-4y+12=0$ перетворити в рівняння у відрізках на осях та побудувати пряму.

Розв'язання. Перетворимо рівняння: $3x-4y=-12$. Праву та ліву частини рівняння розділимо на (-12): $\frac{3x}{-12}-\frac{4y}{-12}=1$.

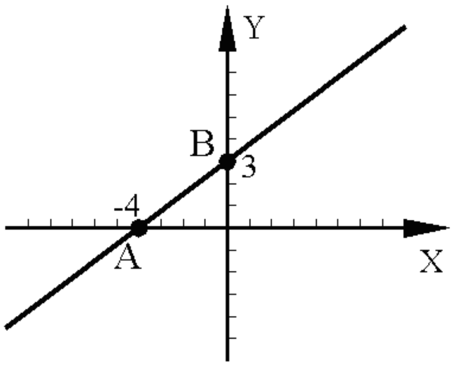


Рис. 3.4

Тоді $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$ - рівняння у відрізках на осях.

Тобто $a=-4$ і $b=3$. Отже дістанемо точки $A(-4;\ 0)$ і $B(0;\ 3)$. Пряма, проведена через точки A і B, - шукана (рис. 3.4).

Задача 3. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $(-1;\ -4)$ і утворює з віссю Ox кут 135^0.

Розв'язання. Щоб скласти шукане рівняння прямої, треба знайти k і b. Знайдемо кутовий коефіцієнт $k=tg\left(135^0\right)=-1$. Для визначення b підставимо в рівняння з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b$ координати даної точки і знайдене значення k; дістанемо: $-4=(-1)\cdot 1+b$, звідки $b=-5$. Шукане рівняння має вигляд $y=-x-5$.

Задача 4. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(3;\ \ -2)$ і $B(4;\ \ -3)$.

Розв'язання. За умовою задачі: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $y_1 = -2$, $y_2 = -3$. Підставивши ці значення в рівняння прямої, яка проходить через дві точки, дістанемо: $\frac{x-3}{4-3} = \frac{y+2}{-3+2}$; $-x+3 = y+2$ і $x+y+1=0$.

Задача 5. Трикутник задано вершинами: $A(2;\ \ 5)$, $B(-6;\ \ -4)$ і $C(6;\ \ -3)$. Складіть рівняння медіани BD.

Розв'язання. Знайдемо координати точки D - середини сторони AC:

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2}, \qquad y_D = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

$$x_D = \frac{2+6}{2} = 4, \qquad y_D = \frac{5-3}{2} = 2.$$

Отже, координати точки дорівнюють $D(4;\ \ 2)$. Тоді рівняння медіани BD, де $B(-6;\ \ -4)$, має вигляд: $\frac{x-4}{-6-4} = \frac{y+2}{-4-2}$; $\quad \frac{x-4}{-10} = \frac{y+2}{-6}$;

$$-6(x-4) = -10(y-2); \qquad -6x+24 = -10y+20;$$

$$6x - 10y - 4 = 0, \text{ звідки } \quad 3x - 5y - 2 = 0.$$

Задача 6. Знайти гострий кут між прямими:

а) $y = 5x$ і $y = 2x$; б) $3x - 2y - 12 = 0$ і $2x + 3y + 6 = 0$.

Розв'язання.

а) Кутові коефіцієнти даних прямих дорівнюють 5 і 2. Тангенс кута між прямими беремо за модулем: $tg\varphi = \left|\frac{2-5}{1+2\cdot 5}\right| = \frac{3}{11} = 0{,}2727$, звідки $\varphi \approx 15^0 15'$.

б) Косинус кута між прямими беремо за модулем. Для прямої $3x - 2y - 12 = 0$: $A_1 = 3$, $B_1 = -2$.

Для прямої $2x + 3y + 6 = 0$: $A_1 = 2$, $B_1 = 3$.

$$\cos\varphi = \left|\frac{3\cdot 2 - 2\cdot 3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}}\right| = 0, \text{ звідки } \qquad \varphi = 90^0.$$

Задача 7. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1,\ \ 2)$ паралельно прямій $3x + 4y - 12 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо кутовий коефіцієнт даної прямої: $4y = -3x + 12$, звідки $y = -\frac{3}{4}x + 3$. Тоді $k_1 = -\frac{3}{4}$.

Оскільки дана і шукана прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні, тобто $k_1 = k_2 = -\frac{3}{4}$. Шукана пряма проходить через точку $M(-1,\ \ 2)$ і має кутовий коефіцієнт $k_2 = -\frac{3}{4}$. Тоді її рівняння запишемо у вигляді: $y - 2 = -\frac{3}{4}\cdot(x+1)$, або $3x + 4y + 1 = 0$.

Задача 8. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2,\ \ -3)$ перпендикулярно до прямої $4x + 5y - 8 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо кутовий коефіцієнт даної прямої: $k_1 = -\frac{4}{5}$. Тоді кутовий коефіцієнт шуканої прямої $k_2 = \frac{5}{4}$. Отже її рівняння має вигляд $y + 3 = \frac{5}{4}(x - 2)$ або $5x - 4y - 22 = 0$.

Задача 9. Знайдіть відстань від точки $M(-2,\ \ 4)$ до прямої $4x - 3y - 5 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи формулу для обчислювання відстані від точки до прямої, дістанемо:

$$d = \frac{|4\cdot(-2) - 3\cdot 4 - 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Пряма проходить через точку $M(2\ \ 5)$ і утворює з віссю Ox кут, що дорівнює $arctg(3)$. Знайдіть на цій прямій точку з абсцисою -2.
2. Дано рівняння сторін трикутника: $6x - 5y + 8 = 0$; $4x - 2y + 2 = 0$ і $x - 3y - 3 = 0$. Знайдіть рівняння його медіан.

3. При якому значенні коефіцієнта k пряма $y = kx + 9$ проходить через точку перетину прямих $x - y + 5 = 0$ і $x + 2y + 2 = 0$.

4. Трикутник задано вершинами $A(-3,\ \ -2)$, $B(1,\ \ 6)$ і $C(2,\ \ -5)$. Знайдіть:
   1) кути B і C,
   2) рівняння висоти, проведеної з вершини C,
   3) довжину перпендикуляра до сторони AB, який проходить через вершину C.

5. Дві протилежні вершини квадрата лежать у точках $A(-1,\ \ 1)$ і $C(5,\ \ 3)$. Складіть рівняння сторін і діагоналей цього квадрата.

Тема 4. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ: КОЛО, ЕЛІПС, ГІПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА

Колом називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини, яка називається центром.

Рівняння кола з центром на початку координат і радіусом R має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2 \;. \qquad (4.1)$$

Рівняння кола з центом у точці $O(a;b)$ і радіусом R має вигляд

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \,. \qquad (4.1')$$

Рівняння кола у загальному вигляді записують так:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0,$$

де A, B, C, D - сталі коефіцієнти.

Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала, більша за відстань між фокусами.

Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b), \qquad (4.2)$$

де a – довжина великої півосі; b – довжина малої півосі (ріс 4.1.)

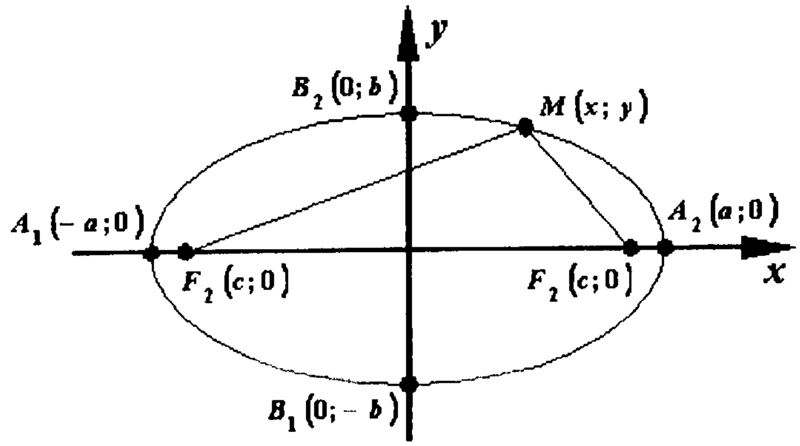


Рис 4.1

Залежність між параметрами a,b,c виражається співвідношенням:

$$a^2 - b^2 = c^2 \,.$$

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної відстані $2c$ до великої осі $2a$: $\quad \varepsilon = \dfrac{c}{a}$.

Фокуси еліпса $F_1(-c;0), F_2(c;0)$.

Рівняння директрис $\quad x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Гіперболою називається множина точок площини, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала ***(2a),*** менша за відстань між фокусами ***(2c).***

Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.3}$$

де a – довжина дійсної півосі;

b – довжина уявної півосі (рис. 4.2)

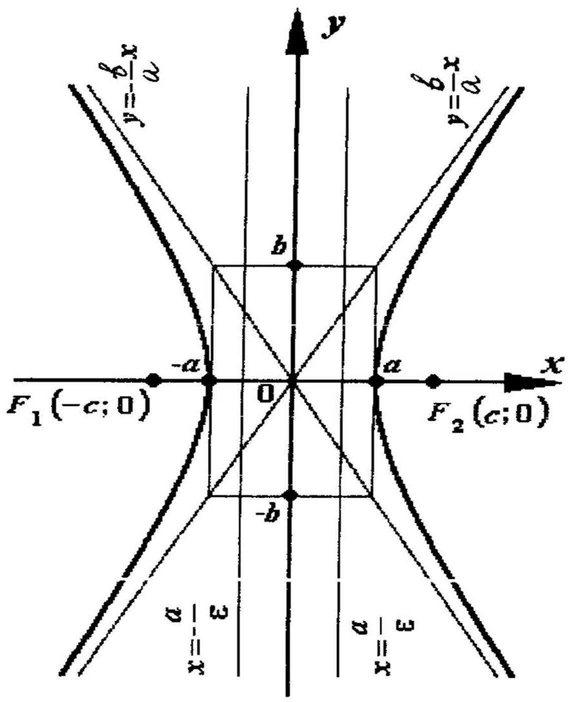


Рис. 4.2

Залежність між параметрами *a, b, c* виражається співвідношенням:

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення фокусної відстані до її дійсної півосі: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$

Фокуси гіперболи знаходяться у точках $F_1\,(-c;0)$, $F_2\,(c;0)$.

Гіпербола має дві ***асимптоти***, рівняння яких $y = \pm\frac{b}{a}x$,

а також дві ***директриси***, рівняння яких $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Якщо дійсна та уявна півосі рівні ***(a=b)***, то гіпербола називається ***рівносторонньою***. Рівняння рівносторонньої гіперболи має вигляд

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

а рівняння її асимптот $y = \pm x$.

Параболою називають множину точок на площині, рівновіддалених від даної точки, яка називається фокусом і від даної прямої, яка називається директрисою.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь ***Ox***, має вигляд $y^2 = 2px$, (4.4)

де p – параметр параболи.

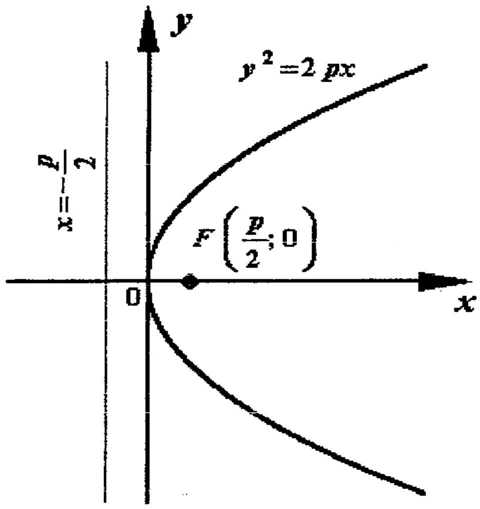


Рис.4.4

Якщо $p > 0$, то вітки параболи напрямлені вправо, якщо $p < 0$, то вітки напрямлені вліво (рис. 4.4).

Фокус параболи знаходиться у точці $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. ***Рівняння директриси*** $x = -\frac{p}{2}$.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь ***Oy***, має вигляд $x^2 = 2py$. (4.5)

Якщо $p > 0$, то вітки напрямлені вгору, якщо $p < 0$, то вітки напрямлені вниз (рис.4.5).

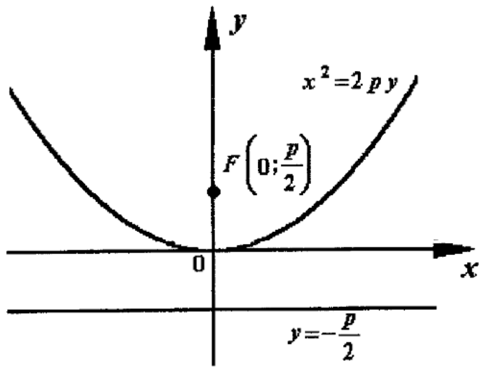


Рис. 4.5

Фокусом такої параболи є точка $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$.

Рівняння директриси $y = -\frac{p}{2}$.

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Складіть рівняння кола з центром у точці ***M(2;-3)*** і з радіусом, що дорівнює ***2***. Побудуйте це коло.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: ***a=2, b=-3, R=2.***

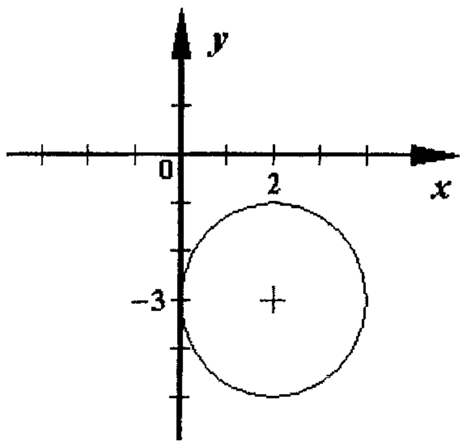


Рис. 4.6

Підставивши ці значення в рівняння кола, дістанемо:

$$(x-2)^2+(y-(-3))^2=4$$

або $\quad (x-2)^2+(y+3)^2=4$.

Будуємо центр кола, тобто точку ***M(2,-3).*** З центра ***M*** радіусом, який дорівнює ***2***, опишемо коло (рис.4.6).

Задача 2. Знайдіть координати центра і радіус кола $x^2+y^2-8x-10y-8=0$.

Розв'язання. Перепишемо це рівняння у вигляді $x^2-8x+y^2-10y=8$.

Доповнивши двочлени x^2-8x і y^2-10y до повних квадратів, дістанемо:

$$x^2-2\cdot 4x+4^2+y^2-2\cdot 5y+5^2=8+4^2+5^2 \text{ або } (x-4)^2+(y-5)^2=49.$$

Звідки $a=4$, $b=5$, $R=7$, тобто центр кола – точка ***(4;5)***, а радіус дорівнює *7*.

Задача 3. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі ***Ox***, якщо велика вісь дорівнює ***12***, а відстань між фокусами дорівнює ***8***.

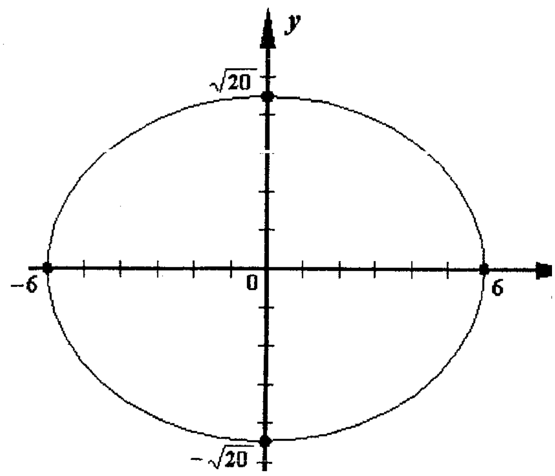


Рис.4.7

Розв'язання. З умови впливає, що $a=6$ і ***c=4***. Знаходимо $b^2=a^2-c^2=36-16=20$. Підставивши значення ***a*** і ***b*** в рівняння еліпса, дістанемо $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$.

Задача 4. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі ***Ox***, якщо його велика вісь дорівнює ***14***, а ексцентриситет $\dfrac{2}{3}$.

Розв'язання. З умови маємо: $a=7$, $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$. Підставивши в це співвідношення значення ***a***, дістанемо $c=\dfrac{14}{3}$.

Далі знаходимо $b^2 = 7^2 - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{245}{9}$. Отже, шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{245/9} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{49} + \frac{9y^2}{245} = 1.$$

Задача 5. Побудувати гіперболу $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$. Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

Розв'язання. Приведемо рівняння кривої до виду (4.3):

$$9x^2 - 16y^2 = 144, \quad \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Таким чином, $a^2 = 16$, $b^2 = 9$; $a = 4$, $b = 3$ - півосі гіперболи.

Знайдемо відстань фокусів від центра симетрії:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Фокуси гіперболи $F_1\,(-5;0)$, $F_2\,(5;0)$.

Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1$.

Рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Рівняння директрис $x = \pm\frac{4}{\left(\frac{5}{4}\right)}$; $x = \pm\frac{16}{5}$.

Побудуємо гіперболу (рис.4.8).

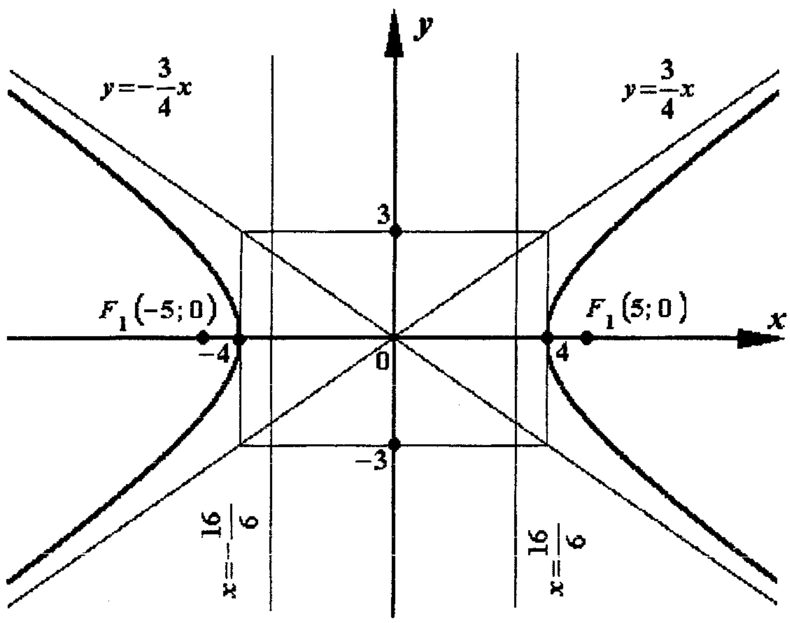


Рис. 4.8

Задача 6. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі ***Ox***, якщо довжина її дійсної осі дорівнює ***16***, і гіпербола проходить через точку ***(-10;-3).***

Розв'язання. За умовою ***2a=16***, тобто ***a=8***. Підставивши в рівняння (4.3) значення **a=8** і координати даної точки, дістанемо

$$\frac{(-10)^2}{8^2}-\frac{(-3)^2}{b^2}=1,\quad \frac{100}{64}-\frac{9}{b^2}=1,\quad \frac{9}{b^2}=\frac{25}{16}-1=\frac{9}{16},\quad b^2=16.$$

Тоді отримаємо: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$.

Задача 7. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо її фокус лежить у точці F (1;0).

Розв'язання. Фокус лежить на осі ***Ox,*** тобто рівняння параболи має вигляд (4.4) $y^2=2px$. Оскільки координати фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, то $\frac{p}{2}=1,\ p=2$.

Підставивши значення ***p*** в рівняння (4.4), дістанемо: $y^2=4x$.

Задача 8. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі ***Oy*** і проходить через точку ***A (-2;-4).***

Розв'язання. Шукана парабола симетрична відносно осі ***Oy***, отже її рівняння має вигляд $x^2=2py$. Підставивши в це рівняння координати точки ***A***, знайдемо ***p***: $(-2)^2=2p\cdot(-4)$, $\quad 4=-8p$, $\quad p=-\frac{1}{2}$.

Після підстановки значення ***p*** в рівняння дістанемо: $x^2=-y$.

Задача 9. За даним рівнянням параболи $y^2=-8x$ обчисліть координати її фокуса, рівняння директриси. Побудувати її.

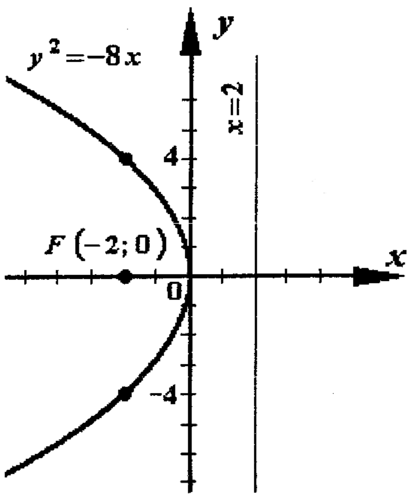


Рис. 4.9

Розв'язання. З рівняння параболи $y^2=-8x$ маємо $2p=-8$, $\frac{p}{2}=-2$.

Парабола симетрична відносно осі ***Ox***, її фокус лежить на осі симетрії і має координати $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, тобто $F(-2;\,0)$.

Рівняння директриси $x=-\frac{p}{2}$, тобто ***x=2.***

Шукана парабола симетрична відносно осі ***Ox***, її вітки напрямлені вліво.

Завдання для самостійної роботи

1. Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо відстань між фокусами дорівнює 12, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

2. Знайдіть відстань між центрами кіл $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 80 = 0$ і $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$.

3. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо довжина її уявної осі дорівнює 12, і гіпербола проходить через точку $(20;8)$.

4. Побудувати гіперболу $4x^2 - y^2 - 16 = 0$. Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

5. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі Ox і проходить через точку $(5;-3)$. Знайти координати фокуса, рівняння директриси. Побудувати її.

Тема 5. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. ПОХІДНІ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ. ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту Δx аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} .$$

Наводимо **таблицю похідних основних елементарних функцій**.

1. $(x)' = 1,$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1},$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$
5. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a,$
6. $\left(e^x\right)' = e^x,$
7. $(\sin x)' = \cos x,$
8. $(\cos x)' = -\sin x,$
9. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x},$
10. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$
13. $(arcctgx)' = \frac{1}{1 + x^2},$
14. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2},$
15. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a},$
16. $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

При знаходженні похідної функції користуються також основними ***правилами диференціювання:***

1. $(c)' = 0$, де c – стала.
2. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, де u - функція.
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' v - u v'}{v^2}$.

Якщо y є функція від u: $y = f(u)$, де u, у свою чергу, є функція від аргументу x: $u = \varphi(x)$, тобто залежить від x через проміжний аргумент u, то y називається ***складеною функцією*** від x (функцією від функції) $y = f[\varphi(x)]$.

Похідна складеної функції дорівнює добутку її похідної за проміжним аргументом на похідну цього аргументу за незалежною змінною.

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Геометричний зміст похідної $f'(x_0)$ у точці x_0 у тому, що вона дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 має вигляд:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Знайти похідні функції:

а) $y = 4 + 5x^2 + \dfrac{8}{x^2} - \dfrac{4\sqrt{x}}{3} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

б) $y = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt[5]{x}} - 5$;

в) $y = x^4 \sin x$;

г) $y = \dfrac{8x - 7}{2x^3 + x^2}$.

Розв'язання.

а) Знайдемо похідну від алгебраїчної суми як алгебраїчну суми похідних доданків:

$$y' = (4)' + (5x^2)' + \left(\frac{8}{x^2}\right)' - \left(\frac{4\sqrt{x}}{3}\right)' - \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = 5\cdot 2x + 8\cdot(-2)\cdot x^{-2-1} -$$

$$-\frac{4\cdot 1}{3\cdot 2\sqrt{x}} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = 10x - \frac{16}{x^3} - \frac{2}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}};$$

б) $y' = 2\left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)' + \left(x^{1-\frac{1}{5}}\right)' - (5)' = 2\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{5}\cdot x^{-\frac{1}{5}} = 3\sqrt{x} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}.$

в) Знайдемо похідну за основним правилом 3:

$$y' = \left(x^4\right)' \sin x + x^4\cdot(\sin x)' = 4x^3\sin x + x^4\cos x.$$

г) Використаємо правило 4:

$$y' = \frac{(8x-7)'\cdot\left(2x^3+x^2\right) - (8x-7)\cdot\left(2x^3+x^2\right)'}{\left(2x^3+x^2\right)^2} = \frac{8\cdot\left(2x^3+x^2\right) - (8x-7)\cdot\left(6x^2+2x\right)}{\left(2x^3+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{16x^3+8x^2-48x^3+42x^2-16x^2+14x}{\left(2x^3+x^2\right)^2} = \frac{-32x^3+34x^2+14x}{(2x^3+x^2)^2}.$$

Задача 2. Знайти похідні складених функцій:

а) $y = \ln\sin x + \sqrt{arctgx}$;

б) $y = e^{3tg\frac{1}{x}} + \cos^3 x$;

в) $y = \left(4x^2+1\right)^2\cdot 5^{\sqrt{x^3-1}}$;

г) $y = \frac{\arcsin^4\sqrt{x}}{\ln(a-bx)}$.

Розв'язання.

а) Знайдемо похідну від першого доданка за формулою:

$y_x' = y_u'\cdot u_x'$, де $y = \ln u,\ u = \sin x$.

Тоді $y_x' = \ln u\cdot u_x' = \frac{1}{u}\cdot(\sin x)_x' = \frac{1}{\sin x}\cos x = ctgx$.

Похідну від другого доданка знайдемо аналогічно:

$y = \sqrt{u},\quad u = arctgx$.

$$y_u' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u_x' = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot(arctgx)'_x = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

Загалом $y_x' = ctgx + \frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

б) $y' = \left(e^{3tg\frac{1}{x}} \right)' + \left(cos^3 x \right)' = e^{3tg\frac{1}{x}} \left(3tg\frac{1}{x} \right)' + 3cos^2 x (cos x)' =$

$$= e^{3tg\frac{1}{x}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' + 3cos^2 x(-sin x) = e^{3tg\frac{1}{x}} \cdot \frac{3}{cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) - 3cos^2 x \, sin\, x.$$

в) $y' = \left(\left(4x^2+1\right)^2 \right)' \cdot 5^{\sqrt{x^3-1}} - \left(4x^2+1\right)^2 \cdot \left(5^{\sqrt{x^3-1}} \right)' =$

$$= 2 \cdot \left(4x^2+1\right)\left(4x^2+1\right)' \cdot 5^{\sqrt{x^3-1}} + \left(4x^2+1\right)^2 \cdot 5^{\sqrt{x^3-1}} \cdot ln 5 \cdot \left(\sqrt{x^3-1} \right)' =$$

$$= 2 \cdot \left(4x^2+1\right)^2 \cdot 8x \cdot 5^{\sqrt{x^3-1}} + \left(4x^2+1\right)^2 \cdot 5^{\sqrt{x^3-1}} \cdot ln 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3-1}} \cdot 3x^2.$$

г) $y' = \dfrac{\left(arcsin^4 \sqrt{x} \right)' \cdot ln(a-bx) - arcsin^4 \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \left(ln(a-bx) \right)'}{ln^2(a-bx)} =$

$$= \frac{4 \cdot arcsin^3 \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} ln(a-bx) - arcsin^4 \sqrt{x} \cdot \dfrac{(-b)}{a-bx}}{ln^2(a-bx)}.$$

Задача 3. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = x\,ln\,x$ у точці з абсцисою $x_0 = e$.

Розв'язання.

1) Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до кривої:

$$y'(x) = 1 \cdot ln\,x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\,x + 1, \quad y'(x_0) = y'(e) = ln\,e + 1 = 2,$$

а також $\quad y(x_0) = y(e) = e\,ln\,e = e$.

Підставимо в рівняння дотичної: $y - e = 2 \cdot (x - e)$, звідки $\quad y = 2x - e$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти похідні функцій:

а) $y = sin^2 3x \cdot sin\, 3x^2$; б) $y = ln\, arctg \sqrt{8x+1}$;

в) $y = \dfrac{tg^4 5x}{7^{\sqrt{x}} - 4}$; г) $y = \sqrt[4]{x} \cdot e^{\frac{3}{x^2}}$.

2. Обчислити значення похідної $f'(1)$ функції $f(x) = e^{2x} \ln x^2$.

3. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ у точці x_0=**0**.

Тема 6. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Число A є ***границею функції*** $f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначають: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Функція $y = f(x)$ є ***нескінченно великою,*** якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Функція $y = f(x)$ є ***нескінченно малою***, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Границя елементарної функції $f(x)$ при $x \to a$, яке належить області визначення функції $D(x)$, дорівнює частинному значенню функції при $x = a$, а саме $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(a)$.

Якщо $x \to \infty$ або $x \to x_0$, яке не належить $D(x)$, то знаходження границь потребує спеціальних досліджень. Розглянемо більш складні випадки знаходження границь функції.

Застосування правила Лопіталя до обчислення границь функцій

Для розкриття невизначеностей $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ і $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, які називають основними, застосовується наступна теорема, що має назву ***правило Лопіталя***.

Теорема. Нехай функції $f(x), \varphi(x)$ визначені і диференційовані в околі точки x_0, за винятком, можливо самої точки x_0, причому

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0 \text{ або } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty,$$

і в указаному околі $\varphi' \neq 0$. Тоді якщо існує границя відношення похідних $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує і границя відношення $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ і

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

***Зауваження* 1**.Теорема справедлива і в тому випадку, коли $x\to\infty$.

***Зауваження* 2**. Якщо похідні $f'(x)$ і$\varphi'(x)$ задовольняють ті самі умови, що й функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то теорему можна застосувати ще раз. При цьому дістанемо: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$.

Взагалі, теорему можна застосувати доти, поки не прийдемо до відношення похідних $\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$, яке має певну границю при $x\to x_0$. Цю саму границю матиме й відношення функцій:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}.$$

Зразки розв'язування задач

1.. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{8-x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(x^2-4x+4\right)'}{\left(8-x^3\right)'}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-4}{-3x^2}=\frac{2\cdot 2-4}{-3\cdot 2^2}=\frac{0}{-12}=0$.

2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{12+3x}-3}{x^2-x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{12+3x}}\cdot 3}{2x-1}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{12+3\cdot(-1)}}}{2(-1)-1}=-\frac{1}{6}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}\cdot 5-e^{2x}\cdot 2}{1}=5e^0-2e^0=5-2=3$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot 3}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos 3x\cdot 3}{2}=\frac{9\cos 0}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-4x-2x^3}{3x^2-4x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-6x^2}{6x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{6}=\infty$.

Відомі ще й такі невизначеності, як $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (∞^0), (1^∞), (0^0). Покажемо, як ці невизначеності зводяться до основних.

а) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, то невизначеність виду $(0\cdot\infty)$ можна звести до основних так:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot\varphi(x)]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right) \text{ або } \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot\varphi(x)]=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

б) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, то невизначеність виду $(\infty-\infty)$ зводиться до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/\varphi(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(1/\varphi(x)\right)-\left(1/f(x)\right)}{1/f(x)\cdot\varphi(x)}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

в) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)^{\varphi(x)}\right]=\left(0^0\right)=e^{\ln\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\varphi(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\ln[f(x)]^{\varphi(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)}.$$

Таким чином, невизначеність $\left(0^0\right)$ зводиться до невизначеності $(0\cdot\infty)$, розглянутої вище. Аналогічно розкривається невизначеність $\left(1^\infty\right)$.

Зразки розв'язування задач

1. $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\cdot tg\frac{\pi x}{4}=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(2-x)}{\left(1/tg\frac{\pi x}{4}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(2-x)}{ctg\frac{\pi x}{4}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{\left(-1/\sin^2\frac{\pi x}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin x}{x^2\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\infty.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=\left(1^\infty\right)=e^{\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^x-1}}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\left(1+x^2\right)e^x}}=e^0=1.$$

Зростання і спадання функції.

Функція $y=f(x)$ називається ***зростаючою*** на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать до цього інтервалу, і таких, що $x_1<x_2$, справджується нерівність $f(x_1)<f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$ називається ***спадною*** на інтервалі (a, b), якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать до цього інтервалу, і таких, що $x_1 < x_2$, справджується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Як зростаючі, так і спадні функції називаються ***монотонними***, а інтервали, в яких функція зростає або спадає, – ***інтервалами монотонності***.

Зростання і спадання функції $y = f(x)$ характеризується знаком її похідної: якщо у деякому інтервалі $f'(x) > 0$, то функція зростає на цьому інтервалі; якщо ж $f'(x) < 0$, то функція спадає в цьому інтервалі.

Інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю, або точками, де похідна не існує. Ці точки називаються ***критичними точками***.

Отже, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти похідну даної функції;
3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та за умови, що $f'(x)$ не існує;
4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної.

На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

Зразки розв'язування задач

Знайти інтервали монотонності функції.

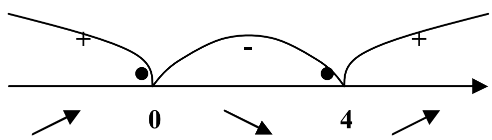
а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$.

1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; +\infty)$.
2) $f'(x) = 3x^2 - 12x$.
3) Критичні точки:

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 12 = 0$ або $3x(x-4) = 0$, звідки $x_1 = 0, \quad x_2 = 4$.

Похідна існує на всій області визначення.

4) Знаки похідної:



Функція зростає на інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(4; +\infty)$. Функція спадає на інтервалі $(0; 4)$.

б) $f(x)=\frac{4}{x}-2x$.

1) Область визначення $D(f): x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

2) $f'(x)=-\frac{4}{x^2}-2=\frac{-4-2x^2}{x^2}=\frac{-2(2+x^2)}{x^2}$.

3) Критичні точки:

$f'(x)\neq 0$, бо $2+x^2\neq 0$.

Похідна не існує в точці $x=0$, але ця точка не входить в $D(f)$. Тобто критичних точок немає.

4) На всій області визначення $f'(x)<0$, отже функція всюди спадає.

Локальний екстремум функції.

Точка x_0 називається ***точкою максимуму (або мінімуму)*** функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0<|x-x_0|<\delta$ цієї точки, який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$ (або $f(x)>f(x_0)$).

Правило знаходження екстремумів (максимумів і мінімумів) за допомогою першої похідної:

1) знайти область визначення $f(x)$;
2) знайти похідну $f'(x)$;
3) знайти критичні точки;
4) дослідити знак $f'(x)$ на інтервалах, на які знайдені критичні точки ділять область визначення $f(x)$.

   При цьому критична точка x_0 є точкою мінімуму, якщо при переході через неї зліва направо $f'(x)$ змінює знак з “-” на “+”, x_0 є точкою максимуму, якщо $f'(x)$ змінює знак з “+” на “-”.
5) обчислити значення функції в точках екстремуму (екстремуми).

Зразки розв'язування задач

Знайти екстремуми функцій.

а). $f(x)=\frac{4x}{x^2+4}$.

1) Область визначення функції $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

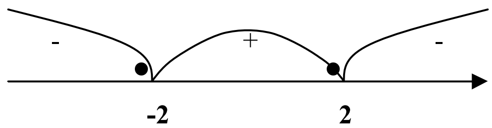
2) $f'(x)=\dfrac{4\left(x^2+4\right)-4x\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{4x^2+16-8x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{16-4x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$.

3) Критичні точки:

$f'(x)=0 \Rightarrow 16-4x^2=0$ або $4-x^2=0$, звідки $x=\pm 2$.

$f'(x)$ існує для всіх $x\in(-\infty;\infty)$.

4) Знаки y':



При переході через точку $x=-2$ похідна змінює знак з « - » на « + », тому точка $x=-2$ є точкою мінімуму. При переході через точку $x=2$ похідна змінює знак з « + » на « - ». Отже, точка $x=2$ є точкою максимуму.

$y_{min}=y(-2)=\dfrac{4\cdot(-2)}{(-2)^2+4}=-\dfrac{8}{16}=-\dfrac{1}{2}$; $y_{max}=y(2)=\dfrac{4\cdot 2}{2^2+4}=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$;

б) $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{1-x}$.

1) Область визначення $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

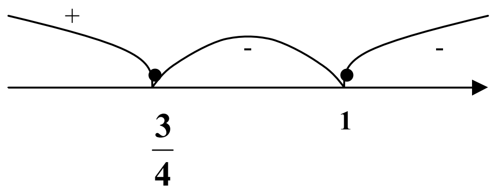
2) $f'(x)=1\cdot(1-x)^{\frac{1}{3}}+x\cdot\dfrac{1}{3}(1-x)^{-2/3}\cdot(-1)=\sqrt[3]{1-x}-\dfrac{x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\dfrac{3(1-x)-x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}=$

$=\dfrac{3-3x-x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\dfrac{3-4x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$.

3) Критичні точки: а) $f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 3-4x=0,\ x=\dfrac{3}{4}$.

б) $f'(x)$ не існує при $x=1\in D(f)$.

4) Знаки y':



При переході через точку $x=\dfrac{3}{4}$ похідна змінює знак з « + » на « - », тому $x=\dfrac{3}{4}$ є точкою максимуму. При переході через точку $x=1$ похідна не змінює свій знак. Отже, критична точка $x=1$ не є екстремальною.

5) $y_{max} = y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити границі функцій за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+2x-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+5x-1}{4x^2+2x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-arctgx}{x^3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

2. Знайти інтервали монотонності функцій:

а) $y=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$;

б) $y=ln\left(1+x^2\right)$.

3. Знайти екстремуми функцій:

а) $f(x)=2x^3-15x^2-84x+8$;

б) $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$.

Тема 7. ПОНЯТТЯ ПЕРВІСНОЇ ФУНКЦІЇ ТА НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. МЕТОД БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ІНТЕГРУВАННЯ

Функція $F(x)$ називається ***первісною функції*** $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційована на $(a;b)$ і $F'(x)=f(x)$ для всіх $x\in(a;b)$. Очевидно, що будь-яка з функцій $F(x)+C$, де C - довільна стала, також є первісною функції $f(x)$ на цьому проміжку.

Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ називають ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначають

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

де $f(x)$ - підінтегральна функція, $f(x)dx$ - підінтегральний вираз, C - довільна стала.

Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають ***інтегруванням*** цієї функції.

Властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$.

5. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ - довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

При обчисленні невизначених інтегралів зручно користуватися наступними правилами: якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, тоді

$$\int f(kx)dx = \frac{1}{k}F(kx) + C, \qquad \int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C,$$

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C,$$

де k та b - сталі величини.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$,

1'. $\int dx = x + C$,

2. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$,

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\,a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$,

3'. $\int e^x dx = e^x + C$,

4. $\int sin\,x dx = -cos\,x + C$,

5. $\int cos\,x dx = sin\,x + C$,

6. $\int \dfrac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$,

7. $\int \dfrac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$,

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\,x + C$,

8'. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\dfrac{x}{a} + C,\ a > 0$,

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$,

9'. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a} + C,\ a \neq 0$,

10. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$,

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$, $a \neq 0$,

12. $\int tgxdx = -ln|cos\,x| + C$,

13. $\int ctgxdx = ln|sin\,x| + C$,

14. $\int \dfrac{dx}{sin\,x} = ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C$,

15. $\int \dfrac{dx}{cos\,x} = ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Зауваження. Варто відзначити, що задача інтегрування функції вирішується неоднозначно. Тобто один і той же інтеграл може бути обчислений не єдиним методом.

Метод безпосереднього інтегрування полягає у зображенні вихідного інтеграла у вигляді алгебраїчної суми табличних інтегралів.

Зразки розв'язування задач

Обчислити інтеграли.

1. $\int\left(x^2-2x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+\frac{5}{x}\right)dx$.

Користуючись властивостями 4 та 5, будемо мати:

$$\int\left(x^2-2x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+\frac{5}{x}\right)dx=\int x^2dx-\int 2x\sqrt{x}dx+\int 3\sqrt[3]{x}dx+\int\frac{5}{x}dx=\int x^2dx-2\int x^{3/2}dx+$$

$$+3\int x^{\frac{1}{3}}dx+5\int\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^{5/2}}{5/2}+3\frac{x^{4/3}}{4/3}+5ln|x|+C=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{5}\sqrt{x^5}+\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4}+5ln|x|+C.$$

2. $\int\left(5^x-\frac{3}{cos^2x}+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=\int 5^xdx-3\int\frac{dx}{cos^2x}+4\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{5^x}{ln5}-3tgx+$

$+4arcsin\,x+C.$

3. $\int\frac{\sqrt[3]{x}+2x-x^4}{x^5}dx=\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x^5}dx+2\int\frac{x}{x^5}dx-\int\frac{x^4}{x^5}dx=\int\left(x^{-\frac{14}{3}}+2x^{-4}-x^{-1}\right)dx=$

$$=\frac{x^{-11/3}}{-11/3}+2\frac{x^{-3}}{-3}-ln|x|+C=-\frac{3}{11\sqrt[3]{x^{11}}}-\frac{2}{3x^3}-ln|x|+C.$$

4. $\int\left(3\,sin\,6x-\frac{2}{5x-1}+e^{\frac{x}{3}}\right)dx$.

Тут, крім властивостей 4 та 5, застосуємо правила інтегрування. Дістанемо:

$$\int\left(3\,sin\,6x-\frac{2}{5x-1}+e^{\frac{x}{3}}\right)dx=3\int sin\,6xdx-2\int\frac{dx}{5x-1}+\int e^{\frac{x}{3}}dx=3\left(-\frac{1}{6}cos\,6x\right)-$$

$$-2\cdot\frac{1}{5}ln|5x-1|+3e^{\frac{x}{3}}+C=-\frac{1}{2}cos\,6x-\frac{2}{5}ln|5x-1|+3e^{\frac{x}{3}}+C.$$

5. $\int\left(\frac{3}{8+5x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\right)dx=\int\left(\frac{3}{8+\left(\sqrt{5}x\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\right)dx=3\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}arctg\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{8}}-$

$-\frac{1}{2}arcsin\,2x+C\;=\frac{3}{2\sqrt{10}}arctg\frac{\sqrt{5}x}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}arcsin\,2x+C.$

6. $\int\frac{x^2dx}{1+x^2}$.

Інтеграл не є табличним, тому за допомогою алгебраїчних перетворень треба підінтегральну функцію подати у такому вигляді, щоб можна було застосувати властивості невизначеного інтеграла та обчислити його. Для цього в чисельнику дробу додамо і віднімемо 1. Поділивши почленно $\left(1+x^2\right)-1$ на $\left(1+x^2\right)$, отримаємо алгебраїчну суму двох табличних інтегралів:

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\int\frac{\left(1+x^2\right)-1}{1+x^2}dx=\int 1dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-arctgx+C.$$

7. $\int ctg^2xdx$.

Використаємо формулу тригонометрії: $1+ctg^2x=\frac{1}{sin^2x}$.

Тоді $\int ctg^2xdx=\int\left(\frac{1}{sin^2x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{sin^2x}-\int dx=-ctgx-x+C.$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\int\left(\frac{7}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt{x^2-2}}+\frac{2}{3x^2-9}\right)dx$;

2. $\int 3^{2x}\cdot 2^x\,dx$;

3. $\int\frac{4x^2+3\sqrt{x}-5}{x^4}dx$;

4. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{5}{x}-2\,cos\frac{x}{4}\right)dx$;

5. $\int\frac{dx}{sin^2x\cdot cos^2x}$;

6. $\int\left(\frac{8}{4-2x}-\frac{3}{2x^2-4}+e^{-3x}\right)dx$.

Тема 8. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ (ЗАМІНИ ЗМІННОЇ, ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ)

Заміна змінної у невизначеному інтегралі виконується за допомогою підстановок двох типів:

1. Інтеграл $\int f(x)dx$ зображають у вигляді:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt,$$

де функція $x=\varphi(t)$ має обернену функцію $t=\varphi^{-1}(x)$ і для функції $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ відома первісна $F(t)$.

Тоді $\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(t)+C = F\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C$.

2. Інтеграл $\int g(x)dx$ записують у вигляді

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx,$$

в якому для функції $f(x)$ відома первісна $F(x)$.

Тоді

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} \varphi(x)=u \\ \varphi'(x)dx=du \end{vmatrix} = \int f(u)du = F(u)+C = F(\varphi(x))+C.$$

В обох випадках досягається мета спростити вихідний інтеграл та привести його до табличного інтеграла.

Зразки розв'язування задач

Обчислити інтеграли.

1. $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Поклавши $x=t^3$, знайдемо $dx=3t^2dt$. Ця підстановка призведе до того, що під знаком синуса з'явиться змінна інтегрування, а не корінь з неї. Отримаємо:

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{\sin t\cdot 3t^2dt}{\sqrt[3]{t^6}} = 3\int \sin t dt = -3\cos t + C.$$

Відповідь повинна бути виражена через початкову змінну x. Підставляючи в результат інтегрування $t=\sqrt[3]{x}$, дістанемо:

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}} = -3\cos\sqrt[3]{t} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \begin{vmatrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \\ t=\sqrt{x} \end{vmatrix} = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{(1+t)-1}{1+t}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2t - 2\ln|1+t| + C =$

$= 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C.$

3. $$\int\frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx=\left|\begin{aligned}&2\ln x+3=t\\&\frac{2dx}{x}=dt\\&\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}dt\end{aligned}\right|=\frac{1}{2}\int t^3dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{8}(2\ln x+3)^4+C.$$

4. $$\int\frac{\cos 5x dx}{\sqrt[6]{1-2\sin 5x}}=\left|\begin{aligned}&1-2\sin 5x=t\\&-10\cos 5xdx=dt\\&\cos 5xdx=-\frac{1}{10}dt\end{aligned}\right|=-\frac{1}{10}\int\frac{dt}{\sqrt[6]{t}}=-\frac{1}{10}\int t^{-\frac{1}{6}}dt=-\frac{1}{10}\cdot\frac{t^{5/6}}{5/6}+C=$$

$$=-\frac{3}{25}\sqrt[6]{1-2\sin 5x}+C.$$

5. $$\int\frac{arctg 2x}{1+4x^2}dx=\left|\begin{aligned}&arctg 2x=t\\&\frac{2dx}{1+4x^2}=dt\\&\frac{dx}{1+4x^2}=\frac{1}{2}dt\end{aligned}\right|=\frac{1}{2}\int tdt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{4}arctg^2 2x+C.$$

6. $$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}-2}}=\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(x^5)^2-2}}=\left|\begin{aligned}&x^5=t\\&5x^4dx=dt\\&x^4dx=\frac{1}{5}dt\end{aligned}\right|=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2}}=\frac{1}{5}\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|x^5+\sqrt{x^{10}-2}\right|+C.$$

7. $$\int\frac{2^x dx}{9-4^x}=\int\frac{2^x dx}{9-(2^x)^2}=\left|\begin{aligned}&2^x=t\\&2^x\ln 2dx=dt\\&2^x dx=\frac{1}{\ln 2}dt\end{aligned}\right|=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{dt}{9-t^2}=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{6\ln 2}\cdot\ln\left|\frac{3+2^x}{3-2^x}\right|+C.$$

Метод інтегрування частинами

Якщо $u(x)$ та $v(x)$ - функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Тут вважається заданою ліва частина формули, тобто $\int udv$. Обчислення цього інтеграла зводиться до знаходження диференціала du функції u та функції v за відомим її диференціалом dv. Функція v визначається неоднозначно, з точністю до довільної сталої C, тому вибирають ту функцію, яка має найпростіший вигляд (як правило, покладають $C = 0$).

Методом інтегрування частинами зручно обчислювати такі типи інтегралів:

1) інтеграли виду $\int P(x)\cdot a^{kx}dx$, $\int P(x)\cdot e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ - многочлен n-ого степеня від x, k - дійсне число. У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$, а за dv - вираз, що залишився;

2) інтеграли виду $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)arctgxdx$, $\int P(x)arcctgxdx$. У цих інтегралах слід взяти за u множник $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, а за dv - $P(x)dx$.

Зразки розв'язування задач

Обчислити інтеграли.

1. $\int x\cos xdx$.

Покладемо $u = x$, $dv = \cos xdx$. Тоді $du = dx$, $v = \int \cos xdx = \sin x$.

Використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$\int x\cos xdx = x\cdot\sin x - \int \sin xdx = x\cdot\sin x + \cos x + C.$$

Надалі розв'язання прикладів наводяться в конспективному вигляді: після умови вказано вирази u, dv і du, v.

2. $$\int (2x-3)\cdot 4^x dx = \left| \begin{matrix} u = 2x-3, du = 2dx \\ dv = 4^x dx, v = \dfrac{4^x}{\ln 4} \end{matrix} \right| = (2x-3)\cdot\frac{4^x}{\ln 4} - \int \frac{2\cdot 4^x dx}{\ln 4} =$$

$$= \frac{1}{\ln 4}(2x-3)\cdot 4^x - \frac{2}{\ln 4}\int 4^x dx = \frac{1}{\ln 4}(2x-3)\cdot 4^x - \frac{2}{\ln 4}\cdot\frac{4^x}{\ln 4} + C = \frac{1}{\ln 4}(2x-3)\cdot 4^x -$$

$$- \frac{2}{\ln^2 4}\cdot 4^x + C.$$

3. $$\int \lg xdx = \left| \begin{matrix} u = \lg x, du = \dfrac{dx}{x\ln 10} \\ dv = dx, v = x \end{matrix} \right| = x\lg x - \frac{1}{\ln 10}\int x\cdot\frac{dx}{x} = x\lg x - \frac{1}{\ln 10}x + C.$$

4. $\int x\cdot arctgxdx=\left|\begin{matrix} u=arctgx, du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx, v=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\dfrac{x^2}{2}\cdot arctgx-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{x^2dx}{1+x^2}=\dfrac{x^2}{2}arctgx-$

$-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx=\dfrac{x^2}{2}arctgx-\dfrac{1}{2}\int\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=\dfrac{x^2}{2}arctgx-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}arctgx+C.$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}}$;
2. $\int\sqrt[5]{sin\,3x}\cdot cos\,3xdx$;
3. $\int e^{2\cos x}\cdot sin\,xdx$;
4. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot arccos^2 x}$
5. $\int(2-x)\cdot e^{-x}dx$;
6. $\int x\cdot sin\dfrac{x}{4}dx$;
7. $\int arctg3xdx$;
8. $\int\dfrac{ln\,x}{x^3}dx$.

Тема 9. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ

Інтегрування раціональних функцій

До раціональних функцій належать цілі та дробові раціональні функції. Інтегрування цілих раціональних функцій (многочленів) не складне. Розглянемо дробово-раціональну функцію (раціональний дріб), яка являє собою відношення двох многочленів степенів n і m із коефіцієнтами $A_n\neq 0$ та $B_m\neq 0$ відповідно:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+...+A_1x+A_0}{B_mx^m+B_{m-1}x^{m-1}+...+B_1x+B_0}. \qquad (9.1)$$

Раціональний дріб називають ***правильним***, якщо степінь чисельника менше від степеня знаменника $(n<m)$. У противному разі, а саме при $n\geq m$,дріб називають ***неправильним***.

Якщо раціональний дріб (9.1) неправильний, то діленням многочлена $P(x)$ на $Q(x)$ його можна подати у вигляді суми цілої раціональної функції та правильного раціонального дробу, тобто

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=T(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

де многочлен $T(x)$ - частка від ділення, многочлен $R(x)$ - остача від ділення.

Отже, щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, треба:

1) розкласти многочлен $Q(x)$ на лінійні множники, які відповідають його дійсним кореням, та квадратні множники, які відповідають його комплексним кореням, а саме $Q(x)=(x-a)^n\cdot\left(x^2+px+q\right)^m$, де p,q - дійсні числа, n,m - цілі додатні числа, a - n-кратний дійсний корінь многочлена $Q(x)$, а квадратний тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів $\left(p^2-4q<0\right)$;

2) розкласти дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на елементарні дроби таким чином:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n\cdot\left(x^2+px+q\right)^m}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+ \quad (9.2)$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+px+q\right)^m},$$

де $A_1, A_2,\ldots, A_n, M_1, M_2,\ldots, M_m, N_1, N_2,\ldots, N_m$ - невизначені коефіцієнти (деякі дійсні числа).

Для їх знаходження найчастіше користуються так званим ***методом невизначених коефіцієнтів***. Потрібно звести праву частину рівності (9.2) до спільного знаменника, який дорівнює многочлену $Q(x)$. В результаті дістанемо два рівні дроби з однаковими знаменниками, а їх чисельниками є тотожні многочлени. Порівнюючи далі коефіцієнти при однакових степенях x лівої та правої частин тотожності, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначаються шукані невідомі $A_1, A_2,\ldots, A_n, M_1, M_2,\ldots, M_m, N_1, N_2, \ldots, N_m$.

Існує ще один спосіб знаходження невизначених коефіцієнтів. У рівності тотожних многочленів чисельників лівого та правого дробу розкладання (9.2) слід надавати змінній x довільні числові значення стільки разів, скільки коефіцієнтів потрібно визначити. При цьому обчислення значно спрощуються, якщо замість змінної x брати значення коренів лінійних множників $(x-a)$;

3) тепер залишається обчислити $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ як суму інтегралів від знайдених елементарних дробів. Найчастіше матимемо справу із наступними інтегралами:

I. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{A}{(1-n)} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$, $n \neq 1$.

II. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\,ln|x-a| + C$, $n = 1$.

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$, $m = 1$.

Зразки розв'язування задач

Обчислити інтеграли.

1. $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$.

Дріб $\frac{x}{(x+1)(2x+1)}$ є правильним. Розкладемо його на суму найпростіших дробів. Коренями знаменника є дійсні числа -1 та $-\frac{1}{2}$, серед яких немає кратних. Тому чисельниками кожного дробу будуть числа A, B. Отримаємо: $\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1}$. Помноживши обидві частини рівності на спільний знаменник, здобудемо:

$x = A(2x+1) + B(x+1)$, або $x = 2Ax + A + Bx + B$.

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в правій і лівій частинах, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{matrix} \text{При } x^1: \\ \text{при } x^0: \end{matrix} \begin{cases} 1 = 2A + B, \\ 0 = A + B, \end{cases}$$ з якої знайдемо $A = 1, B = -1$.

Отже, розкладання раціонального дробу на найпростіші має вигляд:

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}.$$

Невідомі A і B можна визначити інакше. Після того, як позбулися знаменника, змінній x можна надати стільки часткових значень, скільки коефіцієнтів треба визначити (в даному випадку – два значення). Особливо зручно надавати x ті значення, які є дійсними коренями знаменника. Застосуємо цей прийом до нашого дробу. Після звільнення від знаменника отримали вираз $x = A(2x+1) + B(x+1)$.

$$\text{При } \begin{matrix} x=-1: \\ x=-\frac{1}{2}: \end{matrix} \begin{cases} -1 = A(2\cdot(-1)+1) + B(-1+1), & \textit{звідки } -1 = -A,\ A = 1. \\ -\frac{1}{2} = A\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right) + B\left(-\frac{1}{2}+1\right), & \textit{звідки } -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}B,\ B = -1. \end{cases}$$

В результаті отримали ті самі значення A і B, що й при першому способі визначення коефіцієнтів.

Таким чином,

$$\int\frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{2x+1}=ln|x+1|-\frac{1}{2}ln|2x+1|+C=ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\right|+C.$$

<u>Зауваження</u>. Якщо корені знаменника – числа тільки дійсні та різні, спосіб часткових значень є найзручнішим. В інших випадках поєднують обидва способи.

2. $\int\frac{x^3dx}{x^2+2x+1}$.

Підінтегральний дріб є неправильним, тому виділивши в ньому цілу частину, отримаємо:

$$\frac{x^3}{x^2+2x+1}=x-1+\frac{3x+1}{x^2+2x+1}.$$

Тепер даний інтеграл можна подати у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int\frac{x^3dx}{x^2+2x+1}=\int(x-1)dx+\int\frac{3x+1}{x^2+2x+1}dx=I_1+I_2.$$

$$I_1=\int(x-1)dx=\frac{x^2}{2}-x+C_1.$$

Щоб обчислити другий інтеграл, розкладемо дріб $\frac{3x+1}{x^2+2x+1}$ на суму найпростіших дробів.

$$\frac{3x+1}{x^2 2x+1}=\frac{3x+1}{(x+1)^2}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1},\ 3x+1=A+B(x+1)=A+Bx+B.$$

Для отримання коефіцієнтів A і B використаємо корінь $x=-1$ знаменника. При $x=-1:\ -3+1=A,\ A=-2$. Зважаючи на те, що інших коренів не існує, для визначення B порівняємо коефіцієнти при x в обох частинах рівності. В лівій частині він дорівнює 3, а в правій B. Отже, $B=3.$

$$I_2=\int\frac{3x+1}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{-2}{(x+1)^2}dx+\int\frac{3}{x+1}dx=-2\int(x+1)^{-2}dx+3\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=-2\cdot\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+3\ln|x+1|+C_2=\frac{2}{x+1}+3\ln|x+1|+C_2.$$

Шуканий інтеграл дорівнюватиме: $\int\frac{x^3dx}{x^2+2x+1}=\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{x+1}+3\ln|x+1|+C$.

3. $\int \frac{2x+1}{x^3+x}dx$.

Дріб $\frac{2x+1}{x^3+x}$ є правильним. Розкладемо знаменник дробу на множники: $x^3+x=x\left(x^2+1\right)$. Бачимо, що знаменник має один дійсний корінь $x_1=0$ та пару спряжених коренів $x_{2,3}=\pm i$. Тому розкладання дробу на суму найпростіших має вигляд:

$$\frac{2x+1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1},\text{звідки}$$

$$2x+1=A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)x=Ax^2+A+Bx^2+Cx=\left(A+B\right)x^2+Cx+A.$$

$$\begin{aligned}&при\\&при\\&при\end{aligned}\begin{cases}x=0:1=A,\\x^2:0=A+B,B=-A=-1,\\x^1:2=C.\end{cases}$$

Отже, $\int \frac{2x+1}{x^3+x}dx=\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{-x+2}{x^2+1}dx$.

Перший інтеграл є табличним $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C_1$. Для інтегрування другого доданка розіб'ємо дріб на суму двох дробів: $-\int \frac{xdx}{x^2+1}+\int \frac{2dx}{x^2+1}$. Перший з них інтегруємо, використовуючи заміну змінної:

$$\int \frac{xdx}{x^2+1}=\left|\begin{matrix}x^2+1=t\\2xdx=dt\\xdx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C_2=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C_2.$$

Другий інтеграл дорівнюватиме: $\int \frac{2dx}{x^2+1}=2arctgx+C_3$.

Таким чином, $\int \frac{2x+1}{x^3+x}dx=ln|x|-\frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right)+2arctgx+C$.

4. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$.

Знаменник дробу не має дійсних коренів, тому не розкладається на лінійні множники. Вчинимо інакше, а саме, виділимо в ньому повний квадрат.

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+25}=\int \frac{dx}{\left(x^2+6x+9\right)-9+25}=\int \frac{dx}{(x+3)^2+16}=\frac{1}{4}arctg\frac{x+3}{4}+C.$$

Інтегрування функцій, раціонально залежних від тригонометричних

Домовимось позначати $R(\sin x, \cos x)$ - раціональну функцію, залежну від $\sin x, \cos x$, якщо вона утворена з цих тригонометричних функцій та сталих за допомогою раціональних алгебраїчних дій.

1) Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ приводяться до інтегралів від раціональної функції нового аргументу t підстановкою $tg\frac{x}{2} = t$, яка називається ***універсальною***.

При цьому використовуються формули:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ x = 2arctgt,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Варто помітити, що недоліком цієї підстановки є той факт, що її використання в багатьох випадках зводить вихідний інтеграл до інтегралу від раціонального дробу з великими степенями. Тому в багатьох випадках користуються іншими підстановками . Наведемо деякі з них:

а) $\int R(\sin x, \cos x)dx$, в якому підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно, раціоналізується за допомогою підстановки $tgx = t$. При цьому використовуються формули:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ x = arctgt, dx = \frac{dt}{1+t^2};$$

б) $\int R(tgx)dx$. Тут підінтегральна функція залежить раціональним образом тільки від tgx. Слід застосовувати підстановку $tgx = t$, тоді $x = arctgt$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

2) Інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$ обчислюються за допомогою таких підстановок:

а) якщо m - ціле додатне непарне число: $\cos x = t$;

б) якщо n - ціле додатне непарне число: $\sin x = t$;

в) якщо m та n - цілі додатні парні числа: використовуються формули пониження степеня

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$$

г) якщо m та n - цілі парні числа, але хоч одне з них від'ємне: $tgx = t$;

д) якщо m та n - цілі непарні числа і від'ємні: $tgx = t$.

3) Інтеграли виду $\int sin\,\alpha x \cdot cos\beta x dx$, $\int sin\,\alpha x \cdot sin\,\beta x dx$, $\int cos\,\alpha x \cdot cos\,\beta x dx$ обчислюються за допомогою тригонометричних формул:

$$sin\,\alpha x \cdot cos\,\beta x = \frac{1}{2}\left[sin(\alpha-\beta)x + sin(\alpha+\beta)x\right],$$

$$sin\,\alpha x \cdot sin\,\beta x = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta)x - cos(\alpha+\beta)x\right],$$

$$cos\,\alpha x \cdot cos\,\beta x = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta)x + cos(\alpha+\beta)x\right].$$

Зразки розв'язування задач

Обчислити інтеграли.

1. $\int \frac{dx}{5+3cos\,x}$.

Застосуємо до інтеграла універсальну підстановку

$tg\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Тоді $\int \frac{dx}{5+3cos\,x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{\left(5+\frac{3-3t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{5(1+t^2)+3-3t^2} =$

$$= \int \frac{2dt}{2t^2+8} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2} arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{2} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{5-sin^2 x + 2cos^2 x}$.

Так як підінтегральна функція є раціональною функцією від $sin^2 x$ та $cos^2 x$, зручною є заміна $tgx = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тоді $sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$.

Підставимо вирази в інтеграл і отримаємо:

$$\int \frac{dx}{5-sin^2 x+2cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(5-\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{5+5t^2-t^2+2} =$$

$$= \int \frac{dt}{4t^2+t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{7}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{4}{7}} arctg\frac{t}{\sqrt{\frac{7}{4}}} + C = \frac{1}{2\sqrt{7}} arctg\frac{2t}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}} arctg\frac{2tgx}{\sqrt{7}} + C.$$

3. $\int cos^3 x\, sin^4 x dx$ ($m = 4$, $n = 3$ - ціле додатне непарне число).

$$\int cos^3 x\, sin^4 x dx = \int cos^2 x\, sin^4 x\, cos\, x dx = \left| \begin{array}{l} sin\, x = t \\ cos\, x dx = dt \\ cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| = \int \left(1 - t^2\right) t^4 dt =$$

$$= \int \left(t^4 - t^6\right) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{5} sin^5 x - \frac{1}{7} sin^7 x + C .$$

4. $\int sin^2 \frac{x}{3} dx$.

Підінтегральна функція містить тільки парний степінь синуса, який допускає пониження степеня за формулою: $sin^2 \frac{x}{3} = \dfrac{1 - cos\frac{2x}{3}}{2}$.

Отже, $\int sin^2 \frac{x}{3} dx = \frac{1}{2} \int \left(1 - cos \frac{2x}{3}\right) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int cos \frac{2x}{3} dx = \frac{1}{2} x - \frac{3}{4} sin \frac{2x}{3} + C.$

5. $\int sin\, 6x\, cos\, 7x dx$.

Перетворимо добуток тригонометричних функцій в суму згідно з наведеною формулою: $sin\, 6x\, cos\, 7x = \frac{1}{2} \left[sin(-x) + sin\, 13x\right] = \frac{1}{2} \left(-sin\, x + sin\, 13x\right)$. Проінтегруємо отриманий вираз:

$$\int sin\, 6x\, cos\, 7x dx = \frac{1}{2} \int \left(-sin\, x + sin\, 13x\right) dx = \frac{1}{2} \left(cos\, x - \frac{1}{13} cos\, 13x\right) + C .$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\int \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - 9x^2 + 20x} dx$;
2. $\int \dfrac{2x^2 - 7x + 8}{x^4 - 10x^2 + 9} dx$;
3. $\int \dfrac{(3x - 2) dx}{x^3 + 8x}$;
4. $\int \dfrac{dx}{x^2 + 4x + 5}$;
5. $\int \dfrac{dx}{2\, sin\, x - cos\, x}$;
6. $\int \dfrac{cos^2 \frac{x}{2}}{sin^4 \frac{x}{2}} dx$;
7. $\int tg^4 x dx$;
8. $\int \dfrac{dx}{cos^2 x + 1}$;
9. $\int sin\, 3x\, sin\, x dx$;
10. $\int sin \frac{x}{2} cos \frac{x}{3} dx$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001.
2. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2 ч. – К.: Техніка, 2004.
3. Шипачёв В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998.
4. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн.. – К: Либідь, 1994.
5. Вища математика:Збірник задач: Навч. посібник / За ред.В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004.
6. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов.- М.: Высшая школа, 2002.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.

Навчальне видання

Кадильникова Тетяна Михайлівна
Бас Тетяна Петрівна
Шинковська Ірина Леонідівна
Заєць Ірина Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина II

Навчальний посібник

Тем. план 2013, поз. 99

Підписано до друку . Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. . Умов. друк. арк. . Тираж пр. Замовлення №

Національна металургійна академія Україні
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна,4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ