

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**

**РОБОЧА ПРОГРАМА,
методичні вказівки та індивідуальні завдання
до вивчення дисципліни «Вища математика»
для студентів спеціальності 161 – хімічні технології та інженерія
(бакалаврський рівень вищої освіти)**

Частина 1

Дніпро НМетАУ 2017

УДК 517(07)

Робоча програма, методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 161 – хімічні технології та інженерія (бакалаврський рівень вищої освіти). Частина 1 / Укл.: В.Л. Копорулін, Л.В. Моссаковська, І.В. Щербина. – Дніпро: НМетАУ, 2017. – 53 с.

Наведені робоча програма до вивчення дисципліни «Вища математика» у I семестрі, списки рекомендованої літератури, методичні вказівки, супроводжені розв'язанням типових прикладів з докладними поясненнями, та варіанти контрольних завдань.

Призначені для студентів першого курсу спеціальності 161 – хімічні технології та інженерія заочної форми навчання (бакалаврський рівень вищої освіти).

Укладачі: В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.
І.В. Щербина, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Л.В. Моссаковська, ст. викл.

Відповідальний за випуск В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОБОЧА ПРОГРАМА (I семестр)	4
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	7
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1.	8
Методичні вказівки до виконання.	8
Індивідуальні завдання.	34
ВИМОГИ до оформлення контрольної роботи, її подання і перевірка	47
ДОДАТКИ	50

ВСТУП

Вища математика без перебільшення є однією з найважливіших складових практично усіх природознавчих і технічних дисциплін. Тому її вивчення вкрай важливе для фундаментальної фахової підготовки сучасного інженера.

Лекції і практичні заняття, які проводяться для студентів заочної форми навчання, носять переважно оглядовий характер. Їх мета – створити уяву щодо загальної схеми побудови даного розділу математики, ознайомити з основними теоретичними відомостями і методами розв’язання типових задач. Головною ж формою навчання студента-заочника є самостійна робота. Вивчення теоретичних положень доцільно супроводжувати самостійним розв’язанням відповідних задач і лише після вироблення достатніх практичних навичок приступати до виконання завдань контрольної роботи. Необхідні консультації протягом навчального семестру надаються викладачами академії згідно із затвердженим розкладом.

Сьогодні в Інтернеті неважко знайти величезну кількість літератури з будь-якої теми, в тому числі і з вищої математики. Тому до списку рекомендованої літератури увійшли лише деякі з найбільш уживаних на думку авторів джерел. Рекомендації щодо їх використання дані у методичних вказівках до виконання кожної контрольної роботи. Консультації відносно інших підручників студент може отримати у викладача.

РОБОЧА ПРОГРАМА

навчальної дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

І семестр

Розподіл навчальних годин

Кількість годин				Самостійної роботи	Кількість контр. робіт	Форма звітності
УСЬОГО	Аудиторних занять		Практичних занять			
	Усього	Лекцій				
165	26	12	14	139	1	екзамен

Зміст програми

1. Матриці та визначники. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1. Поняття матриці. Види матриць. Визначник квадратної матриці. Обчислення визначників другого та третього порядків. Властивості визначників. Обчислення визначників довільного порядку. Теорема розкладання та наслідок з неї. Дії над матрицями та їх властивості. Обернена матриця та її обчислення методом приєднаної матриці.

2. Розв'язування матричних рівнянь. Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь, сумісні і несумісні системи. Розв'язування сумісних систем за допомогою оберненої матриці та за формулами Крамера.

2. Основи аналітичної геометрії на площині

3. Предмет та основні задачі аналітичної геометрії на площині. Пряма лінія на площині, основні рівняння. Дослідження розв'язку системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь та його геометрична інтерпретація.

4. Криві другого порядку (коло, еліпс, гіпербола, парабола), їх рівняння та основні властивості.

5. Полярна система координат та її зв'язок з декартовою. Побудова кривих, заданих рівняннями в полярних координатах.

3. Границя і неперервність функції однієї змінної

6. Поняття множини. Множина дійсних чисел. Поняття функції. Способи завдання функцій. Класифікація функцій. Основні елементарні функції.

7. Означення послідовності та її границі. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності, зв'язок між ними. Границя функції в точці та у нескінченності. Односторонні границі. Основні теореми про границі. Монотонні й обмежені функції. Нескінченно великі і нескінченно малі функції, зв'язок між ними.

8. Важливі границі. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі. Типи невизначеностей та способи їх розкриття.

9. Поняття неперервності функції в точці та на проміжку. Точки розриву та їх класифікація.

4. Диференціальне числення функції однієї змінної

10. Похідна функції в точці, її геометричний та фізичний зміст. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Правила диференціювання. Похідна складеної функції. Логарифмічне диференціювання. Похідні оберненої, неявно та параметрично заданих функцій.

11. Поняття диференціала функції в точці і його геометричний зміст.

12. Похідні вищих порядків. Відшукування похідних другого порядку явно та параметрично заданих функцій.

13. Побудова рівнянь дотичної і нормалі до плоскої кривої, заданої різними способами.

5. Застосування диференціального числення функції однієї змінної

14. Основні теореми диференціального числення: теореми Ферма, Ролля, Лагранжа і Коші.

15. Правило Лопіталя та його застосування при розкритті невизначеностей різних типів.

16. Ознака монотонності функції. Локальний екстремум функції. Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Необхідна та достатні умови існування локального екстремуму функції.

17. Поняття опуклості (вгнутості) кривої. Критерії опуклості. Точки перегину. Необхідна та достатня умови існування точки перегину. Асимптоти кривої (означення). Вертикальні та похилі асимптоти.

18. Загальний план дослідження функції та побудови її графіка.

6. Диференціальне числення функції декількох змінних

19. Поняття функції декількох змінних. Геометричний зміст функції двох змінних. Область визначення, границя і неперервність функції двох змінних. Частинні похідні першого порядку функції декількох змінних.

20. Частинні похідні вищих порядків функції декількох змінних. Диференційовність у точці функції двох змінних, її повний та частинний диференціали. Частинні похідні першого порядку складеної та неявно заданої функцій декількох змінних.

21. Дотична площина і нормаль до поверхні. Екстремум функції двох змінних.

7. Комплексні числа і невизначений інтеграл

22. Побудова системи комплексних чисел, їх зображення на площині. Дії над комплексними числами, заданими у алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

23. Многочлени та їх корені: теорема Безу, основна теорема алгебри та наслідки з неї, розкладання многочленів на множники. Поняття раціонального дробу. Неправильні, правильні, найпростіші дроби. Розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші.

24. Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла. Геометричний зміст невизначеного інтеграла, його основні властивості. Таблиця невизначених інтегралів основних елементарних функцій. Найпростіші правила інтегрування. Безпосереднє інтегрування. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами.

25. Інтегрування дробово-раціональних функцій. Інтегрування деяких функцій, які раціонально залежать від тригонометричних та ірраціональних функцій.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

ПІДРУЧНИКИ І НАВЧАЛЬНІ ПОСІБНИКИ

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 304 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
4. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.

ЗБІРНИКИ ЗАДАЧ

5. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004. – 480 с.
6. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / Под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 576 с.
7. Сборник задач по математике для вузов. В 4 частях. Ч. 1: Учеб. пособие для вузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 289 с.
8. Сборник задач по математике для вузов. В 4 частях. Ч. 2: Учеб. пособие для вузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 432 с.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1

Виконання контрольної роботи треба починати з вивчення теоретичних положень за наведеними посиланнями, причому це необхідно поєднувати з самостійним розв'язанням рекомендованих задач. До виконання контрольних завдань доцільно приступати тільки після вироблення достатніх практичних навичок. Типові приклади наведені з метою допомогти в цьому.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

Рекомендується (скориставшись одним або двома з наведених нижче джерел)

– вивчити теоретичні положення за [2], гл. 1, §§ 1, 2.1- 2.3, 3.1-3.3, гл. 3, §§ 1.1-1.5, 3, 6; гл. 4, §§ 1-4, гл. 5, §§ 1-4; гл.6, §§1, 2, 3.4, гл.7, §1; [3], гл. I, §§ 1, 2, 3.1, 3.2, 4.1, 4.3, гл. III, §§ 9.1, 9.2, 10, 11, гл. V, гл. VI, гл. VII §§ 29-33, гл. IX §§43.1, 44-46; [4], гл. 1, гл. 2, гл. 3, §§ 1-3, 5-7 гл. 4, гл. 5, гл 6 §§1,2,гл.7, гл. 10, гл.11 § 1 , гл.12 §§ 1-4, 6,8;

– розібрати розв'язання задач у [1], гл. I-III, гл. IV, §§ 1, 2, 5, 6; гл. VI, гл.VII, § 1; гл. VIII, гл. IX, §§ 1-4.

– самостійно розв'язати задачі: [1], №№ 210, 222, 225, 226, 269, 275, 4, 5, 13, 15, 24, 65, 68, 71,72, 74, 105, 111, 115, 134, 145, 155, 156, 169, 657, 658, 667, 671, 672, 692-694, 727, 728, 771, 773, 778, 780, 820, 821, 864, 898, 902, 910, 914, 918, 920, 951 1024, 1031, 1040,1044, 1059,1083, 1091, 1102, 1176, 1197,1200,1214, 1223, 1232, 1236, 1278,1299, 1307,1337, 1344, 1349, 1368, 1376,1395, 1399, 1411,1412, 1430, 1434, 1454,1489, 1499, 1504, 1512, 1517, 1536; [5], гл. 1, №№ 1, 15, 104, 111, 113, 127, 131, 152, 162, 165, , гл. 3, №№ 123, 132, 137-а, 159, 280-3, 284-г, 300(2-6), 322(1-5), 344, 349-в; гл. 4, №№ 331-334, 343, 368, 384, 397, 437, 438, 501, 506, 528, гл. 5, №№ 33, 39, 43, 69, 108, 124, 186, 199, 219, 220, 252-1, 253, 254, 307, 321, 340, 382, 455, 458, 461; гл.6, №№30, 115, 120,130,167, 183, 187, 212, 249, 259, 266, 317, 324, 331, 337, 388, гл.7, №№ 1, 6, 8, 11, 14, 19, 27, 32,43,63, 65,72, 85, 115,123, 129, 133, 138,167, 170, 179, 193, 207, 217, 220, 223, 242, 277, 273, 283, 287, 299, 311, 341, 387; [6], №№ 1.1.3, 6, 7, 17, 53, 70, 1.2.2, 13, 26, 2.2.8, 9, 4.1.7, 4.2.2, 7-а, 9, 53-1, 56-1, 4.3.2-1, 29, 30, 62, 107, 6.1.3, 24, 6.4.22, 26, 28, 35, 39, 43, 49, 50, 61, 65, 93, 6.5.12-б, 15-а, 7.1.7, 12, 19, 20, 30, 36, 46, 60, 63, 66, 84, 86, 160, 161, 179, 7.2.16, 17, 7.3.12-14, 20-22, 24-

26, 46, 58, 63, 7.4.6, 9, 11, 41, 11.1.17, 19, 11.3.11-13, 15, 29, 30, 32, 11.4.4, 5, 8, 10, 14, 15, 22, 23, 25, 28, 29, 11.5.7, 8, 12, 17, 18, 11.7.8, 9, 23, 25; [7] №№: 1.143(а, б), 1.144(а,б), 1.145, 1.150, 1.174, 1.231, 1.228, 1.241, 1.237, 1.265, 1.269, 1.288, 2.12, 2.51, 2.81, 2.192; [8] №№ 5.106-5110, 5.234, 5.273, 5.307, 5.320, 5.401, 5.426, 6.57, 6.64, 6.90, 6.149, 6.168, 6.345, 6.414, 6.470, 7.15, 7.34, 7.107, 7.127, 7.167, 7.199, 8.5, 8.82, 8.89, 8.145.

Приклад 1. Обчислити $3A + 2B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9+4 & 12+10 \\ -3+2 & 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 22 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти матрицю Y з рівняння $AB + Y = 2B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. З рівняння знаходимо $Y = 2B - AB$. Оскільки

$$AB = \begin{pmatrix} 5 \times 1 + (-1) \times (-2) + 3 \times 3 & 5 \times 4 + (-1) \times (-4) + 3 \times (-1) \\ 2 \times 1 + (-2) \times (-2) + 1 \times 3 & 2 \times 4 + (-2) \times (-4) + 1 \times (-1) \\ 1 \times 1 + 3 \times (-2) + (-3) \times 3 & 1 \times 4 + 3 \times (-4) + (-3) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 21 \\ 9 & 15 \\ -14 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\text{то } Y = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & -8 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 21 \\ 9 & 15 \\ -14 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -13 \\ -13 & -23 \\ 20 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Обчислити C^T , якщо $C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $C^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 4. Обчислити $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами

другого стовпця.

Розв'язання. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$

$$= -4 \cdot (9 - 4) + 5 \cdot (-6 + 1) = -20 - 25 = -45.$$

Приклад 5. Обчислити A^{-1} , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Розв'язання. Обчислимо визначник $\det A$ матриці A та алгебраїчні доповнення до її елементів:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1)) - 3(1 \cdot (-1) - 3 \cdot 3) - 4(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3) = 2 + 30 + 28 = 60 \neq 0;$$

Приєднана матриця A^* обчислюється за формулою

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ де } A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} - \text{ алгебраїчні доповнення}$$

елементу матриці a_{ij} , M_{ij} – відповідний мінор елемента a_{ij} . Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 17;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

Отже, приєднана матриця є $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 10 & 10 & -10 \\ -7 & 11 & 1 \end{pmatrix}$ і тоді обернена

матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 10 & 10 & -10 \\ -7 & 11 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/60 & 7/60 & 17/60 \\ 1/6 & 1/6 & -1/6 \\ -7/60 & 11/60 & 1/60 \end{pmatrix}$$

Приклад 6. За допомогою оберненої матриці знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -11, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= -6. \end{aligned}$$

Розв'язання. Матриця A^{-1} , обернена до матриці A коефіцієнтів системи, знайдена раніше (див. приклад 1.5). Оскільки $\det A \neq 0$, то розв'язок системи існує і є єдиним, а саме,

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 10 & 10 & -10 \\ -7 & 11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} -11 - 7 - 102 \\ -110 - 10 + 60 \\ 77 - 11 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Зробимо перевірку, для чого підставимо знайдені значення невідомих до рівняння $AX = B$:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = B.$$

Таким чином, розв'язок системи $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ знайдений вірно.

Приклад 7. Знайти розв'язок системи рівнянь за допомогою правила Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо головний визначник системи.

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-5 - 1) - (25 + 1) -$$

$$-5 + 1 = -18 - 26 - 4 = -48.$$

Оскільки головний визначник системи $\det A = \Delta = -48 \neq 0$, то система сумісна і має єдиний розв'язок. Отже, правило Крамера застосовне.

Знайдемо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & -1 \end{vmatrix} = -2(-5 - 1) -$$

$$-(50 - 12) - 10 - 12 = 12 - 38 - 22 = -48;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -12 \end{vmatrix} = 3(50 - 12) + 2(25 + 1) -$$

$$-60 - 10 = 114 + 52 - 70 = 96;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -12 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -12 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(12 + 10) - (-60 - 10) -$$

$$-2(-5 + 1) = 66 + 70 + 8 = 144.$$

Тоді розв'язок системи знайдемо по формулам $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-48}{-48} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{96}{-48} = -2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{144}{-48} = -3.$$

Приклад 8. Задані координати вершин трикутника ABC :

$$A(-5; 3), B(15; 5), C(1; 7).$$

Знайти:

- 1) довжину сторони AB ;
- 2) координати точки M , яка ділить сторону AB у відношенні $4:1$;
- 3) загальні рівняння прямих AB і AC , нормальні вектори та кутові коефіцієнти цих прямих;
- 4) рівняння прямої AB у відрізках;
- 5) напрямний вектор та канонічне рівняння прямої AE , яка містить медіану трикутника ABC ;
- 6) внутрішній кут A в радіанах з точністю до $0,01$;
- 7) загальне рівняння висоти CD та її довжину;
- 8) рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно прямій AC .

Розв'язання. Трикутник зображений на рис. 1.

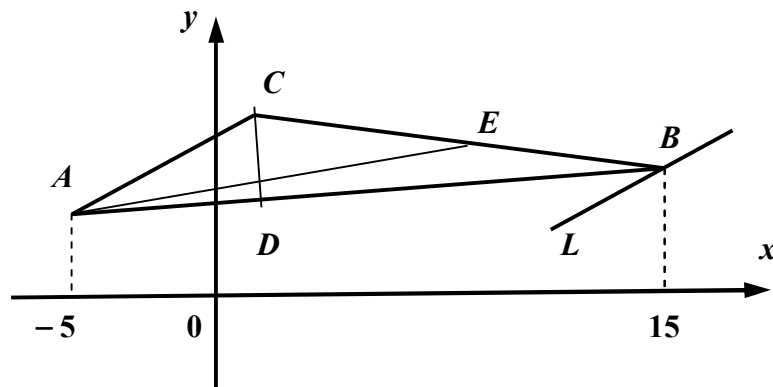


Рис. 1

$$1) AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{20^2 + 2^2} \approx 20.6 \text{ (од)};$$

$$2) x_M = \frac{x_A + 4x_B}{1+4} = \frac{-5 + 4 \cdot 15}{5} = 11, \quad y_M = \frac{y_A + 4y_B}{1+4} = \frac{3 + 4 \cdot 5}{5} = \frac{23}{5}.$$

$$\text{Отже, } M\left(11; \frac{23}{5}\right);$$

$$3) AB: \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}. \text{ Отже, } AB: \frac{x-(-5)}{15-(-5)} = \frac{y-3}{5-3} \text{ або } x-10y+35=0,$$

звідки знаходимо нормальний вектор $\vec{n}_{AB} = \{1, -10\}$ та кутовий коефіцієнт

$$k_{AB} = \frac{1}{10}. \text{ Аналогічно } AC: \frac{x-x_A}{x_C-x_A} = \frac{y-y_A}{y_C-y_A}. \text{ Отже, } AC: \frac{x-(-5)}{1-(-5)} = \frac{y-3}{7-3}$$

$$\text{або } 2x-3y+19=0, \text{ звідки } \vec{n}_{AC} = \{2, -3\}, k_{AC} = \frac{2}{3};$$

4) перетворимо рівняння прямої AB до вигляду рівняння у відрізках:

$$x-10y=-35, \frac{x}{-35} + \frac{-10y}{-35} = 1, \frac{x}{-35} + \frac{y}{7/2} = 1.$$

Отже, пряма AB відтинає на координатних осях Ox і Oy відрізки

$$a = -35 \text{ і } b = \frac{7}{2} \text{ відповідно;}$$

5) знайдемо координати точки E , яка ділить навпіл сторону BC :

$$x_E = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{15+1}{2} = 8, y_E = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{5+7}{2} = 6.$$

Отже, $E(8; 6)$.

Тоді напрямний вектор прямої AE є $\vec{s}_{AE} = \overrightarrow{AE} = \{8-(-5), 6-3\} = \{13, 3\}$ і

$$\text{канонічне рівняння має вигляд } AE: \frac{x-x_A}{X_s} = \frac{y-y_A}{Y_s} \text{ або } AE: \frac{x+5}{13} = \frac{y-3}{3};$$

6) тангенс внутрішнього кута $\angle A$ обчислимо за формулою

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} k_{AB}}, \text{ де } k_{AB} = \frac{1}{10}, k_{AC} = \frac{2}{3} \text{ (знайдені раніше у п. 3).}$$

$$\text{Отже, } \operatorname{tg} \angle A = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{10}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{17}{32}, \text{ звідки } \angle A = \operatorname{arctg} \frac{17}{32} \approx 0.49 \text{ (рад);}$$

7) оскільки $CD \perp AB$, то $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -10$. Рівняння висоти CD будемо

шукати у вигляді $y - y_C = k_{CD}(x - x_C)$.

Отже, $CD: y - 7 = -10(x - 1)$ або $10x + y - 17 = 0$. Довжину CD знайдемо як відстань від вершини C до сторони AB :

$$d = \frac{|1 - 10 \cdot 7 + 35|}{\sqrt{1^2 + 10^2}} = \frac{34}{\sqrt{101}} \approx 3.38 \text{ (од)};$$

8) рівняння прямої L , що проходить через вершину B паралельно прямій AC , будемо шукати у вигляді $y - y_B = k_L(x - x_B)$, де $k_L = k_{AC}$, оскільки $L \parallel AC$.

$$\text{Отже, } L: y - 5 = \frac{2}{3}(x - 15) \text{ або } 2x - 3y - 15 = 0.$$

Приклад 9. Скласти рівняння кола з центром у лівому фокусі еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, якщо відомо, що коло проходить через фокус параболи $y^2 = 8x$.

Розв'язання. Знайдемо координати фокусів еліпса. Оскільки $c = \sqrt{25 - 9} = 4$, то з рівняння еліпса випливає, що його фокуси розташовані в точках $(\pm 4; 0)$. Отже, центр кола лежить у точці $(-4; 0)$, а рівняння кола має вигляд $(x + 4)^2 + y^2 = R^2$. Судячи з рівняння, фокус параболи розташований в точці $(2; 0)$. Тоді радіус кола знайдемо з умови $(2 + 4)^2 + 0^2 = R^2$, тобто $R^2 = 36$, $R = 6$. Таким чином, рівняння кола має вигляд $(x + 4)^2 + y^2 = 36$. Усі криві зображені на рис. 2.

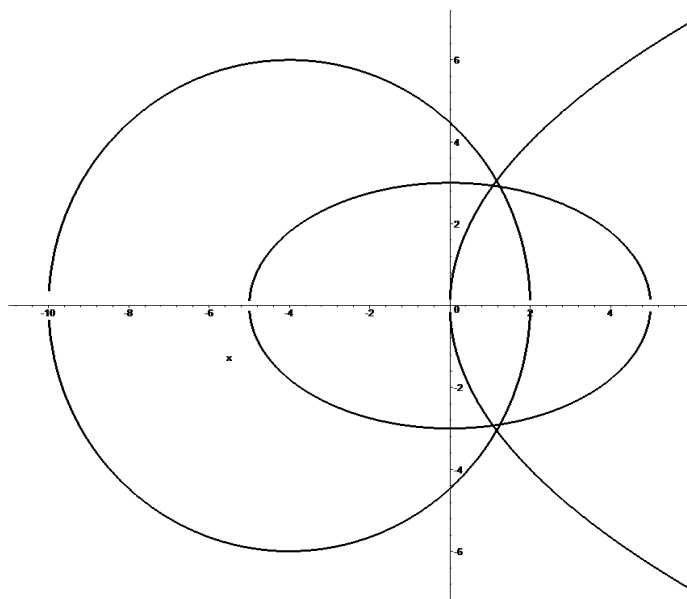


Рис. 2

Приклад 10. Привести рівняння кривої другого порядку $9x^2 - 16y^2 + 54x + 64y - 127 = 0$ до канонічного вигляду та побудувати її.

Розв'язання. Перетворимо рівняння, виділивши повні квадрати по обом змінним:

$$9(x^2 + 6x + 9 - 9) - 16(y^2 - 4y + 4 - 4) - 127 = 0 \Leftrightarrow 9(x + 3)^2 - 16(y - 2)^2 = 144 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{(x + 3)^2}{16} - \frac{(y - 2)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1.$$

Отримали рівняння гіперболи. В системі координат XOY , де $X = x + 3$, $Y = y - 2$, рівняння має канонічний вигляд. Центр гіперболи в системі xOy розташований в точці $(-3; 2)$, а дійсна і уявна осі паралельні відповідно осям Ox і Oy . Асимптотами гіперболи є прямі $y - 2 = \pm \frac{3}{4}(x + 3)$, $c = \sqrt{16 + 9} = 5$, ексцентриситет $e = \frac{5}{4}$. Лівий і правий фокуси гіперболи розташовані відповідно в точках $(-8; 2)$ і $(2; 2)$. Креслення гіперболи наведено на рис. 3.

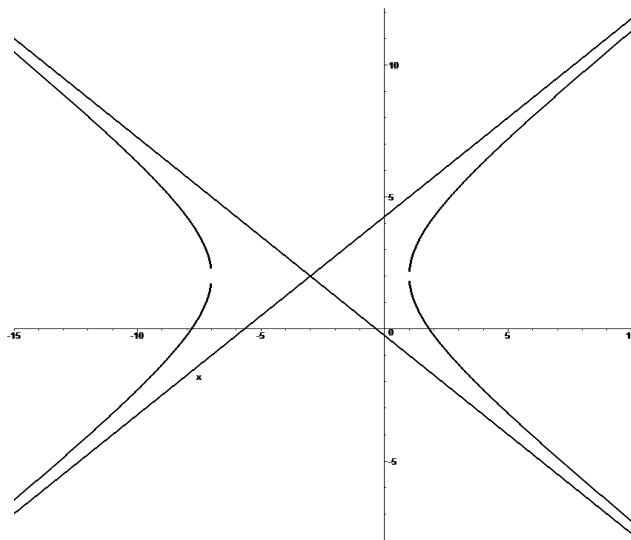


Рис. 3

Приклад 11. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 4x^3 - 7}{3x^4 - x^5 + x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x^2} + 5}{3\sqrt[6]{x^4 - 2} + \sqrt[3]{x}}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 + 13x - 6}; \\
 & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e-x) - 1}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 + 2} \right); \\
 & \text{є) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 5} \right)^{\frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}}.
 \end{aligned}$$

Розв'язання.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 4x^3 - 7}{3x^4 - x^5 + x + 1} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x^2} - \frac{7}{x^5}}{\frac{3}{x} - 1 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}} = \frac{2 + 0 - 0}{0 - 1 + 0 + 0} = -2;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x^2} + 5}{3\sqrt[6]{x^4 - 2} + \sqrt[3]{x}} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{\frac{x+1}{x^4}} + 1 + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}}{3\sqrt[6]{\frac{x^4 - 2}{x^{12}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{2\sqrt{0+0} + 1 + 0}{3\sqrt[6]{1-0} + 0} = \frac{1}{3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 + 13x - 6} \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{5(x+3)\left(x - \frac{2}{5}\right)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+1}{5x-2} = \frac{5}{17};$$

$$\begin{aligned}
 \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}} \left\{ \frac{0}{0} \right\} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{2x})}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{2x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{2x})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{2x})}{(1+x-2x)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{2x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{1+1+1} = - \frac{2}{3} \sqrt{2};
 \end{aligned}$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e-x) - 1} \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln\left[e\left(1 - \frac{x}{e}\right)\right] - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln e + \ln\left(1 - \frac{x}{e}\right) - 1} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \arcsin 2x \sim 2x \\ \ln\left(1 - \frac{x}{e}\right) \sim -\frac{x}{e} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 - \frac{x}{e} - 1} = -2e.$$

Зауваження. Тут ми скористалися *таблицею еквівалентних нескінченно малих*: якщо $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, то

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x), \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x), \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x), \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x), b^{\alpha(x)} - 1 \sim \ln b \cdot \alpha(x), e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$$

$$\begin{aligned} \text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 + 2} \right) \{ \infty - \infty \} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 + 2} \right) \left(\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 + 2} \right)}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 + 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 3 - x^2 - 2}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 + 2}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

є) скористаємось формулою: якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^a, \text{ де } a = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)[f(x) - 1].$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 5} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4} = \infty$, то

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4} \left(\frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 5} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 1)(x^2 - x - 3 - x^2 - 5)}{(x^2 - 4)(x^2 + 5)} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 8x^3 + x + 8}{x^4 + x^2 - 20} = -1. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 5} \right)^{\frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}} \{ 1^\infty \} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Приклад 12. Дослідити на неперервність функцію і побудувати ескіз її графіка:

$$\text{а) } f(x) = \frac{\frac{1}{3^{5-x}}}{2^{x-3} + 1}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x < 1 \\ 4 - 2x, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Розв'язання.

а) Функція визначена всюди, окрім точок $x = 3$ й $x = 5$. Оскільки вона є елементарною (задана єдиною формулою), то вона неперервна в усіх точках

області визначення. Дослідимо точки, в яких функція не визначена.

В точці $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{-\infty} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{0 + 1} = \sqrt{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{+\infty} + 1} = 0.$$

Оскільки обидві односторонні границі скінченні, але не рівні між собою, то в точці $x = 3$ задана функція має розрив першого роду (скінченний розрив) і здійснює стрибок $\Delta = |\sqrt{3} - 0| = \sqrt{3}$.

В точці $x = 5$:

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{3^{+\infty}}{\frac{1}{2^2} + 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{3^{-\infty}}{\frac{1}{2^2} + 1} = 0.$$

Оскільки лівостороння границя нескінченна, то в точці $x = 5$ задана функція має розрив другого роду, а саме, нескінченний лівосторонній розрив. Графік функції у загальному вигляді показаний на рис. 4. На рис. 5 та 6 показані збільшені фрагменти графіка. Зауважимо, що $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \frac{3^0}{2^0 + 1} = \frac{1}{2}$.

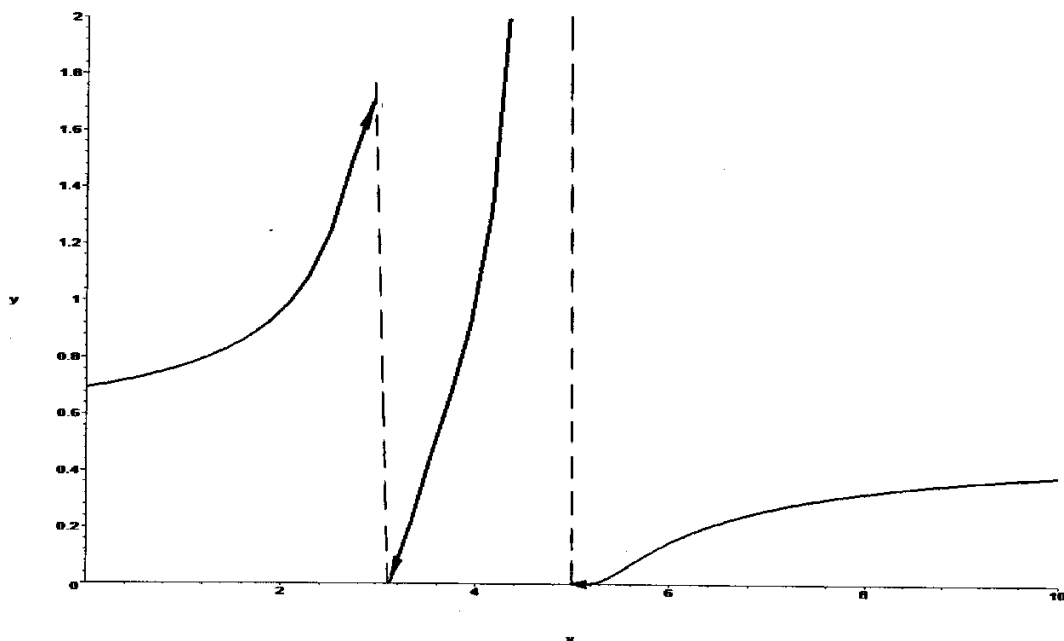


Рис. 4

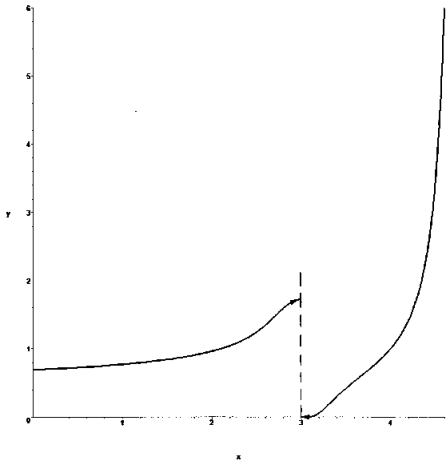


Рис. 5

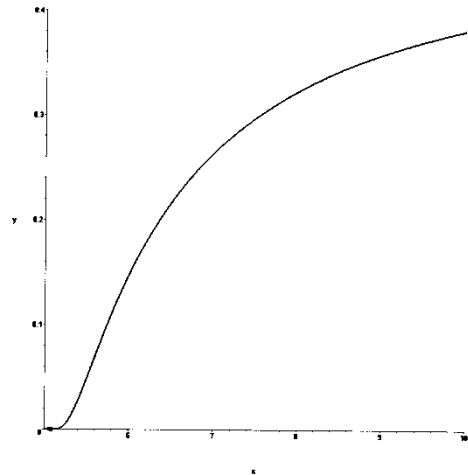


Рис. 6

б) Функція не є елементарною, оскільки на різних проміжках вона подається різними елементарними функціями. В даному разі усі ці функції всюди неперервні, отже, задана неелементарна функція може мати розриви тільки в “межових” точках $x = \pm 1$. Дослідимо ці точки.

В точці $x = -1$ маємо:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (x+2) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} x^2 = 1.$$

Оскільки в даній точці функція визначена й обидві односторонні границі скінченні й рівні між собою, то в цій точці функція неперервна.

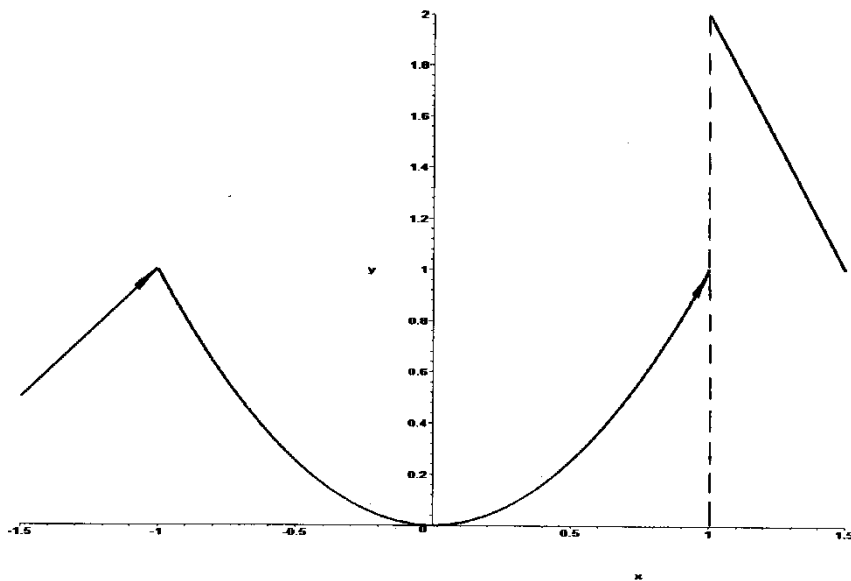


Рис. 7

В точці $x = 1$ маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (4-2x) = 2.$$

Оскільки в даній точці обидві односторонні границі скінченні, але не рівні між собою, то в цій точці функція має розрив першого роду (скінченний розрив) і здійснює стрибок $\Delta = |1 - 2| = 1$. Графік функції показаний на рис. 7.

Приклад 13. Знайти похідні y' даних функцій.

$$\text{а) } y = \sqrt[4]{(1+3x^2)^3} + \frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}; \quad \text{б) } y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}; \quad \text{в) } y = \frac{\lg(e^x+1)}{\cos^2(3x)};$$

$$\text{г) } y = (\operatorname{arctg} x)^{x \sin^2 x}; \quad \text{д) } xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; \quad \text{е) } \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}.$$

Розв'язання.

а) Перепишемо y у вигляді $y = (1+3x^2)^{\frac{3}{4}} + 2(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}$. Тоді

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3}{4}(1+3x^2)^{\frac{3}{4}-1} (0+3 \cdot 2x) - 2 \cdot \frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}-1} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \\ &= \frac{9x}{2\sqrt[4]{1+3x^2}} - \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x})\sqrt{x+\sqrt{x}}}; \end{aligned}$$

б)

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2} (2+x^2) \sqrt{1+x^2}};$$

$$\text{в) } y' = \frac{e^x}{\ln 10(e^x+1)} \cdot \cos^2(3x) - \lg(e^x+1) \cdot 2 \cos(3x) \cdot [-\sin(3x)] \cdot 3 =$$

$$= \frac{e^x \cos(3x) + 6(e^x+1) \lg(e^x+1) \sin(3x) \ln 10}{(e^x+1) \cos^3(3x) \ln 10};$$

г) похідну цієї показниково-степеневі функції знайдемо способом логарифмічного диференціювання. Прологарифмуємо задану функцію двічі:

$$\ln y = x \sin^2 x \ln \operatorname{arctg} x,$$

$$\ln \ln y = \ln x + 2 \ln \sin x + \ln \ln \operatorname{arctg} x.$$

Продиференціюємо останню рівність:

$$\frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{\sin x} \cos x + \frac{1}{\ln \operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Звідси знаходимо $y' = y \ln y \left(\frac{1}{x} + 2 \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\ln \operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right)$ або, з

урахуванням попереднього, остаточно маємо

$$y' = (\operatorname{arctg} x)^{x \sin^2 x} \cdot x \sin^2 x \ln \operatorname{arctg} x \left(\frac{1}{x} + 2 \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\ln \operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right);$$

д) задана функція – неявна. Продиференціюємо надану рівність з урахуванням

того, що y є функцією від x : $y + xy' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2}.$

Після спрощення маємо $y(x^2 + y^2) + x(x^2 + y^2)y' = y - xy'$, звідки випливає

$$y' = \frac{y}{x} \cdot \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2};$$

е) функція задана параметрично. Знайдемо y'_x за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$

$$\text{Отримуємо } y'_x = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}.$$

Приклад 14. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ в точці, де $x = -1$.

Розв'язання.

Рівняння дотичної до кривої в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$, де значення кутового коефіцієнта k обчислюється за

формулою $k = y'|_{M_0}$. В даному разі $x_0 = -1$, $y_0 = y(x_0) = y(-1) = 2$,

$k = (3x^2 + 4x - 4)|_{x=-1} = -5$, отже, рівняння дотичної є $y - 2 = -5(x + 1)$ або

$$5x + y + 3 = 0.$$

Приклад 15. Знайти границі за правилом Лопіталя.

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right); & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0+0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}; & \text{е) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\pi - 2x)^{\cos x}. \end{array}$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x} \left\{ \frac{0}{0}, \text{пр. Лоп.} \right\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x - 1} = \\ &= -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = -2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)} \left\{ \frac{\infty}{\infty}, \text{пр. Лоп.} \right\} &= \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{1}{e^x - e^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{e^x - e^3}{x-3} \left\{ \frac{0}{0}, \text{пр. Лоп.} \right\} = \frac{1}{e^3} \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{e^3} \cdot e^3 = 1; \end{aligned}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2} \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - x}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}} \left\{ \frac{0}{0}, \text{пр. Лоп.} \right\} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}} = 2;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right) \{ \infty - \infty \} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x \cdot \operatorname{arctg} x} \left\{ \frac{0}{0}, \text{пр. Лоп.} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}} \{x \rightarrow 0, \operatorname{arctg} x \sim x\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(1+x^2) + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+x^2+1} = 0; \end{aligned}$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0+0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} \{ \infty^0 \} = e^a, \text{ де } a = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \operatorname{ctg} x \left\{ \frac{\infty}{\infty}, \text{пр. Лоп.} \right\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-\frac{1}{\operatorname{ctgx}} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{\cos x \cdot \sin x} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{\sin x} =$$

$$= -1 \cdot 1 = -1. \text{ Отже, } \lim_{x \rightarrow 0+0} (\operatorname{ctgx})^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1} = \frac{1}{e};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\pi - 2x)^{\cos x} \{0^0\} = e^a, \text{ де } a = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \cos x \cdot \ln(\pi - 2x) \{0 \cdot \infty\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln(\pi - 2x)}{\frac{1}{\cos x}} \left\{ \frac{0}{0}, \text{ пр. Лоп.} \right\} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{1}{\pi - 2x} (-2)}{-\frac{1}{\cos^2 x} (-\sin x)} = -2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{\sin x} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos^2 x}{\pi - 2x} \left\{ \frac{0}{0}, \text{ пр. Лоп.} \right\} = -2 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{-2 \cos x \sin x}{-2} = -2 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

$$\text{Отже, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\pi - 2x)^{\cos x} = e^0 = 1.$$

Приклад 16. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{x}{3}}$ на відрізку $[-3, 1]$.

Розв'язання.

Неперервна на відрізку функція досягає найбільшого (найменшого) значення або у критичних точках першого роду, що лежать всередині відрізка, або на кінцях цього відрізка. Знайдемо критичні точки.

$$y' = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}} e^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{x}{3}} = \frac{2+x}{3 \sqrt[3]{x}} e^{\frac{x}{3}}.$$

Оскільки задана функція елементарна і визначена всюди, то вона всюди й неперервна. Всередині заданого відрізка лежать дві критичні точки першого роду: $x_1 = -2$ й $x_2 = 0$. У першій з цих точок $y' = 0$ (так звана стаціонарна точка), у другій y' не існує (точка загострення). Обчислимо значення функції на кінцях відрізка та у критичних точках:

$$y(-3) = \sqrt[3]{9} \cdot \frac{1}{e} \approx 0.77,$$

$$y(-2) = \sqrt[3]{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} \approx 0.81, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \sqrt[3]{e} \approx 1.40.$$

Таким чином, найбільшого значення $M = 1.4$ функція досягає на лівому кінці $b = 1$ відрізка, а найменшого $m = 0$ – у точці загострення $x_2 = 0$.

Приклад 17. Виконати повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$ і

побудувати її графік.

Розв'язання.

1) Надана функція визначена на усій числовій осі, за виключенням точки $x = 1$. тобто область визначення $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2) Функція загального типу (не парна і не непарна), неперіодична.

3) Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Отже, графік функції проходить через початок координат.

4) Обчислимо односторонні границі в точці $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{2(x-1)^2} = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{2(x-1)^2} = +\infty$. Оскільки обидві границі нескінченні, то в точці $x = 1$

функція терпить двосторонній нескінченний розрив (розрив другого роду).

5) На підставі попереднього заключаємо, що пряма $x = 1$ є двосторонньою вертикальною асимптотою графіка функції. Знайдемо похилі асимптоти.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x(x-1)^2} = \frac{1}{2} = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{2(x-1)^2} - \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{2(x-1)^2} = 1 = b. \quad \text{Таким}$$

чином, пряма $y = \frac{x}{2} + 1$ є похилою асимптотою графіка функції при $x \rightarrow -\infty$.

Аналогічний результат отримуємо при $x \rightarrow +\infty$.

6) Знайдемо критичні точки першого роду і інтервали монотонності функції.

$$\text{Оскільки } y' = \frac{1}{2} \left[\frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} \right] = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}, \text{ причому в точці } x = 1$$

функція не визначена, то критичні точки визначаються лише умовою $y' = 0$.

Отже, $x^2(x-3) = 0$, звідки знаходимо дві (стаціонарні) точки $x_1 = 0$ й $x_2 = 3$.

Звідси та з попереднього випливає, що функція монотонна в інтервалах $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ та $(3, +\infty)$.

7) Визначимо екстремуми функції, для чого дослідимо знайдені критичні точки за допомогою першої достатньої умови існування екстремуму:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
знак y'	+	0	+	не визн.	-	0	+
поведінка y	монотонно зростає	екстр. немає	монотонно зростає	не визн.	монотонно спадає	досягає мінімуму	монотонно зростає

У точці $x = 3$ функція досягає мінімального значення $y_{\min} = \frac{27}{8}$.

8) Знайдемо критичні точки другого роду і інтервали опуклості (вгнутості) графіка функції.

Визначимо y'' за допомогою логарифмічного диференціювання:

$$\ln y' = 2 \ln x + \ln(x-3) - \ln 2 - 3 \ln(x-1), \quad \frac{y''}{y'} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-3} - \frac{3}{x-1} = \frac{6}{x(x-1)(x-3)},$$

$$y'' = y' \frac{6}{x(x-1)(x-3)} = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3} \cdot \frac{6}{x(x-1)(x-3)} = \frac{3x}{(x-1)^4}. \quad \text{Оскільки в точці}$$

$x = 1$ функція не визначена, то критичні точки другого роду визначаються лише умовою $y'' = 0$, з якої знаходимо єдину точку $x = 0$. Звідси та з попереднього випливає, що графік функції зберігає опуклість (вгнутість) в інтервалах $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ та $(1, +\infty)$.

9) Дослідимо знайдену критичну точку за допомогою достатньої умови існування точок перегину графіка.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
знак y''	-	0	+	не визн.	+
поведінка графіка y	опуклий \cap	має точку перегину	вгнутий \cup	не визн.	вгнутий \cup

Оскільки $y = 0$ при $x = 0$, то початок координат є точкою перегину графіка заданої функції.

10) На підставі усіх отриманих даних будемо графік функції (рис. 8). На рис. 9 показаний збільшений фрагмент цього графіка в околі початку координат.

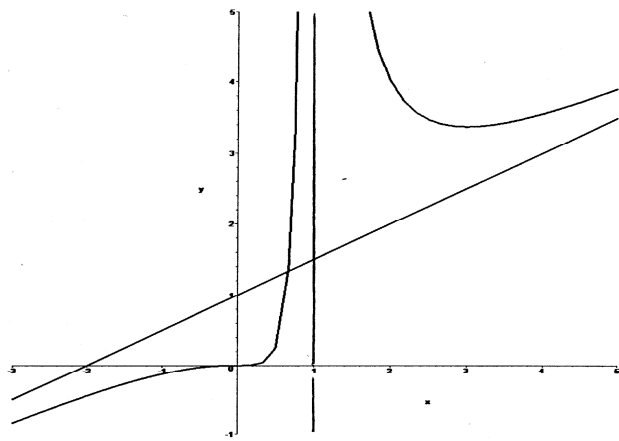


Рис. 8

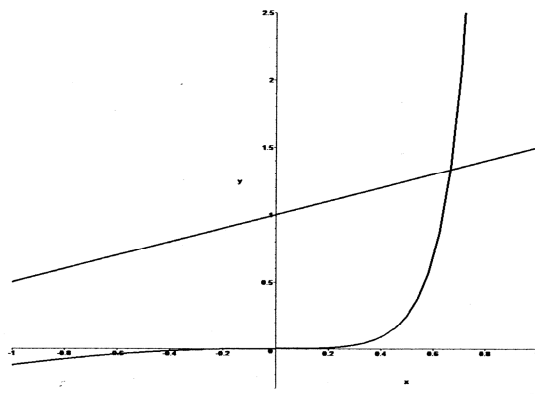


Рис. 9

Приклад 18. Знайти dz функції $z = (\operatorname{tg} x)^{\ln y} - y^{\cos x}$.

Розв'язання. Оскільки $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, то знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y \cdot (\operatorname{tg} x)^{\ln y - 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - y^{\cos x} \ln y \cdot (-\sin x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\operatorname{tg} x)^{\ln y} \ln \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{y} - \cos x \cdot y^{\cos x - 1}.$$

$$\text{Отже, } dz = \left[\ln y \cdot (\operatorname{tg} x)^{\ln y - 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + y^{\cos x} \ln y \cdot \sin x \right] dx + \left[(\operatorname{tg} x)^{\ln y} \ln \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{y} - \cos x \cdot y^{\cos x - 1} \right] dy.$$

Приклад 19. Знайти частинні або повні похідні функції.

а) $z = v^2 e^{\sqrt{u}}$, $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $v = x^3 - y^2$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$, $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$;

б) $z = y \ln \sin x$, $x = \sqrt{\cos v}$, $y = u \sqrt{v}$, $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$, $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$;

в) $z = e^{2x-3y}$, $x = \operatorname{tgt}$, $y = t^2 - t$, $\frac{dz}{dt} - ?$;

г) $\ln(x+z) - \frac{xy}{z} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$, $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$;

Розв'язання.

а) Складемо *схему диференціювання*: оскільки $z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$,

$$v = v(x, y), \text{ то } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Знайдемо усі частинні похідні, що входять до даних формул:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v^2 e^{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2ve^{\sqrt{u}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2y. \quad \text{Отже, } \frac{\partial z}{\partial x} = v^2 e^{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} + 6ve^{\sqrt{u}} x^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -v^2 e^{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} - 4ve^{\sqrt{u}} y.$$

б) Складемо *схему диференціювання*: оскільки $z = z(x, y)$, $x = x(v)$,

$$y = y(u, v), \text{ то } \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dv} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Знайдемо усі похідні, що входять до даних формул:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln \sin x, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{v}, \quad \frac{dx}{dv} = -\frac{\sin v}{2\sqrt{\cos v}}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u}{2\sqrt{v}}.$$

$$\text{Отже, } \frac{\partial z}{\partial u} = \ln \sin x \cdot \sqrt{v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -y \operatorname{ctg} x \cdot \frac{\sin v}{2\sqrt{\cos v}} + \ln \sin x \cdot \frac{u}{2\sqrt{v}}.$$

в) Складемо *схему диференціювання*: оскільки $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$,

$$\text{то маємо повну похідну } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Знайдемо усі похідні, що входять до даних формул:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x-3y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3e^{2x-3y}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \frac{dy}{dt} = 2t - 1.$$

$$\text{Отже, } \frac{dz}{dt} = e^{2x-3y} \left[\frac{2}{\cos^2 t} - 3(2t - 1) \right].$$

г) Функція $z = z(x, y)$ задана неявно рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Отже, її частинні

$$\text{похідні визначаються формулами } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad \text{У даному разі}$$

$$F(x, y, z) = \ln(x+z) - \frac{xy}{z}, \quad \text{отже,} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x+z} - \frac{y}{z}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{z},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{x+z} + \frac{xy}{z^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{1}{x+z} - \frac{y}{z}}{\frac{1}{x+z} + \frac{xy}{z^2}} = \frac{yz(x+z) - z^2}{z^2 + xy(x+z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-\frac{x}{z}}{\frac{1}{x+z} + \frac{xy}{z^2}} = \frac{xz(x+z)}{z^2 + xy(x+z)}.$$

Приклад 20. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2 - 3y^2 + 4z^2 + xy - 2yz + 3xz + 16 = 0$ в точці $M_0(-1, 2, 1)$.

Розв'язання. Рівняння дотичної площини до деякої поверхні в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, а рівняння відповідної нормалі є $\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$, де коефіцієнти A, B, C обчислюються в залежності від способу завдання поверхні. В даному випадку поверхня задана у неявному вигляді $F(x, y, z) = 0$, отже,

$$A = F'_x \Big|_{M_0} = (2x + y + 3z) \Big|_{M_0} = 3, \quad B = F'_y \Big|_{M_0} = (-6y + x - 2z) \Big|_{M_0} = -15,$$

$$C = F'_z \Big|_{M_0} = (8z - 2y + 3x) \Big|_{M_0} = 1. \quad \text{Тому шукане рівняння дотичної площини є}$$

$$3(x+1) - 15(y-2) + z - 1 = 0 \quad \text{або} \quad 3x - 15y + z + 32 = 0, \quad \text{а рівняння нормалі є}$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-15} = \frac{z-1}{1}.$$

Приклад 21. Перевірити, чи задовольняє рівнянню $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$

функція $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y^2}{3x^2} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{3x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}},$

$$x^2 \left(-\frac{y^2}{3x^2} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right) - xy \left(\frac{2y}{3x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right) + y^2 = -\frac{y^2}{3} + \frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}} - \frac{2y^2}{3} - \frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + y^2 = 0, \text{ отже, функція задовольняє заданому рівнянню.}$$

Приклад 22. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Розв'язання. Задана функція визначена на усій площині xOy . Стаціонарні

точки знайдемо з системи рівнянь $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$. Для даної функції $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6$, отже, система має вигляд $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$. Розв'язавши

систему, знаходимо єдину стаціонарну точку $M_0(0, 3)$. Дослідимо знайдену точку за допомогою достатніх умов екстремуму. Обчислимо дискримінант

$\Delta = AC - B^2$, де $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_0}$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0}$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_0}$. В даному разі

$A = 2$, $B = 1$, $C = 2$, отже, $\Delta = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3$. Оскільки $\Delta > 0$, причому, $A > 0$ ($C > 0$), то в точці $M_0(0, 3)$ задана функція має екстремум, а саме, мінімум $z_{\min} = z(0, 3) = -9$.

Приклад 23. Знайти інтеграли.

а) $\int \frac{x \arctg^2(x^2)}{1+x^4} dx$; б) $\int (3-x) \cos 2x dx$; в) $\int \frac{2x+1}{x^4-81} dx$;
 г) $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$; д) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 4\sin^2 x}$; е) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$;
 є) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$; ж) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}$.

Розв'язання.

а) Замінімо змінну, виходячи з вигляду підінтегрального виразу:

$$\int \frac{x \operatorname{arctg}^2(x^2)}{1+x^4} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg}(x^2) = t, \\ \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x dx = dt, \\ \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int t^2 dt = \frac{t^3}{6} + C = \frac{\operatorname{arctg}^3(x^2)}{6} + C;$$

б) Даний інтеграл береться по частинах за формулою $\int u dv = uv - \int v du$. За u приймаємо функцію, яка спрощується при диференціюванні, а саме, $P(x)$ (многочлен), $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccot} x$, причому трансцендентні функції мають перевагу над многочленом. В даному разі приймаємо $u = 3 - x$.

$$\begin{aligned} \int (3-x) \cos 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 3-x, \quad dv = \cos 2x dx, \\ du = -dx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \frac{3-x}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \\ &= \frac{3-x}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C; \end{aligned}$$

в) Розкладемо підінтегральний раціональний дріб на найпростіші:

$$\frac{2x+1}{x^4-81} = \frac{2x+1}{(x+3)(x-3)(x^2+9)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} + \frac{Cx+D}{x^2+9},$$

$$2x+1 = A(x-3)(x^2+9) + B(x+3)(x^2+9) + (Cx+D)(x-3)(x+3)$$

$$\begin{array}{l|l} x = -3 & -5 = -108A \\ x = 3 & 7 = 108B \\ x = 0 & 1 = -27A + 27B - 9D \\ x^3 & 0 = A + B + C \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{5}{108}, \quad B = \frac{7}{108}, \\ C = -\frac{12}{108}, \quad D = -\frac{6}{108}. \end{array}$$

Таким чином,
$$\frac{2x+1}{x^4-81} = \frac{1}{108} \left(\frac{5}{x+3} + \frac{7}{x-3} + \frac{-12x-6}{x^2+9} \right)$$

і тому

$$\int \frac{2x+1}{x^4-81} dx = \frac{1}{108} \int \left(\frac{5}{x+3} + \frac{7}{x-3} + \frac{-12x-6}{x^2+9} \right) dx = \frac{1}{108} [5 \ln|x+3| + 7 \ln|x-3| -$$

$$-6 \ln(x^2 + 9) - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \Big] + C;$$

г) Найкращою для раціоналізації інтегралів вигляду $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$ є так

звана універсальна підстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Отже,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{5 + \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 2t + 4} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{15}} + C; \end{aligned}$$

д) В даному разі універсальна підстановка призведе до громіздких обчислень і тому, оскільки підінтегральна функція одночасно парна відносно $\sin x$ та $\cos x$, найкращою буде частинна підстановка $\operatorname{tg} x = t$. Отже,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 \cos^2 x - 4 \sin^2 x} dx &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{3 - 4t^2} = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + t}{\frac{\sqrt{3}}{2} - t} \right| + C = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + 2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{3} - 2 \operatorname{tg} x} \right| + C; \end{aligned}$$

е) При відшуванні даного інтеграла застосуємо формули тригонометрії

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Тоді

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 4x) - \sin^2 2x \cos 2x \right] dx = \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C;$$

$$\begin{aligned} \text{е) } \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \left| \begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + C = \left| t = \sqrt[6]{x} \right| = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ж) } \int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x + \sqrt{x^2 + 1})} &= \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t, \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\cos^2 t (1 + \operatorname{tg}^2 t) \left(\operatorname{tg} t + \frac{1}{\cos t} \right)} = \\ &= \int \frac{\cos t}{\sin t + 1} dt = \ln|1 + \sin t| + C = \left| t = \operatorname{arctg} x \right| = \ln|1 + \sin \operatorname{arctg} x| + C = \\ &= \left| \sin \operatorname{arctg} x = \sqrt{1 - \cos^2 \operatorname{arctg} x} = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \operatorname{arctg} x}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right| = \\ &= \ln \left| 1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right| + C. \end{aligned}$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1.

Задані матриці A , B та C .

1) знайти матрицю Y з рівняння $AB + Y = CB$;

2) знайти:

а) $A + C^T$;

б) $\det A$, розклавши його за елементами третього стовпця.

3) розв'язати за формулами Крамера систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$AX = B, \quad \text{де } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 9 \\ 8 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2.

Задані координати вершин трикутника ABC . Знайти:

- 1) довжину сторони AB ;
- 2) координати точки M , яка ділить сторону AB у відношенні $4:1$;
- 3) загальні рівняння прямих AB і AC , нормальні вектори та кутові коефіцієнти цих прямих;
- 4) рівняння прямої AB у відрізках;
- 5) напрямний вектор та канонічне рівняння прямої AE , яка містить медіану трикутника ABC ;
- 6) внутрішній кут A в радіанах з точністю до $0,01$;
- 7) загальне рівняння висоти CD та її довжину;
- 8) рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно прямій AC .

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $A(10;-2), B(-2;7), C(8;12)$. | 2. $A(11;-5), B(-1;4), C(15;17)$. |
| 3. $A(14;-4), B(2;5), C(18;18)$. | 4. $A(13;-9), B(1;0), C(17;13)$. |
| 5. $A(3;-3), B(-9;6), C(7;19)$. | 6. $A(12;-7), B(0;2), C(16;15)$. |
| 7. $A(0;-10), B(-12;-1), C(4;12)$. | 8. $A(4;-12), B(-8;-3), C(8;10)$. |
| 9. $A(7;0), B(-5;9), C(5;14)$. | 10. $A(12;-6), B(0;3), C(10;8)$. |

Завдання 3.

1. Скласти рівняння кола, центр якого знаходиться у точці перетину з віссю Oy прямої $2x - 4y + 8 = 0$, а радіус дорівнює відстані між директрисами еліпса $4x^2 + 9y^2 = 36$. Побудувати.

2. Написати канонічне рівняння гіперболи, що проходить через точку $M(12; 3\sqrt{3})$, якщо відомі рівняння асимптот гіперболи $y = \pm \frac{x}{2}$. Побудувати гіперболу.
3. Написати канонічне рівняння еліпса, що проходить через точку $M\left(-2; \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$, якщо ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{3}{4}$. Побудувати еліпс.
4. Скласти рівняння кола, центр якого співпадає з правою вершиною гіперболи $4x^2 - 9y^2 = 36$, а радіус дорівнює відстані між фокусами. Побудувати.
5. Скласти рівняння параболи та її директриси, якщо відомо, що парабола симетрична відносно осі Oy та проходить через точки перетину кола $x^2 + y^2 + 4y = 0$ з прямою $x + y = 0$. Побудувати.
6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Oy , симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$, а відстань між директрисами дорівнює $\frac{36}{5}$. Побудувати.
7. Скласти канонічне рівняння еліпса, що проходить через точки $M_1(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$ та $M_2(2; \sqrt{3})$. Побудувати еліпс, знайти його ексцентриситет та рівняння директрис.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що вона проходить через дві точки $M_1(3\sqrt{2}; \sqrt{2})$ та $M_2(-3\sqrt{3}; 2\sqrt{2})$. Побудувати гіперболу, знайти її ексцентриситет та рівняння директрис.
9. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox , якщо відомо, що фокус параболи співпадає з правим фокусом еліпса $16x^2 + 20y^2 = 320$, а директриса проходить через лівий фокус еліпса. Побудувати.
10. Записати канонічне рівняння гіперболи, дійсна вісь якої дорівнює великій осі еліпса $4x^2 + 25y^2 = 100$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{74}}{5}$. Побудувати.

Завдання 4. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду та побудувати її.

1. $9x^2 - 4y^2 + 54x + 8y + 41 = 0$.
2. $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 28 = 0$.
3. $x^2 - 4y^2 + 10x + 24y - 7 = 0$.
4. $9x^2 + 16y^2 + 36x - 64y - 44 = 0$.
5. $4x^2 - 9y^2 + 16x + 54y - 101 = 0$.
6. $x^2 + 4y^2 + 10x - 24y + 57 = 0$.
7. $9x^2 - 16y^2 - 36x - 64y - 172 = 0$.
8. $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0$.
9. $4x^2 - y^2 + 16x - 2y + 31 = 0$.
10. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 31 = 0$.

Завдання 5. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопітала.

1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^4 - 2x^3 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{3-5x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$.
2. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-2} \right)^{3x-4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$.
3. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+5} \right)^{x+5}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}$.
4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+4}{4x+3} \right)^{4x-5}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^3}$.
5. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + 8x^4 + 3}{2x^4 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x-2} \right)^{4-5x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}$.
6. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 2x^2 - 8}{8x^3 - 4x + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+6} \right)^{2x+3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}$.

$$7. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-1} \right)^{3-x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{\sin x}.$$

$$8. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 5x}{2x^2 - 3x - 7}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-3} \right)^{5x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$$

$$9. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2 + 2}{x^4 + 4x - 3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+3} \right)^{4x-5}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}.$$

$$10. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 5x + 9}{1 + 4x - x^3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+4}{7x+1} \right)^{2x-3}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{x^2}.$$

Завдання 6. Дослідити на неперервність функцію і побудувати ескіз її графіка.

$$1. \text{ a) } f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 1; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1. \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$2. \text{ a) } f(x) = 5^{\frac{1}{x-2}} - 1; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \leq 3 \\ x + 2, & x > 3 \end{cases}.$$

$$3. \text{ a) } f(x) = 4^{\frac{2}{x-1}} - 3; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq 2. \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$$

$$4. \text{ a) } f(x) = 3^{\frac{1}{2-x}} + 1; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 2^x, & 0 < x \leq 2. \\ x + 3, & x > 2 \end{cases}$$

$$5. \quad \text{a) } f(x) = \frac{1}{4 + 3^{1/x}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1 - x, & x > \pi \end{cases}$$

$$6. \quad \text{a) } f(x) = \frac{1}{5 + 2^{1/x}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 3, & x \geq \pi \end{cases}$$

$$7. \quad \text{a) } f(x) = 2^{\frac{3}{x+2}} - 5; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq -1 \\ x^2 - 2, & -1 < x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$8. \quad \text{a) } f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}} + 1; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1 \\ 1 - x, & -1 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

$$9. \quad \text{a) } f(x) = \frac{1}{2 + 3^{-1/x}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 2 \\ x + 4, & x > 2 \end{cases}$$

$$10. \quad \text{a) } f(x) = 3^{\frac{1}{4-x}} - 1; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ (x + 1)^2, & 0 < x \leq 2 \\ -x + 4, & x > 2 \end{cases}$$

Завдання 7. Знайти похідні y' даних функцій.

$$1. \quad \text{a) } y = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} + \frac{4}{(x-2)^5}; \quad \text{б) } y = \operatorname{arctg}^2(5x) \cdot \ln(x-4);$$

$$\text{в) } y = \frac{\log_5(3x-7)}{\operatorname{ctg}(7x^2)}; \quad \text{г) } y = (\lg x)^{\ln x}; \quad \text{д) } y^2 = 8x + \sin y; \quad \text{е) } \begin{cases} x = (2t+3)\cos t \\ y = 3t^3 \end{cases}$$

$$2. \text{ a) } y = \sqrt[5]{(x-2)^6} + \frac{3}{7x^3 - x^2 - 4}; \quad \text{б) } y = \frac{\sin x}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}; \quad \text{в) } y = \frac{\ln(5x-3)}{4 \operatorname{tg}(3x^4)};$$

$$\text{г) } y = (\sin x)^{5e^x}; \quad \text{д) } y^3 + xy^2 = 1 - x; \quad \text{е) } \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \ln \cos t \end{cases}.$$

$$3. \text{ a) } y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}; \quad \text{б) } y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^4 + 2x^2 + 2); \quad \text{в) } y = \frac{\lg^2(x-2)}{\lg(x+3)};$$

$$\text{г) } y = x^{2x} \cdot 5^x; \quad \text{д) } x^2 + xy^2 = \sin(x+y); \quad \text{е) } \begin{cases} x = \sqrt{t^3 + 1} \\ y = \ln t \end{cases}.$$

$$4. \text{ a) } y = x \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}; \quad \text{б) } y = \ln \arccos \frac{1}{\sqrt{2x}} + \sqrt[3]{x^2}; \quad \text{в) } y = \frac{\sin^3 5x}{\ln(2x-3)};$$

$$\text{г) } y = (\sin \sqrt{x})^{e^{\frac{1}{x}}}; \quad \text{д) } x \sin y = x + y; \quad \text{е) } \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}.$$

$$5. \text{ a) } y = \frac{x^6 + 8x^3 - 128}{\sqrt{8-x^3}}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg} e^x; \quad \text{в) } y = \frac{\operatorname{ctg} \sqrt{x}}{\lg^2(3x+5)};$$

$$\text{г) } y = (x^8 + 1)^{\operatorname{tg} x}; \quad \text{д) } x - y = \sin(x + y^2); \quad \text{е) } \begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = \frac{t}{\sqrt{t-1}} \end{cases}.$$

$$6. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + 5 \sqrt[5]{x^3 + 1}; \quad \text{б) } y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x}); \quad \text{в) } y = \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{\lg(5x+1)};$$

$$\text{г) } y = (\sin x)^{5x/2}; \quad \text{д) } 3x^5 + 2y^3 + xy = 1; \quad \text{е) } \begin{cases} x = \ln \sin t - t \\ y = \ln \cos t + t \end{cases}.$$

$$7. \text{ a) } y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}; \quad \text{б) } y = \frac{e^x}{2} [(x^2 - 1) \cos x + (x-1)^2 \sin x]; \quad \text{в) } y = \frac{\log_3(4x+5)}{2 \operatorname{ctg} \sqrt{x}};$$

$$\text{г) } y = (\arcsin x)^{e^x}; \quad \text{д) } e^x + e^{-y} + e^{x+y} = 3; \quad \text{е) } \begin{cases} x = t + \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}.$$

$$8. \text{ a) } y = 3\sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - \frac{5}{x}}; \quad \text{б) } y = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right); \quad \text{в) } y = \frac{\lg(7x-3)}{3\operatorname{tg}^2 4x};$$

$$\text{г) } y = (\operatorname{arctg} x)^{x \sin x}; \quad \text{д) } (x+y)^3 + xy = 1; \quad \text{е) } \begin{cases} x = \sin t - t \cos t \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$$

$$9. \text{ a) } y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1}; \quad \text{б) } y = \ln^3 \operatorname{arcsin} \sqrt{1 - e^{4x}}; \quad \text{в) } y = \frac{\log_4(11x-2)}{\cos^2 5x};$$

$$\text{г) } y = (\cos 2x)^{\frac{1}{4} \ln \cos 2x}; \quad \text{д) } x + \cos y = \sin(x+y); \quad \text{е) } \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg}^2 t \end{cases}$$

$$10. \text{ a) } y = \frac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}; \quad \text{б) } y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}; \quad \text{в) } y = \frac{\operatorname{tg}^4 5x}{\lg(x^2+x+5)};$$

$$\text{г) } y = (x \operatorname{arctg} x)^{\cos x}; \quad \text{д) } x + e^{x-y} + xy = 1; \quad \text{е) } \begin{cases} x = \sqrt{t-3} \\ y = \ln(t-2) \end{cases}$$

Завдання 8. Записати рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

1. $y = x^2 - 7x + 3, x_0 = 1.$

2. $y = x^2 - 16x + 7, x_0 = 1.$

3. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0, M_0(3;0).$

4. $y = \frac{2x}{x^2+1}, x_0 = 2.$

5. $y = e^{1-x^2}, x_0 = 1.$

6. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1, M_0(1;3).$

7. $y = x + \sqrt{x^3}, x_0 = 1.$

8. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, x_0 = 4.$

9. $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2, x_0 = 1.$

10. $x^2 + y^2 = 4, M_0(1;\sqrt{3}).$

Завдання 9. Знайти границі за правилом Лопіталю.

1. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \ln x \ln(x-1)$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 2x)^{\operatorname{ctgx}}$.
2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{\sin^2(2x)}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{3}{3x-1} - \frac{1}{\ln(3x)} \right)$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctgx})^{\sin x}$.
3. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctgx}}{x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) \operatorname{ctg}(x-2)$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$.
4. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctgx}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{4}{x} \right)^x$.
5. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\cos x)}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctgx}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)^{\frac{1}{\ln(2x-2)}}$.
6. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctgx}} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$.
7. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 4x)}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{7}{6x}\right)$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$.
8. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} x - x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln x)$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$.
9. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{4}{x^2}} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln \operatorname{ctgx})^{\operatorname{tg} x}$.
10. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{2}{x} \right)^x$.

Завдання 10. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку.

1. $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$, $x \in [0; 3]$.

2. $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$, $x \in [0; 5]$.

3. $y = (x+2)e^{1-x}$, $x \in [-2; 2]$.

4. $y = x \cdot \ln x$, $x \in [e^{-2}; 1]$.

5. $y = e^{4x-x^2}$, $x \in [1; 3]$.

6. $y = \frac{\ln x}{x}$, $x \in [1; 4]$.

7. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$, $x \in [1; 5]$.

8. $y = x - 4\sqrt{x} + 5$, $x \in [1; 9]$.

9. $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$, $x \in [-4; -1]$.

10. $y = x^2 - 16 + \frac{16}{x}$, $x \in [1; 4]$.

Завдання 11. Знайти dz функції.

1. $z = \ln(y^2 - e^{-x})$.

2. $z = \cos(x^3 - 2xy)$.

3. $z = \arccos \frac{y}{x}$.

4. $z = \operatorname{ctg} \sqrt{xy^3}$.

5. $z = \arcsin(2x^3y)$.

6. $z = \operatorname{arctg} \frac{x^3}{y}$.

7. $z = \sin \sqrt{\frac{y}{x+y}}$.

8. $z = \operatorname{tg} \frac{2x-y^2}{x}$.

9. $z = e^{-\sqrt{x^2+y^3}}$.

10. $z = \operatorname{arcctg} \frac{x^2}{y^3}$.

Завдання 12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці $M_0(x_0, y_0)$.

1. $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$, $M_0(2; 1; -1)$.

2. $x^2 - 4y^2 + z^2 = -2xy$, $M_0(-2; 1; 2)$.

3. $x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7$, $M_0(1; 2; 1)$.

4. $2x^2 - y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$, $M_0(2; 1; -1)$.

5. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0$, $M_0(2; 1; -1)$.

$$6. 2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3, M_0(1;2;1).$$

$$7. x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4, M_0(1;1;2).$$

$$8. x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z, M_0(1;0;1).$$

$$9. x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11, M_0(1;4;-1).$$

$$10. 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9, M_0(1;-2;1).$$

Завдання 13. Перевірити, чи задовольняє рівнянню функція.

$$1. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = \frac{y}{x}.$$

$$2. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = y \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$$3. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, u = \frac{x^2}{3y} + \operatorname{arctg}(xy).$$

$$4. \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = \ln(y + e^{-x}).$$

$$5. y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}, u = e^{\frac{x}{y}}.$$

$$6. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}, u = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right).$$

$$7. 16 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u = e^{-\cos(4x+y)}.$$

$$8. y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, u = x^y.$$

$$9. \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u = \ln(x + e^{-y}).$$

10. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$.

Завдання 14. Дослідити на екстремум функцію.

1. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$. 2. $z = x^2 + 3xy + 4y^2 + 5x + 18y - 7$.

3. $z = 2x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 10y + 15$. 4. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

5. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$. 6. $z = x^2 - xy - y^2 - 4x + 5y + 8$.

7. $z = 2x^2 + y^2 + xy + 2x - 3y + 5$. 8. $z = x^2 - 2xy + 4x - 2y^2 + 14y - 1$.

9. $z = -x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x - 10y - 3$. 10. $z = 5 - x^2 + 2xy - 2y^2 - 4x + 6y$.

Завдання 15. Знайти інтеграли.

1. а) $\int \frac{\cos(3 + 5 \ln x)}{x} dx$; б) $\int (3 - x)5^{2x} dx$; в) $\int \frac{(x^2 + 2) dx}{x^3 - 4x^2 + 3x}$;

г) $\int \frac{dx}{5 + 8 \cos x}$; д) $\int \sin^5 4x dx$.

2. а) $\int \frac{\operatorname{ctg}^2 x + 5}{\sin^2 x} dx$; б) $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$; в) $\int \frac{(2x^2 - 1) dx}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$;

г) $\int \frac{dx}{1 + 8 \sin^2 x}$; д) $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$.

3. а) $\int x^2 \sqrt[3]{1 + x^3} dx$; б) $\int x^2 \sin x dx$; в) $\int \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - 6x} dx$;

г) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$; д) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

4. а) $\int \frac{dx}{x(1 - \ln x)}$; б) $\int x^2 \cos 3x dx$; в) $\int \frac{(x^3 - 6) dx}{x^4 + 6x^2 + 8}$;
 г) $\int \frac{dx}{7 - 4 \cos x}$; д) $\int \operatorname{ctg}^4 3x dx$.
5. а) $\int \frac{x + \arccos^2 3x}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$; б) $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$; в) $\int \frac{dx}{x^4 - 5x^3 + 6x^2}$;
 г) $\int \cos^2 3x \sin^4 3x dx$; д) $\int \sin 2x \cos 6x dx$.
6. а) $\int \frac{e^x \sqrt{\arcsin e^x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$; б) $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$; в) $\int \frac{x^2 + 2x - 6}{x^3 - 7x^2 + 10x} dx$;
 г) $\int \frac{dx}{4 + 5 \sin^2 x}$; д) $\int \operatorname{tg}^3 4x dx$.
7. а) $\int \frac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$; б) $\int x^3 e^{-x^2} dx$; в) $\int \frac{(x^5 + 1) dx}{x^4 - 8x^2 + 16}$;
 г) $\int \frac{dx}{3 \cos x - \sin x}$; д) $\int \sin 9x \sin 3x dx$.
8. а) $\int \frac{e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$; б) $\int x \ln(1 + x) dx$; в) $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^3 + x^2 - x - 1}$;
 г) $\int \frac{dx}{1 - 7 \sin^2 x}$; д) $\int \cos^5 x \sin^4 x dx$.
9. а) $\int \cos^2 x \sin 2x dx$; б) $\int x e^{-2x} dx$; в) $\int \frac{(x^2 - 1) dx}{x^3 + 4x}$;
 г) $\int \cos^4 x dx$; д) $\int (1 + 2 \operatorname{tg}^3 x) dx$.
10. а) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}} dx$; б) $\int (2x - 3) 3^{-x} dx$; в) $\int \frac{(2x - 1) dx}{4x^3 + 4x^2 + x}$;
 г) $\int \frac{dx}{3 - 5 \cos x}$; д) $\int \cos^2 x \sin^7 x dx$.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ, ЇЇ ПОДАННЯ І ПЕРЕВІРКА

Номер варіанта контрольної роботи, що виконується, повинен співпадати з ДВОМА останніми цифрами номера залікової книжки. Номери задач з кожного завдання вибираються з таблиці, наведеної нижче.

Виконана контрольна робота переписується в окремий зошит. Розв'язки задач наводяться зі збереженням номерів задач, у порядку зростання цих номерів. Перед розв'язком кожної задачі треба повністю вписати її умову. На обкладинку зошита слід наклеїти заповнений реєстраційний бланк (вказати номер контрольної роботи, назву дисципліни, групу і факультет, прізвище, ім'я та по батькові, номер залікової книжки, домашню адресу). Оформлена належним чином робота реєструється у деканаті. Її необхідно подати на кафедру вищої математики завчасно, але не пізніше як за 10 днів до початку екзаменаційної сесії. Після перевірки викладач робить висновок про те, вірно чи невірно виконана робота, з відповідним надписом на обкладинці. Якщо робота виконана не повністю або невірно, то викладач вказує номери відсутніх або невірно розв'язаних задач і, якщо необхідно, робить свої зауваження у вигляді короткої рецензії. Роботи з не усіма задачами, або ж з такими, що повністю або частково не відповідають даному варіанту, вважаються виконаними невірно. Студент повинен виправити *усі* помилки у тому ж зошиті *після* рецензії викладача у розділі "Робота над помилками" і повернути роботу у найкоротший термін. Виправлення у перевіреній роботі поверх позначок викладача не допускаються. Студент може бути допущений до захисту контрольної роботи, порядок якого визначається викладачем, тільки після повторної перевірки виправлених помилок. На екзамен (залік) допускаються тільки студенти з захищеною роботою.

Склад варіантів контрольної роботи

Номер варіанта	Завд. 1	Завд. 2	Завд. 3	Завд. 4	Завд. 5	Завд. 6	Завд. 7	Завд. 8	Завд. 9	Завд. 10	Завд. 11	Завд. 12	Завд. 13	Завд. 14	Завд. 15
00	6	6	4	5	6	1	6	4	5	6	3	2	2	4	6
01	4	7	3	9	10	6	4	2	9	10	4	8	6	5	1
02	3	4	9	6	5	7	3	9	6	5	5	9	7	9	6
03	9	3	8	1	1	4	9	8	1	1	6	7	4	6	7
04	1	10	10	3	3	5	1	10	3	3	7	1	3	1	4
05	10	2	2	2	9	3	10	3	2	9	10	5	10	3	5

06	2	8	1	8	2	10	2	1	8	2	8	4	2	2	3
07	8	9	7	4	8	2	8	7	4	8	9	3	8	8	10
08	7	5	6	7	7	8	7	6	7	7	2	10	9	4	2
09	5	1	5	10	4	9	5	5	10	4	1	6	5	7	8
10	4	10	7	3	3	4	3	7	3	3	1	10	1	10	9
11	1	2	1	7	5	6	2	1	7	5	2	8	10	3	4
12	9	9	5	1	1	5	9	5	1	1	9	7	2	7	6
13	7	7	3	4	7	9	7	3	4	7	5	4	9	1	5
14	5	6	2	10	10	8	6	2	10	10	6	6	7	4	9
15	8	4	10	8	6	7	4	10	8	6	7	9	6	10	8
16	6	8	4	5	8	10	8	4	5	8	3	1	4	8	7
17	10	3	6	2	4	2	10	6	2	4	8	5	8	5	10
18	3	5	9	9	9	1	5	9	9	9	4	3	3	2	2
19	2	1	8	6	2	3	1	8	6	2	10	2	5	9	1
20	5	6	6	8	5	10	6	6	10	5	8	6	1	6	3
21	2	9	9	2	3	7	9	9	2	3	6	7	6	8	10
22	9	2	2	9	4	6	2	2	9	4	9	10	9	2	7
23	4	7	7	4	7	4	7	7	4	7	7	1	2	9	6
24	1	10	10	1	9	1	10	10	1	9	10	9	7	4	4
25	6	5	5	7	6	2	5	5	7	8	5	8	10	1	1
26	7	4	4	6	2	3	4	4	6	2	4	2	5	7	2
27	8	3	3	5	8	5	3	3	5	6	3	3	4	6	3
28	3	8	8	3	1	8	8	8	3	1	2	5	3	5	5
29	10	1	1	10	10	9	1	1	8	10	1	4	8	3	8
30	5	6	6	1	5	4	6	6	1	5	4	7	1	10	9
31	4	5	5	2	10	6	5	5	2	10	5	1	6	1	4
32	7	10	8	6	6	5	10	8	6	6	1	10	5	2	6
33	3	4	4	3	1	10	4	4	3	1	10	6	10	6	5
34	9	9	10	9	3	7	9	10	9	3	3	9	4	3	10
35	6	7	7	5	8	3	7	7	5	8	2	8	9	9	7
36	2	1	2	8	7	2	1	2	8	7	6	2	7	5	3
37	10	8	9	10	4	8	8	9	10	4	7	5	1	8	2
38	1	2	3	4	2	9	2	3	4	2	8	4	8	10	8
39	8	3	1	7	9	1	3	1	7	9	9	3	2	4	9
40	6	4	7	4	7	1	4	7	4	7	4	9	3	7	1
41	5	10	5	3	10	9	10	5	3	10	2	6	4	4	1
42	2	3	8	7	6	4	3	8	7	8	7	1	10	3	9
43	10	7	4	2	1	8	7	4	2	1	10	3	3	7	4
44	1	5	9	8	5	3	5	9	8	5	6	2	7	2	8
45	4	2	3	5	2	5	2	3	5	2	5	4	5	8	3
46	3	6	6	10	4	2	6	6	10	4	9	10	2	5	5
47	8	8	2	6	8	7	8	2	6	6	3	5	6	10	2
48	9	1	10	9	3	6	1	10	9	3	8	7	8	6	7
49	7	9	1	1	9	10	9	1	1	9	1	8	1	9	6
50	10	2	1	7	8	3	2	1	7	8	5	6	9	1	10
51	9	8	2	8	1	4	8	2	8	1	9	4	2	7	3
52	8	9	3	6	6	5	9	3	6	6	6	3	8	8	4
53	7	7	5	5	5	6	7	5	5	5	1	9	9	6	5
54	1	1	10	9	4	7	1	10	9	4	3	1	7	5	6

55	5	5	6	3	9	10	5	6	3	9	2	10	1	9	7
56	4	4	7	2	3	8	4	7	2	3	8	2	5	3	10
57	3	3	8	1	10	9	3	8	1	10	4	8	4	2	8
58	2	10	9	10	7	2	10	9	10	7	7	7	3	1	9
59	6	6	4	4	2	1	6	4	4	2	10	5	10	10	2
60	9	10	1	5	8	1	10	1	5	8	3	3	6	4	1
61	3	8	4	7	7	2	8	4	7	7	7	2	10	5	1
62	5	7	7	3	10	9	7	7	3	10	1	9	8	7	2
63	6	4	2	9	4	5	4	2	9	4	4	7	7	3	9
64	8	6	5	1	3	6	6	5	1	3	10	6	4	9	5
65	10	9	9	8	2	7	9	6	8	2	8	4	6	1	6
66	7	1	3	6	6	3	1	3	6	6	5	8	9	8	7
67	4	5	6	2	1	8	5	9	2	1	2	10	1	6	3
68	1	3	10	4	5	4	3	10	4	5	9	5	5	2	8
69	2	2	8	10	9	10	2	8	10	9	6	1	3	4	4
70	10	6	7	2	6	8	6	7	2	6	8	6	2	10	10
71	6	7	6	9	1	6	7	6	9	1	2	9	6	2	8
72	7	10	2	6	7	9	10	2	6	7	9	2	7	9	6
73	1	1	9	5	5	7	1	9	5	5	4	7	10	6	9
74	9	9	3	4	8	10	9	3	4	8	1	10	1	5	7
75	8	8	4	3	10	5	8	4	3	10	7	5	9	4	10
76	2	2	10	8	2	4	2	10	8	2	6	4	8	3	5
77	3	3	8	10	4	3	3	8	10	4	5	3	2	8	4
78	5	5	5	1	3	2	5	5	1	3	3	8	3	10	3
79	4	4	1	7	9	1	4	1	7	9	10	1	5	1	2
80	8	7	1	6	6	4	7	1	6	6	1	6	4	7	1
81	10	1	3	7	8	5	1	3	7	8	2	5	7	6	4
82	6	10	4	3	3	1	10	4	3	3	6	10	1	7	5
83	9	6	2	8	7	10	6	2	8	7	3	4	10	3	1
84	5	9	5	9	10	3	9	5	9	10	9	9	6	8	10
85	7	8	7	10	9	2	8	7	10	9	5	7	9	9	3
86	1	2	10	5	5	6	2	10	5	5	8	1	8	10	2
87	3	5	8	1	1	7	3	8	1	1	10	8	2	5	6
88	4	4	6	2	4	8	5	6	2	4	4	2	5	1	7
89	2	3	9	4	2	9	4	9	4	2	7	3	4	2	8
90	8	9	8	8	4	4	9	8	8	4	4	4	3	4	9
91	4	6	1	4	2	2	6	1	4	2	3	10	9	8	4
92	10	1	9	6	7	7	1	9	6	7	7	3	6	4	2
93	3	3	7	1	10	10	3	7	1	10	2	7	1	6	7
94	7	2	3	5	6	6	2	3	5	6	8	5	3	1	10
95	5	4	2	7	5	5	4	2	7	5	5	2	2	5	6
96	6	10	6	10	9	9	10	6	10	9	10	6	4	7	5
97	1	5	10	2	3	3	5	10	2	3	6	8	10	10	9
98	2	7	5	3	8	8	7	5	3	8	9	1	5	2	3
99	9	8	4	9	1	1	8	4	9	1	1	9	7	3	8

ДОДАТКИ

Додаток 1

Таблиця похідних та правил диференціювання

Наведемо таблицю основних формул диференціювання, враховуючи правила, встановлені формули похідних і узагальнивши їх на складні функції.

№	Функція	Похідна
1	$y = C$	$y' = 0$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = Cu$	$y' = Cu'$
4	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
5	$y = uv$	$y' = u'v + v'u$
6	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
7	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u'$
7а)	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{u'}{u^2}$
7 б)	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
8	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
9	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
10	$y = \operatorname{tg} u$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
11	$y = \operatorname{ctg} u$	$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
12	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

14	$y = \operatorname{arctg} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
15	$y = \operatorname{arccctg} u$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$
16	$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u \ln a}$
16a)	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
17	$y = a^u$	$y' = a^u \ln a \cdot u'$
17a)	$y = e^u$	$y' = e^u u'$

Додаток 2

Таблиця невизначених інтегралів є прямим наслідком таблиці похідних основних елементарних функцій, правил диференціювання і властивостей диференціала. Знання і вміння користуватися цими поняттями необхідно для засвоєння теми.

Таблиця основних інтегралів

Основна таблиця	Розширена таблиця
$\int f(x) dx = F(x) + C$	$\int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx+b) + C$
1. $\int dx = x + C$	
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{kx+b}} = \frac{2}{k} \cdot \sqrt{kx+b} + C$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \quad n = -1$	$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k} \cdot \ln kx+b + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx}}{\ln a} + C$

6. $\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cdot \cos kx + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \cdot \sin kx + C$
9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \operatorname{tg} kx dx = -\frac{1}{k} \cdot \ln \cos kx + C$
10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$	$\int \operatorname{ctg} kx dx = \frac{1}{k} \cdot \ln \sin kx + C$
11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right + C$	$\int \frac{dx}{\sin kx} = \frac{1}{k} \cdot \ln\left \operatorname{tg} \frac{kx}{2}\right + C$
12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k} \operatorname{ctg} kx + C$
13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right + C$	$\int \frac{dx}{\cos kx} = \frac{1}{k} \cdot \ln\left \operatorname{tg}\left(\frac{kx}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right + C$
14. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k} \cdot \operatorname{tg} kx + C$
15. $\int \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}} + C$	$\int \frac{dx}{a+kx^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{k}x}{\sqrt{a}} + C$
16. $\int \frac{dx}{a-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left \frac{\sqrt{a}+x}{\sqrt{a}-x}\right + C$	$\int \frac{dx}{a-kx^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln\left \frac{\sqrt{a}+\sqrt{k}x}{\sqrt{a}-\sqrt{k}x}\right + C$
17. $\int \frac{dx}{x^2-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right + C$	$\int \frac{dx}{kx^2-a} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln\left \frac{\sqrt{k}x-\sqrt{a}}{\sqrt{k}x+\sqrt{a}}\right + C$
18. $\int \frac{x dx}{kx^2 \pm a} = \frac{1}{2k} \ln kx^2 \pm a + C$	$\int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \ln f(x) + C$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{a}} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a-kx^2}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{k}x}{\sqrt{a}} + C$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{kx^2 \pm a}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \sqrt{k}x + \sqrt{kx^2 \pm a} + C$
21. $\int \frac{x dx}{\sqrt{kx^2 \pm a}} = \frac{1}{k} \sqrt{kx^2 \pm a} + C$	$\int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C$

