МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

А.В.ПАВЛЕНКО, Л.П.КАГАДІЙ, В.Л. КОПОРУЛІН

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

**Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник. Протокол № 1 від 30.01.2012**

Дніпропетровськ НМетАУ 2012

УДК 517(07)

Павленко А.В., Кагадій Л.П., Копорулін В.Л. Теорія функцій комплексної змінної: Навч. посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 188 с.

Викладені основи теорії функцій комплексної змінної. Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями та ілюстраціями, а також розв'язанням відповідних прикладів. Пропонуються задачі для самостійного виконання.

Призначений для студентів напрямів: 6.050202 – автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології, 6.050102 – електромеханіка, 6.051002 – метрологія, стандартизація та сертифікація усіх форм навчання.

Іл. 47. Бібліогр.: 35 найм.

Друкується за авторською редакцією

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: О.О. Сдвижкова, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)
В.Г. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ ім. О. Гончара)

З М І С Т

ВСТУП

Характерною рисою початку XXI століття стала швидка математизація різних галузей науки, техніки, економіки та управління. Створення нових теорій і технологій, зразків сучасної техніки, вивчення та прогнозування складних процесів і явищ, оптимальне проектування й планування як правило пов'язані з побудовою та дослідженням відповідних, часом дуже складних, математичних моделей. Тому сучасний інженер або програміст повинен мати досить високий рівень математичної підготовки, що передбачає не тільки знання основ математики, а й добре володіння тими її засобами і методами, які можуть застосовуватися при розв'язанні конкретних задач за його спеціальністю.

Теорію функцій комплексної змінної без перебільшення можна назвати ядром сучасної математики. Вона органічно поєднує в собі аналітичні і геометричні методи, вже визнані класичними підходи і нові ідеї. Поняття і конструкції теорії функцій комплексної змінної є основними моделями, джерелами й відправними пунктами як різних розділів математики, так і багатьох прикладних наук.

Вихідні ідеї теорії функцій комплексної змінної виникли у другій половині XVIII ст. і пов'язані насамперед з іменем Леонарда Ейлера (1707-1783). В роботах Ейлера детально вивчені елементарні функції комплексної змінної, надані умови диференційовності і початкові основи інтегрального числення функцій комплексної змінної, наведені численні застосування цих функцій до різноманітних математичних задач, зокрема, закладені основи застосувань у гідродинаміці і картографії. Основний масив теорії був створений у XIX ст. переважно трудами Огюстена Коші (1789-1857) і Карла Вейєршрасса (1815-1897), які розвили інтегральне числення і теорію подання функцій рядами, а також Бернхарда Рімана (1826-1866), який обгрунтував геометричні питання теорії функцій та їх застосування. Завдяки роботам цих і багатьох інших видатних вчених теорія функцій комплексної змінної остаточно сформувалася як найважливіша галузь математичного аналізу, така ж повна, як і теорія, що лежить в основі математичного аналізу функцій дійсної змінної. В наш час класична частина комплексного аналізу – теорія функцій однієї комплексної змінної – набула цілком завершеного вигляду і завдяки зручній комплексній формі запису математичних формулювань широко застосовується у різних галузях науки і техніки, зокрема при побудові і дослідженні складних математичних моделей в електро- і радіотехніці, гідро- і аеродинаміці, теорії пружності, теорії коливань і багатьох інших.

У навчальній літературі існує чимало вдалих курсів теорії функцій однієї комплексної змінної, але переважна більшість з них орієнтована на підготовленого читача, достатньо складна і має великий обсяг при невеликій кількості розібраних прикладів. Між тим в умовах постійного скорочення обсягу годин, що відводяться для аудиторних занять у технічних вишах, важливою складовою навчання студентів стає їх самостійна робота. Тому автори намагалися створити посібник, який був би адаптований саме до умов навчання студентів технічних спеціальностей. За мету було поставлено у досить стислій і одночасно доступній формі ознайомити читача з освітою на рівні першого курсу з основними положеннями теорії функцій однієї комплексної змінної і допомогти йому виробити практичні навички у розв'язанні типових задач. Тому основи теорії викладені досить лаконічно, докази наведені лише для деяких найважливіших теорем і значна увага приділена практичній складовій, викладення теоретичних положень чергується з розв'язанням численних прикладів, що їх ілюструють. Для кращого засвоєння матеріалу пропонуються задачі для самостійного розв'язання, які містяться в кінці кожного розділу. Відповіді та список рекомендованої літератури наведені в кінці посібника.

Хоча даний посібник і призначений насамперед для студентів, автори сподіваються, що він буде цікавим і корисним також викладачам та усім, хто вивчає цей складний розділ аналізу і бажає удосконалити свою математичну підготовку.

1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Хоча їх і називають уявними, але від цього вони не перестають бути корисними й навіть необхідними для аналітичного подання реальних величин

Г. Лейбніц

1.1. Дійсні числа

Питання про те, що, власне кажучи, являють собою *числа*, стосується більш філософа, ніж математика, і є предметом численних філософських досліджень. Проте математика не потребує ніякого попереднього теоретико-пізнавального дослідження більш глибокої суті поняття числа. Тому будемо розглядати числа, і перш за все цілі додатні або ***натуральні*** числа **1, 2, 3, ...**, як щось *безпосередньо дане*; точно так само й ***правила (основні закони)***, за якими можна виконувати дії над цими числами: 1) $\boldsymbol{a+b=b+a}$ (***переставний*** або ***комутативний*** закон додавання), 2) $\boldsymbol{(a+b)+c=a+(b+c)}$ (***сполучний*** або ***асоціативний*** закон додавання), 3) $\boldsymbol{ab=ba}$ (комутативний закон множення), 4) $\boldsymbol{(ab)c=a(bc)}$ (асоціативний закон множення), 5) $\boldsymbol{a(b+c)=ab+ac}$ (***розподільний*** або ***дистрибутивний*** закон множення відносно додавання).

В основу математичної теорії може бути покладений деякий абстрактний (ідеальний) об'єкт, який не визначається, але формулюються властивості цього об'єкта або правила дії з цими об'єктами (ці властивості називаються *аксіомами*). Застосовуючи такий підхід, можна строго побудувати теорію натуральних чисел, усі інші числа можна побудувати на грунті натуральних. "Бог створив натуральні числа, усе інше – справа рук людини" – так сформулював цю ідею німецький математик Леопольд Кронекер (1823-1891).

Послідовне розширення поняття числа від натурального до дійсного обумовлене не тільки практичними потребами людської діяльності, але й внутрішніми вимогами самої математики.

В області натуральних чисел основні *прямі* операції – додавання і множення – завжди необмежено здійсненні, тобто сума і додаток двох натуральних чисел завжди є також натуральними числами. Однак *обернені* операції – віднімання і ділення – не завжди здійсненні. Різниця $\boldsymbol{b-a}$ двох натуральних чисел $\boldsymbol{a}$ й $\boldsymbol{b}$ є за означенням таке натуральне число $\boldsymbol{c}$, що $\boldsymbol{a+c=b}$, тобто це є розв'язок рівняння $\boldsymbol{a+x=b}$. Але в області натуральних чисел символ $\boldsymbol{b-a}$ має зміст лише за обмеження $\boldsymbol{b>a}$, оскільки лише за цієї умови рівняння $\boldsymbol{a+x=b}$ має розв'язком натуральне число. На шляху до зняття цього обмеження важливий крок був зроблений вже тоді, коли ввели символ $\mathbf{0}$ для позначення різниці $\boldsymbol{a-a}$. Але ще більш значним успіхом було введення символів **-1, -2, -3, ...** й, разом з тим, означення $\boldsymbol{(b-a)=-(a-b)}$ для випадку $\boldsymbol{b<a}$. Після цього можна було стверджувати, що й віднімання має властивість необмеженої здійсненності *в області усіх цілих – додатних і від'ємних – чисел*. Коли ми вводимо нові символи **-1, -2, -3, ...** й тим самим розширюємо числову область, то ми зобов'язані, звичайно, визначити операції над знову введеними числами *таким чином,щоб первісні правила арифметичних операцій не були порушені.* Так, наприклад, правило $\mathbf{(-1)\cdot(-1)=1}$, що лежить в основі множення від'ємних чисел, є наслідок бажання зберегти розподільний (дистрибутивний) закон $\boldsymbol{a(b+c)=ab+ac}$.

Подібно до того, як введення від'ємних цілих чисел й нуля розчищає шлях до необмеженої здійсненності віднімання, введення дробових чисел усуває арифметичні перешкоди, що заважають виконувати ділення. Відношення або частка $\boldsymbol{x=b/a}$ двох цілих чисел визначається як розв'язок рівняння $\boldsymbol{ax=b}$ і існує як *ціле число* тільки в тому випадку, коли $\boldsymbol{a}$ є дільником $\boldsymbol{b}$. Але якщо це не так (наприклад, при $\boldsymbol{a=2}$, $\boldsymbol{b=3}$), то ми просто вводимо новий символ $\boldsymbol{b/a}$, що називається *дробом* і підкоряється умові $\boldsymbol{a(b/a)=b}$, отже, $\boldsymbol{b/a}$ є розв'язком рівняння $\boldsymbol{ax=b}$ "за означенням". Винахід дробів як нових числових символів забезпечує необмежену здійсненність ділення, *окрім ділення на нуль*, яке *виключається раз і назавжди*. Вирази на зразок **1/0**, **3/0** тощо залишаться для нас символами, позбавленими змісту. Якщо б ми припустили ділення на $\mathbf{0}$, то з вірної рівності $\mathbf{0\cdot1=0\cdot2}$ отримали б невірний наслідок $\mathbf{1=2}$.

Сукупність усіх цих чисел (натуральних, нуля, від'ємних цілих, додатних і від'ємних дробів) прийнято називати *раціональними числами*, оскільки усі вони утворюються з одиниці шляхом застосування *"раціональних арифметичних дій"*: додавання, множення, віднімання і ділення.

Числа прийнято наочно зображувати за допомогою точок прямої лінії, "числової прямої" або "осі". Деяку довільну точку на цій прямій приймають за початок або точку $\mathbf{0}$, а іншу довільну точку – за точку $\mathbf{1}$. Відрізок між цими двома точками тоді служить масштабом, за допомогою якого кожному додатному або від'ємному раціональному числу ставиться у відповідність певне місце на числовій прямій, причому зазвичай додатними числами позначаються точки справа від нуля, а від'ємними – зліва (рис. 1.1).

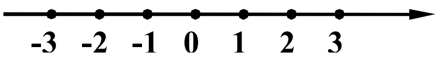

Рис. 1.1

Якщо розуміти під *абсолютною величиною* $|a|$ числа a саме значення a, якщо $a \geq 0$, й число $-a$, якщо $a < 0$, то $|a|$ просто означає відстань відповідної точки числової прямої від початкової точки $\mathbf{0}$.

Геометричне тлумачення раціональних чисел за допомогою точок числової прямої приводить до встановлення важливої властивості сукупності раціональних чисел, а саме: *"множина раціональних чисел є всюди щільною"*. Це означає, що між двома як завгодно близькими раціональними числами містяться й інші раціональні числа, або, на мові геометрії, будь-який як завгодно малий відрізок числової прямої містить всередині себе раціональні точки.

Однак, незважаючи на цю властивість щільності, множини раціональних чисел недостатньо, щоб "забезпечити" усі точки числової прямої числами. Ще античним математикам було відомо, що якщо прийняти довжину якого-небудь відрізка за одиницю, то існують відрізки, довжина яких не виражається раціональним числом, – так звані *неспільномірні з одиницею довжини* відрізки. Так, наприклад, гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника з катетами, що дорівнюють одиниці, неспільномірна з одиницею, тобто її довжина не виражається раціональним числом. Найпростіша геометрична побудова приводить до відрізка, неспільномірного з одиницею. Якщо такий відрізок буде відкладений за допомогою циркуля на числовій осі від точки $\mathbf{0}$ (рис. 1.2), то побудована таким чином точка (кінець відрізка) не співпадає ні з якою раціональною точкою. Отже, *система раціональних точок (хоча й всюди щільна) не покриває всієї числової осі.*

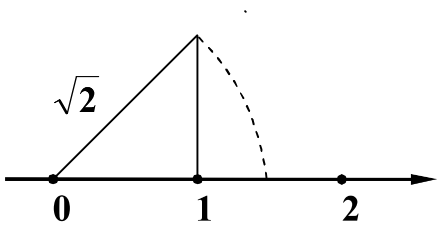

Рис. 1.2

Тому, якщо ми бажаємо кожній точці прямої поставити у відповідність деяке число, то ми змушені ввести, окрім раціональних, ще й інші –

“ірраціональні” числа. Ми будемо строго дотримуватися тієї вимоги, щоб точкам прямої лінії після вибору певної одиниці довжини взаємно однозначним чином відповідали певні числа. Цю систему раціональних та ірраціональних чисел, які знаходяться у взаємно однозначній відповідності з точками числової прямої, називають *системою (множиною) дійсних чисел*.

Без сумніву, може здатися дещо дивним й парадоксальним, що всюди щільна множина раціональних чисел не покриває всієї прямої. Ніяка наша “інтуїція” не допоможе нам “побачити” ірраціональні точки або відрізнити їх від раціональних. Немає нічого дивного в тому, що відкриття неспільномірного приголомшило давньогрецьких математиків та мислителів і що його існування і в наш час продовжує справляти враження на людей, схильних до поглиблених роздумів.

Відкриття неспільномірних співвідношень легенда приписує Гіппадію з Метапонта (Vст. до н.е.). За переказом в цей час піфагорійці знаходилися у відкритому морі. Вони викинули Гіппадія за борт, звинувативши його в тому, що він привніс в світобудову елемент, який суперечить піфагорійському вченню про зведення усіх явищ природи до цілих чисел або до їх відношень.

Всяке раціональне число може бути подане у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу. Ірраціональні числа зображуються нескінченними неперіодичними десятковими дробами. Отже, *за дійсні числа приймають множину усіх скінченних та нескінченних десяткових дробів*.

Абсолютні величини дійсних чисел мають *наступні властивості*:

– абсолютна величина алгебраїчної суми декількох дійсних чисел не більше суми абсолютних величин доданків: $|a+b+c| \le |a|+|b|+|c|$;
– абсолютна величина різниці двох дійсних чисел не менше різниці абсолютних величин зменшуваного та від’ємника: $|a-b| \ge |a|-|b|$ ($|a|>|b|$);
– абсолютна величина добутку декількох дійсних чисел дорівнює добутку абсолютних величин множників: $|a \cdot b \cdot c| = |a| \cdot |b| \cdot |c|$;
– абсолютна величина частки двох дійсних чисел дорівнює частці абсолютних величин діленого та дільника: $|a/b| = |a|/|b|$ ($b \ne 0$).

Отже, ми бачили, як послідовно розширювалася множина натуральних чисел, на якій завжди можуть бути здійснені дії додавання і множення, але обернені дії віднімання і ділення можливі не завжди. Після введення нуля й від'ємних чисел, тобто після розширення множини натуральних чисел до множини цілих, дія віднімання стає можливою для будь-яких двох чисел. Подальше введення дробів і розширення множини цілих чисел до множини раціональних, для будь-яких двох чисел з цієї множини стає можливою і дія ділення (звичайно, за умови, що дільник відмінний від нуля).

*Множина, на якій задані операції додавання і множення, що задовольняють основним законам 1) – 5), й здійсненні обернені операції віднімання і ділення (за виключенням випадку, коли дільник дорівнює нулю), називається **полем**.*

Таким чином, множина раціональних чисел утворює найпростіше числове поле. Але на цій множині, за виключенням рідкісних випадків, неможлива операція, обернена до операції піднесення до степеня. Ірраціональні числа ліквідують цю прогалину лише частково: на множині всіх дійсних чисел можна добувати корені *парного* степеня лише з *невід'ємних* чисел. Отже, множина дійсних чисел також утворює поле, але операція добування кореня не є необмежено здійсненною. Щоб це було можливе завжди, потрібне подальше розширення поля дійсних чисел.

До необхідності цього математики прийшли ще у середині XVI ст., коли зіткнулися з проблемою розв'язання неповного кубічного рівняння

$$\boldsymbol{x^3 + px + q = 0}, \qquad \textbf{(1.1)}$$

де $\boldsymbol{p}$ й $\boldsymbol{q}$ – дійсні числа. До того при розв'язанні квадратного рівняння $\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$ за відомою формулою $\boldsymbol{x = -p \pm \sqrt{D}}$ у випадку $\boldsymbol{D = p^2 - 4q < 0}$ вираз $\sqrt{\boldsymbol{D}}$ (або $\sqrt{-\boldsymbol{1}}$) просто оголошувався "неіснуючим" або таким, що не має змісту. Для кубічного рівняння такий "підхід" виявився вже неможливим.

У 1515 р. професор математики Болонського університету Сципіон дель Ферро (1465-1526) відкрив спосіб розв'язання рівняння (1.1), а в 1535 р. незалежно від нього аналогічний спосіб винайшов Нікколо Тарталья (1500-1557). У 1545 р. професор математики Міланського університету Джероламо Кардано (1501-1576) опублікував в Германії трактат "Велике мистецтво" ("Ars magna"), в якому виклав з посиланням на Тарталью правило розв'язання рівняння (1.1), яке згодом отримало назву *формули Кардано*, а також вперше навів спосіб розв'язання *рівняння четвертого степеня*, запропонований його учнем Лодовіко Феррарі (1522-1565). Проте виявилося, що формула Кардано

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \qquad \textbf{(1.2)}$$

де $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$, не дає очікуваного результату у тому випадку, коли рівняння (1.1) має три різних дійсних кореня. Наприклад, спроба обчислити за цією формулою корені рівняння $x^3 - x = 0$ приводить до виразу $x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}$, тоді як одразу бачимо, що цими коренями є числа **0, 1** та **-1**. Щоб отримати цей розв'язок з формули Кардано необхідно було ввести нову систему чисел, в якій операція добування кореня, на відміну від множини дійсних чисел, була б необмежено здійсненною. Зокрема, в цій, новій, системі повинні існувати корені найпростішого квадратного рівняння $x^2 + 1 = 0$.

1.2. Поле комплексних чисел

Введемо нове число i, таке, що $i^2 = -1$, і назвемо його ***уявною одиницею***. Ясно, що $(-i)^2 = -1$, отже, рівняння $x^2 + 1 = 0$ тепер має два корені $+i$ та $-i$.

Треба зауважити, що вираз $i = \sqrt{-1}$, який іноді вживається, є не зовсім коректним, оскільки квадратний корінь визначений лише на множині невід'ємних чисел. Крім того, заміна i на $\sqrt{-1}$ може привести до помилкового результату: $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-5} = \sqrt{(-5)\cdot(-5)} = \sqrt{25} = 5$, в той час як насправді $i\sqrt{5} \cdot i\sqrt{5} = = i^2 \cdot \sqrt{25} = -5$.

Розглянемо множину елементів вигляду $x + iy$, де x й y – дійсні числа, і на цій множині введемо наступні ***правила (аксіоми)***:

1) ***правило порівняння***: $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$ й $y_1 = y_2$; **(1.1)**
2) ***правило додавання:*** $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$; **(1.2)**
3) ***правило множення:***

$$(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1). \qquad \textbf{(1.3)}$$

Елементи вигляду $x + iy$ з введеними правилами порівняння, додавання і множення називаються ***комплексними числами***. Множину комплексних чисел звичайно позначають $\mathbb{C}$, а елементи цієї множини – буквою z. Вперше термін "комплексне число" був застосований у 1803 р. французьким математиком Лазарем Карно, але до широкого використання його впровадив у 1831 р. великий німецький математик Карл Фрідріх Гаусс (1777-1855). На відміну від множини дійсних чисел, вона не має властивості впорядкованості: для комплексних чисел порівняння типу *більше – менше* не існує, визначене тільки порівняння типу *рівні* або *не рівні*.

Зауваження. У 1837 р. ірландський математик Уільям Роуен Гамільтон (1805-1865) побудував *аксіоматичну теорію* комплексних чисел, згідно якій комплексні числа визначаються як *впорядковані пари дійсних чисел* (x, y), на множині яких визначені операції

1) ***порівняння:*** $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$ й $y_1 = y_2$;

2) ***додавання:*** $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

3) ***множення:*** $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2,\ x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.

Розглянемо комплексне число $z = x + iy$. Дійсне число x будемо називати ***дійсною частиною*** комплексного числа z і позначати $x = \mathbf{Re}\, z$ (за першими буквами латинського слова *Realis*, що означає *дійсний*), а y – ***уявною частиною*** і позначати $y = \mathbf{Im}\, z$ (від латинського *Imaginarius – уявний*).

Неважко показати, що операції додавання і множення, введені на множині комплексних чисел, мають наступні *властивості*:

1. ***Комутативність додавання***: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
2. ***Асоціативність додавання***: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
3. ***Комутативність множення***: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
4. ***Асоціативність множення***: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;
5. ***Дистрибутивність множення відносно додавання***:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Введемо дії, *обернені* додаванню і множенню.

Різницею двох комплексних чисел z_1 й z_2 називається число z, таке, що $z_2 + z = z_1$. Різниця позначається символом $z_1 - z_2$. Очевидно, що

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Має місце ***теорема***: для будь-якої пари комплексних чисел z_1 й z_2 існує різниця $z_1 - z_2$, причому це число єдине.

Нулем називається таке комплексне число $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{0}$, що для будь-якого числа z виконується $z + \mathbf{0} = z$. Очевидно, існує єдине число, що має цю властивість.

Часткою двох комплексних чисел z_1 й z_2 називається число z, таке, що $z_2 \cdot z = z_1$. Частка позначається символом $\frac{z_1}{z_2}$.

Має місце ***теорема***: для будь-якої пари комплексних чисел z_1 й z_2 ($z_2 \neq \mathbf{0}$) існує частка $\frac{z_1}{z_2}$, причому це число єдине.

Щоб знайти частку $\frac{z_1}{z_2}$, треба, згідно (1.1) й (1.3), розв’язати систему рівнянь $x_2 \cdot x - y_2 \cdot y = x_1$, $y_2 \cdot x + x_2 y = y_1$, яка при $z_2 \neq \mathbf{0}$ завжди має єдиний розв’язок, оскільки її головний визначник $x_2^2 + y_2^2 > \mathbf{0}$.

Отже, на множині комплексних чисел операції додавання і множення задовольняють основним законам і існують обернені операції віднімання і ділення, тобто ***множина комплексних чисел утворює поле***. Це поле ***алгебраїчно замкнене***, тобто *многочлен степеня* ***n*** *з комплексними коефіцієнтами має рівно* ***n*** *комплексних коренів* ***(основна теорема алгебри)***. Зазначимо, що перше строге доведення цього факту належить Гауссу (1799 р.). Алгебраїчна замкненість поля комплексних чисел є однією з головних причин їх широкого застосування в математичних дослідженнях. Крім того, використання комплексних чисел дозволяє компактно і зручно сформулювати багато математичних моделей, що застосовуються у математичній фізиці й природничих науках – електротехніці, гідродинаміці, механіці деформівного твердого тіла, теорії коливань, картографії, квантовій механіці і багатьох інших. Також зазначимо, що згідно відомій теоремі, доведеній у 1877 р. Георгом Фердінандом Фробеніусом (1849-1917), *поле комплексних чисел є єдиним можливим розширенням поля дійсних чисел зі зберіганням алгебраїчних властивостей.*

Відзначимо властивості деяких комплексних чисел.

1. Добуток нуля на будь-яке число дорівнює нулю: $\mathbf{0} \cdot z = \mathbf{0}$.
2. Якщо добуток двох комплексних чисел дорівнює нулю, то принаймні один з множників дорівнює нулю.

3. Для довільного комплексного числа $z = x + iy$ число $-z = (-x) + i(-y)$ будемо називати ***протилежним*** числу z. Очевидно, що число z є протилежним числу $-z$, тому ці числа прийнято називати ***взаємно протилежними***. Сума взаємно протилежних чисел завжди дорівнює нулю: $z + (-z) = (x + iy) + [(-x) + i(-y)] = 0 + i \cdot 0$. Іноді корисно також мати на увазі, що $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.
4. Для довільного комплексного числа z, такого, що $z \neq 0$, існує ***обернене*** до нього число $\tilde{z}$, таке, що $\tilde{z} \cdot z = 1 + i \cdot 0$.

Розглянемо комплексні числа вигляду $x + i0$. Неважко бачити, що $(x_1 + i0) \pm (x_2 + i0) = (x_1 \pm x_2) + i0$, $(x_1 + i0) \cdot (x_2 + i0) = x_1 \cdot x_2 + i0$, $\dfrac{x_1 + i0}{x_2 + i0} = \dfrac{x_1}{x_2} + i0$, тобто результати арифметичних операцій з комплексними числами $x_1 + i0$ й $x_2 + i0$ співпадають з результатами тих самих операцій з дійсними числами x_1 й x_2. Цей факт дозволяє ототожнювати комплексні числа вигляду $x + i0$ з дійсними числами і говорити, що *множина дійсних чисел* $\mathbb{R}$ *є підмножиною множини комплексних чисел* $\mathbb{C}$: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Аналогічно, числа вигляду $0 + iy$ будемо називати ***чисто уявними*** і позначати символом iy. За правилом множення комплексних чисел, зокрема, маємо $i^2 = i \cdot i = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = -1 + i0 = -1$.

Тепер ми можемо розглядати кожне комплексне число як *суму* дійсного та чисто уявного чисел: $z = x + iy = (x) + (iy)$, а число iy як добуток $i \cdot y$.

1.3. Алгебраїчна форма комплексного числа. Спряжені числа

Співвідношення

$$z = x + iy \tag{1.4}$$

називається ***алгебраїчною формою*** комплексного числа. Вона дуже зручна при виконанні операцій додавання, віднімання і множення, оскільки у цьому випадку з комплексними числами можна поводитися як зі звичайними біномами вигляду $x + iy$. При цьому подібними вважаються ті члени, які не містять уявну одиницю, та ті, які її містять; також при множенні враховується основна властивість уявної одиниці ($i^2 = -1$):

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 \cdot x_2 + i^2 \cdot y_1 \cdot y_2 + i \cdot x_1 \cdot y_2 + i \cdot x_2 \cdot y_1) =$$
$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

Число $\bar{z} = x - iy$ називається ***спряженим*** до числа $z = x + iy$. Таким чином,

$$\mathbf{Re}\, z = \mathbf{Re}\, \bar{z}, \ \mathbf{Im}\, z = -\mathbf{Im}\, \bar{z}.$$

Очевидно, що число z в свою чергу є спряженим до числа $\bar{z}$, тому ці числа називають ***взаємно спряженими***. Для будь-яких комплексних чисел z_1 й z_2 справедливі рівності

$$\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z, \ \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \ \ (z_2 \neq 0),$$

$$\mathbf{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \ \ \mathbf{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

При виконанні *ділення* числа z_1 на z_2 $(z_2 \neq 0)$ на практиці необхідно застосувати *основну властивість дробу*: величина дробу не зміниться, якщо її чисельник і знаменник помножити на одне й те саме число, відмінне від нуля. Отже, чисельник і знаменник дробу $\frac{z_1}{z_2}$ помножимо на $\bar{z}_2$ і врахуємо, що *добуток взаємно спряжених чисел завжди є дійсним числом*, а саме,

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2.$$

Тоді отримаємо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Підносити до степеня комплексні числа у алгебраїчній формі можливо, але не дуже зручно, якщо степінь достатньо велика, оскільки у більшості випадків це потребує застосування формули бінома Ньютона і відповідних громіздких обчислень. Добування ж навіть квадратних коренів з чисел вигляду $z = x + iy$ досить складне, а для коренів степеня $n \geq 3$ воно практично неможливе.

При піднесенні уявної одиниці до степеня з натуральним показником бачимо, що $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i \cdot i^2 = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$, $i^5 = i \cdot i^4 = i$,..., тобто значення i^n повторюються, а саме, $i^n = i^{n+4}$. Тому взагалі

$$i^{4m+k} = i^k \quad (m \in \mathbb{N},\ \ k = 0, 1, 2, 3), \tag{1.5}$$

Отже, щоб знайти i^n, де $n = 4m + k$, достатньо i піднести до степеня, показник якого дорівнює залишку від ділення n на 4.

Приклад 1.1. Обчислити i^{1363}.

Розв'язання. Оскільки залишок від ділення 1363 на 4 дорівнює 3, то $i^{1363} = i^3 = -i$.

Приклад 1.2. Обчислити $z_1^2 \overline{\left(\dfrac{z_2}{z_3}\right)}$, якщо $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = -4 + 3i$.

Розв'язання. Спочатку обчислимо

$$\overline{\left(\frac{z_2}{z_3}\right)} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_3} = \frac{\bar{z}_2 z_3}{\bar{z}_3 z_3} = \frac{(3+2i)\cdot(-4+3i)}{(-4)^2 + 3^2} = \frac{-12-6}{25} + i\frac{9i-8i}{25} = -\frac{18}{25} + i\frac{1}{25}.$$

Оскільки

$$z_1^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i,$$

то остаточно

$$z_1^2 \overline{\left(\frac{z_2}{z_3}\right)} = 2i \cdot \left(-\frac{18}{25} + i\frac{1}{25}\right) = -\frac{2}{25} - i\frac{36}{25}.$$

Розглянемо квадратне рівняння з *дійсними* коефіцієнтами

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

такими, що його дискримінант $D = b^2 - 4ac < 0$. Коренями цього рівняння будуть комплексні числа $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Оскільки $\sqrt{D} = \sqrt{-|D|} = \sqrt{i^2|D|} = i\left(\sqrt{|D|}\right)$, то $x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a} \pm i\dfrac{\sqrt{|D|}}{2a}$, тобто *коренями такого рівняння завжди будуть спряжені комплексні числа*.

На завершення розглянемо квадратне рівняння з *комплексними* коефіцієнтами.

Приклад 1.3. Розв'язати рівняння $z^2 + 5iz + 36 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $D = (5i)^2 - 4 \cdot 36 = -25 - 144 = -169$, $\sqrt{D} = \sqrt{-169} =$

$= \sqrt{169 i^2} = 13i$, то $z_{1,2} = \dfrac{-5i \pm 13i}{2}$. Отже, $z_1 = 4i$, $z_2 = -9i$.

<u>Приклад 1.4.</u> Розв'язати рівняння $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.

Розв'язання. $D = (2i-3)^2 - 4(5-i) = 4i^2 - 12i + 9 - 20 + 4i = -15 - 8i =$
$= -16 - 8i + 1 = 16i^2 - 8i + 1 = (4i-1)^2$, $\sqrt{D} = 4i - 1$, $z_{1,2} = \dfrac{-(2i-3) \pm (4i-1)}{2}$.
Отже, $z_1 = \dfrac{-2i + 3 + 4i - 1}{2} = 1 + i$, $z_2 = \dfrac{-2i + 3 - 4i + 1}{2} = 2 - 3i$. Зауважимо, що тут вдалося за допомогою тотожних перетворень добути корінь з дискримінанту в алгебраїчній формі, але це вдається зробити лише в окремих випадках (див. далі приклад 1.10).

1.4. Зображення комплексних чисел на площині

Ще у 1685 р. в своєму "Трактаті з алгебри" англійський математик Джон Валліс (1616-1703) звернув увагу на те, що і комплексні числа, і точки площини задаються двома дійсними числами, отже, мабуть, між тими і іншими існує деяка відповідність. Проте перша строга геометрична інтерпретація комплексних чисел і дій над ними з'явилася лише у 1799 р. в роботі "Om directionens analytiske betegning (Про аналітичне подання напрямків)" датсько-норвезького математика Каспара Весселя (1745-1818), який вивчав математичні аспекти геодезії. Ідея Весселя про подання комплексного числа точкою комплексної площини сьогодні є загальновизнаною. Його доповідь була перевидана у 1899 р. французькою мовою, а у 1999 р. – англійською ("On the analytic representation of directions"). Пізніше Гаусс зумів застосувати геометричне тлумачення комплексних чисел до розв'язання складних геометричних задач.

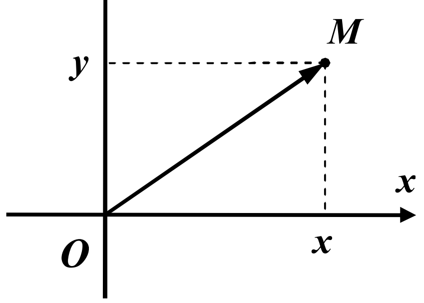

Рис. 1.3

Введемо на площині прямокутну декартову систему координат xOy (рис. 1.3). Кожному комплексному числу $z = x + iy$ відповідає одна і тільки одна пара дійсних чисел (x, y), яку можна розглядати як декартові прямокутні координати точки M. Це комплексне число називається ***комплексною координатою*** або ***афіксом*** точки

M. Навпаки, кожній точці $M(x, y)$ відповідає одне і тільки одне комплексне число $z = x + iy$. Отже, між множиною усіх комплексних чисел і множиною усіх точок площини встановлюється взаємно-однозначна відповідність. При цьому говорять, що точка M площини xOy *зображує* комплексне число z. Тому у подальшому ми не будемо розрізняти поняття комплексного числа і точки площини, говорячи, наприклад, "точка z".

Оскільки комплексні координати дійсних чисел мають вигляд $x + i \cdot 0$, то ці числа зображуються точками осі Ox, внаслідок чого ця вісь називається ***дійсною віссю***. Аналогічно, комплексні координати чисто уявних чисел мають вигляд $0 + iy$, тому ці числа зображуються точками осі Oy, яка має назву ***уявної осі***. Зокрема, уявна одиниця $i = 0 + i \cdot 1$ зображується точкою з координатами $(0, 1)$. Уся площина xOy називається ***комплексною площиною*** і позначається $\mathbb{C}$.

Комплексне число $z = x + iy$ також зручно зображувати *радіус-вектором* $\overrightarrow{OM}$ відповідної точки $M(x, y)$ (рис. 1.3). Множина радіус-векторів усіх точок площини взаємно-однозначно відповідає множині $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Тому у подальшому, говорячи "вектор z", будемо мати на увазі *кінець* відповідного *радіус-вектора*, тобто *точку* z (*число* z).

Точки, що зображують *спряжені* числа z та $\bar{z}$, симетричні відносно осі Ox (рис. 1.4), а точки, що зображують *протилежні* числа z та $-z$, симетричні відносно початку координат.

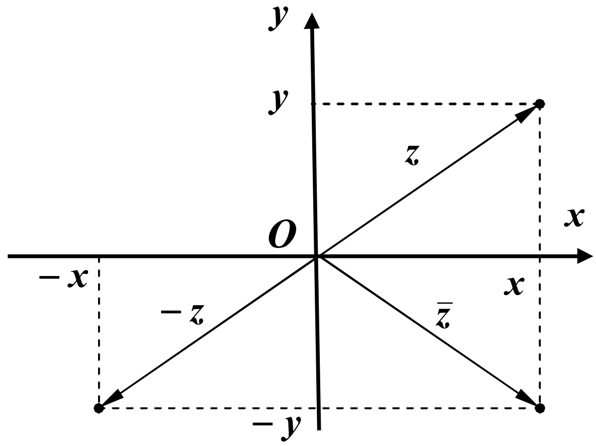

Рис. 1.4

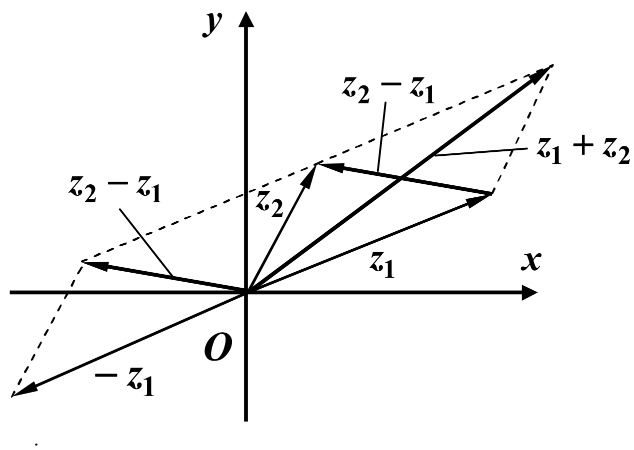

Рис. 1.5

Операції додавання і віднімання комплексних чисел можуть здійснюватися геометрично, за правилами додавання і віднімання векторів, що зображують ці числа, а саме, числам z_1+z_2 й z_2-z_1 відповідають вектори, побудовані за правилами паралелограма або трикутника (рис. 1.5).

Відстанню $\boldsymbol{\rho(z_1, z_2)}$ між комплексними числами z_1 і z_2 називається *довжина* вектора, що зображує *різницю* z_2-z_1 (рис. 1.5):

$$\rho(z_1, z_2)=|z_2-z_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

Геометрична модель комплексних чисел широко застосовується у планіметрії: багато планіметричних теорем можна довести як деякі комплексні тотожності. Часто цей метод дозволяє дати найпростіше доведення.

1.5. Модуль і аргумент комплексного числа

Модулем $|z|$ комплексного числа $z=(x, y)$ називається довжина вектора z, що зображує це число (рис. 1.6). Очевидно, що $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Кут φ, який вектор z утворює з додатним напрямком осі Ox, називається ***аргументом*** комплексного числа z і позначається $Arg z$. Додатний напрямок відліку аргументу – проти ходу годинникової стрілки.

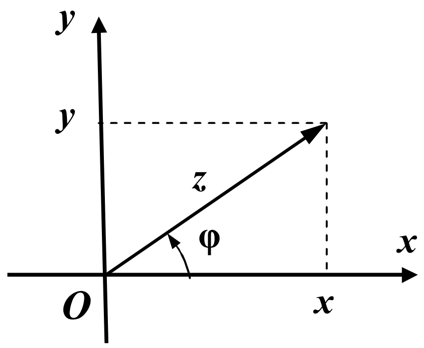

Рис. 1.6

Модуль комплексного числа $z=0$ дорівнює нулю, а аргумент вважається невизначеним.

Модуль комплексного числа має такі властивості:

$$\begin{array}{lll}
\textbf{1. } |\bar z|=|z|; & \textbf{4. } |z^n|=|z|^n; & \\
\textbf{2. } z\bar z=|z|^2; & \textbf{5. } \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2\neq 0); & \textbf{(1.6)} \\
\textbf{3. } |z_1z_2|=|z_1||z_2|; & \textbf{6. } |\mathrm{Re}\,z|\le|z|,\ |\mathrm{Im}\,z|\le|z|; & \\
\textbf{7. } \big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|. & &
\end{array}$$

З рис. 1.4 випливає, що

$$\cos\varphi=\frac{x}{|z|},\ \ \sin\varphi=\frac{y}{|z|},\ \ tg\,\varphi=\frac{y}{x}.$$

Аргумент $Argz = \varphi$ комплексного числа z можна знайти з системи рівнянь $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, яка має нескінченну кількість розв'язків вигляду $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, де $k \in \mathbb{Z}$, а φ_0 – один з розв'язків. Отже, *аргумент комплексного числа* z *визначається неоднозначно, лише з точністю до сталого доданка (довільного числа повних обертів)* $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Щоб уникнути цієї неоднозначності, вводять так зване ***головне значення аргументу*** $\arg z = \varphi_0$, отже, $Argz = \arg z + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Найчастіше головним значенням вважають таке, що задовольняє умові $-\pi < \arg z \le \pi$. ***Тут і надалі під аргументом комплексного числа будемо розуміти його головне значення*** $-\pi < \arg z \le \pi$ ***й позначати*** $\varphi = \arg z$. Тоді з формули $tg\,\varphi = \dfrac{y}{x}$ випливає, що

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y \ge 0, \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y < 0, \\ \pm\pi/2, & x = 0,\ y \gtrless 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

де $arctg\dfrac{y}{x}$ – головне значення арктангенсу, $-\dfrac{\pi}{2} < arctg\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$.

Зауваження.

1. Часто також головним значенням аргументу вважають таке, що задовольняє умові $0 \le \arg z < 2\pi$. Тоді

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x > 0,\ y \ge 0, \\ \pi - arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|, & x < 0,\ y \ge 0, \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y < 0, \\ 2\pi - arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|, & x > 0,\ y < 0, \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0, \\ 3\pi/2, & x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Можна ввести і інші головні значення. При необхідності спеціально обумовлюють, яке саме головне значення вводиться.

2. Якщо $z_1 = z_2$, то $|z_1| = |z_2|$, а аргументи зв'язані співвідношенням $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), тобто *відрізняються на довільне число обертів*.

Слід відзначити, що окрім небагатьох випадків так званих "табличних" кутів, знайти *точно* $\arg z$ за заданими значеннями його тангенса (або синуса й косинуса) *неможливо*.

<u>Приклад 1.5.</u> Знайти модуль і головне значення аргументу комплексного числа, що зображується точкою $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Розв'язання. Оскільки $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. В даному випадку $\frac{y}{x} = -\sqrt{3}$, $x < 0$, $y > 0$. Тому за формулою (1.7) $\arg z = \pi + arctg(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

<u>Приклад 1.6.</u> Розв'язати рівняння $|z| + z = 2 + i$.

Розв'язання. Позначимо $z = x + iy$. Оскільки $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то маємо рівняння $\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 2 + i$. З умови (1.1) рівності комплексних чисел випливає система рівнянь $\sqrt{x^2 + y^2} + x = 2$, $y = 1$, яка еквівалентна рівнянню $\sqrt{x^2 + 1} + x = 2$. Розв'язавши його, отримаємо $x = \frac{3}{4}$. Отже, $z = \frac{3}{4} + i$.

1.6. Тригонометрична форма комплексного числа

Підстановка співвідношень $x = |z|\cos\varphi$, $y = |z|\sin\varphi$, де φ – головне значення аргументу ($\varphi = \arg z$), у (1.4) приводить до рівності

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1.9}$$

яка називається ***тригонометричною формою*** комплексного числа.

Якщо $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$$= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)$$

або

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \qquad (1.10)$$

причому формула (1.10) залишається справедливою для будь-якого скінченного числа співмножників:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)].$$

Множення в цьому випадку допускає просте і наочне геометричне тлумачення, а саме, радіус-вектор числа $z_1 \cdot z_2$ утворюється, наприклад, поворотом радіус-вектора числа z_1 на кут φ_2 *проти ходу годинникової стрілки* і *розтягом* його у $|z_2|$ разів (рис. 1.7). Цей факт пояснює широке застосування комплексного подання у теорії коливань, де замість термінів “модуль” і “аргумент” використовуються “амплітуда” і “фаза”.

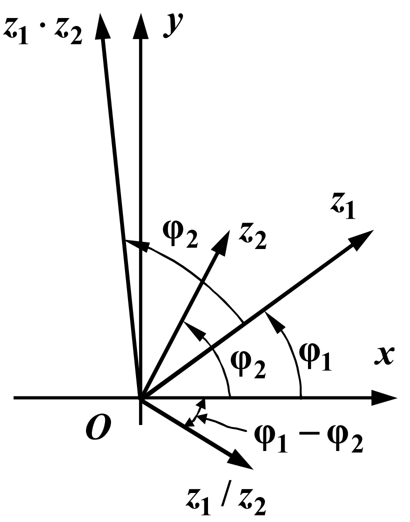

Рис. 1.7

Якщо $z_2 \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 -$$

$$- i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)$$

або

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \qquad (1.11)$$

Ділення комплексних чисел інтерпретується аналогічно множенню: радіус-вектор числа z_1 повертається на кут φ_2 *за ходом годинникової стрілки* і *стискається* у $|z_2|$ разів (рис. 1.7).

Відзначимо, що суму і різницю комплексних чисел у тригонометричному вигляді *не можна* виразити формулами, подібними до формул (1.10) й (1.11).

Якщо $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, то з (1.10) випливає так звана ***формула Муавра***

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad (1.12)$$

за якою комплексне число z підноситься до $n-$го степеня ($n \in \mathbb{N}$).

Зауваження. Формула Муавра залишається справедливою також і для *цілих від'ємних* показників степеня:

$$z^{-n}=\left(\frac{1}{z}\right)^n=\left\{\frac{1}{|z|}\cdot\left[\cos(0-\varphi)+i\sin(0-\varphi)\right]\right\}^n=|z|^{-n}\cdot\left[\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi)\right]=$$

$$=|z|^{-n}\cdot\left[\cos n\varphi-i\sin n\varphi\right].$$

Добування коренів n-го степеня з комплексного числа також здійснюється з використанням формули Муавра. Усі n коренів $w_k=(\sqrt[n]{z})_k$ обчислюються за формулами

$$w_k=\sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\quad(k=0,1,2,\ldots,n-1). \qquad (1.13)$$

Зауваження.

1. Усі корені розташовані на колі радіуса $\sqrt[n]{|z|}$ з центром у початку координат і поділяють це коло на n *рівних* частин, тобто зображуються вершинами правильного n-кутника, вписаного в це коло.
2. *Дійсних* коренів з *дійсного* числа буде **2, 1** або взагалі не буде, в залежності від знака числа й парності n. Інші корені (якщо вони є) будуть *комплексними*, причому *усі* вони *парами спряжені*.
3. *Дійсних* коренів з *комплексного* числа взагалі не існує. Усі корені будуть комплексними, причому, *незалежно від парності* n, *ніякі два з них не будуть спряженими*.
4. Формулу (1.13) іноді називають *другою формулою Муавра*, на відміну від *першої* формули Муавра (1.12).

<u>Приклад 1.7.</u> Представити у тригонометричному вигляді комплексне число $z=\sin\frac{\pi}{9}-i\cos\frac{\pi}{9}$.

Розв'язання. Оскільки $x=\sin\frac{\pi}{9}>0$, $y=-\cos\frac{\pi}{9}<0$, $\frac{y}{x}=-ctg\frac{\pi}{9}$, то $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=1$, а за формулою (1.7) з урахуванням того, що

$$arctg\,\alpha=\frac{\pi}{2}-arcctg\,\alpha,$$

будемо мати $\arg z = arctg\left(-ctg\frac{\pi}{9}\right) = -arctg\left(ctg\frac{\pi}{9}\right) = -\left[\frac{\pi}{2} - arcctg\left(ctg\frac{\pi}{9}\right)\right] =$

$= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9} = -\frac{7}{18}\pi$. Тоді задане комплексне число запишеться у вигляді $z = \cos\left(-\frac{7\pi}{18}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{18}\right) = \cos\frac{7\pi}{18} - i\sin\frac{7\pi}{18}$.

Зауваження. Неважко бачити, що якщо обрати головне значення аргументу $0 \le \arg z < 2\pi$, то тоді $\arg z = 2\pi - \frac{7\pi}{18} = \frac{29\pi}{18}$, отже, задане комплексне число буде мати вигляд $z = \cos\frac{29\pi}{18} + i\sin\frac{29\pi}{18}$. Безпосередньо за формулою (1.8) маємо те ж саме значення:

$$\arg z = 2\pi - arctg\left|-ctg\frac{\pi}{9}\right| = 2\pi - \left[\frac{\pi}{2} - arcctg\left(ctg\frac{\pi}{9}\right)\right] = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{9} = \frac{29\pi}{18}.$$

<u>Приклад 1.8.</u> Обчислити $\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{39}\right]$.

Розв'язання. Позначимо $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 + i$ і запишемо обидва числа у тригонометричній формі. Попередньо знайдемо модуль і аргумент кожного з чисел: $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$, $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$, $\arg z_2 = arctg\,1 = \frac{\pi}{4}$. Отже, за формулою (1.11),

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$. Тоді за формулою Муавра отримуємо $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39} = \left(\sqrt{2}\right)^{39} \cdot \left(\cos\frac{195\pi}{12} - i\sin\frac{195\pi}{12}\right)$.

Користуючись періодичністю синуса і косинуса, можемо записати

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39} = \sqrt{2^{39}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2^{39}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{19}(1-i)$. Отже, маємо

$$\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{39}\right] = 2^{19} = 524\,288.$$

1.7. Показникова форма комплексного числа

З *формули Ейлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (1.14)$$

і тригонометричного подання (1.9) випливає ***показникова форма*** запису комплексного числа

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} \quad (\varphi = \arg z). \qquad (1.15)$$

Якщо $z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \qquad (1.16)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (z_2 \neq 0), \qquad (1.17)$$

причому формула (1.16) має місце для будь-якого скінченного числа співмножників.

Формули Муавра (1.12) і ***добування коренів*** n***-го степеня з*** z (1.13) набувають відповідного вигляду

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}, \qquad (1.18)$$

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \qquad (1.19)$$

а зроблені раніше зауваження відносно цих формул залишаються чинними.

<u>Приклад 1.9.</u> Знайти всі значення коренів $\sqrt[4]{-1 + i\sqrt{3}}$ у показниковій формі і записати їх у тригонометричній та алгебраїчній формах.

Розв'язання. Знайдемо модуль і аргумент підкореневого числа $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Оскільки $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\dfrac{y}{x} = -\sqrt{3}$, $x < 0$, $y > 0$, то за формулою (1.7) $\arg z = \pi + arctg\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$. Тоді $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ і за формулою (1.19) отримаємо 4 значення коренів:

$$w_0 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{4}} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} + i),$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\cdot(-1+i\sqrt{3}),$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{7\pi}{6}} = \sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\cdot(-\sqrt{3}-i),$$

$$w_3 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\cdot(1-i\sqrt{3}).$$

Усі корені комплексні і ніякі два з них не є спряженими; усі вони розташовані на колі радіуса $\sqrt[4]{2}$ з центром в початку координат і поділяють це коло на 4 рівних частини (рис. 1.8).

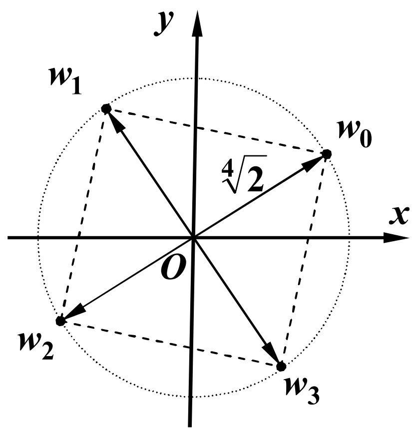

Рис. 1.8

Приклад 1.10. Розв’язати рівняння $4z^2+4(2-i)z+4-i(4+\sqrt{3})=0$.

Розв’язання. $D=16(2-i)^2-16\cdot[4-i(4+\sqrt{3})]=16\cdot(4-4i-1-4+4i+$ $+i\sqrt{3})=16\cdot(-1+i\sqrt{3})$. Тут, на відміну від приклада 1.4, для добування кореня з дискримінанту доведеться застосувати формулу Муавра. Оскільки $-1+i\sqrt{3}=2\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, то $\sqrt{D}=\sqrt{16\cdot 2\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}=$

$=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$ (беремо тільки одне значення $k=0$ або

$k=1$, оскільки корені протилежні за знаком). Візьмемо, наприклад, $k=0$ і отримаємо:

$\sqrt{D}=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$. Тоді $z_{1,2}=\dfrac{-4(2-i)\pm 2\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})}{8}$.

Отже, $z_1=\dfrac{1}{4}\left[\sqrt{2}-4+i(2+\sqrt{6})\right]$, $z_2=-\dfrac{1}{4}\left[\sqrt{2}+4+i(2-\sqrt{6})\right]$.

ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 1

Обчислити:

1.1. $(1+2i)(2-i)+(1-2i)(2+i)$.

1.2. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

1.3. $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.

1.4. $\left(\dfrac{i^{1621}+2}{i^{579}+1}\right)^2$.

1.5. Записати у тригонометричній та показниковій формах комплексне число

$$z=\frac{(1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^6}.$$

Розв’язати рівняння:

1.6. $|z|-z=1+2i$.

1.7. $|z|^2-2iz+2i=0$.

1.8. Знайти всі значення коренів:

а) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$; б) $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$; в) $\sqrt[5]{-2+2i}$.

Розв’язати рівняння:

1.9. $4z^2-2z+1=0$.

1.10. $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$.

1.11. $z^3+2-2i=0$.

1.12. $z^6-4z^3+8=0$.

2. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

2.1. Нескінченно віддалена точка. Розширена комплексна площина

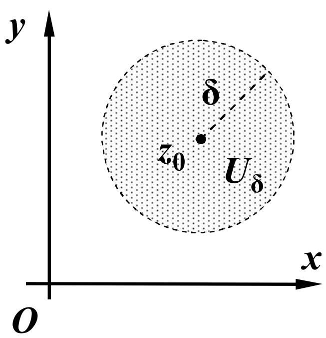

Рис. 2.1

Проколеним **δ*-околом*** U_δ *скінченної* точки z_0 називається множина точок z, що задовольняють умову $0 < |z - z_0| < \delta$ $(\delta > 0)$. З геометричної точки зору це – *внутрішність* круга радіуса δ з центром в точці z_0, *за виключенням* самої точки z_0 (рис. 2.1).

Розглянемо сферу одиничного діаметра, яка дотикається до комплексної площини у початку декартової прямокутної системи координат $Oxyz$ (рис. 2.2). Точку дотика на сфері назвемо *південним* полюсом S, а діаметрально протилежну їй – північним полюсом N. Ця сфера називається ***числовою сферою Рімана***.

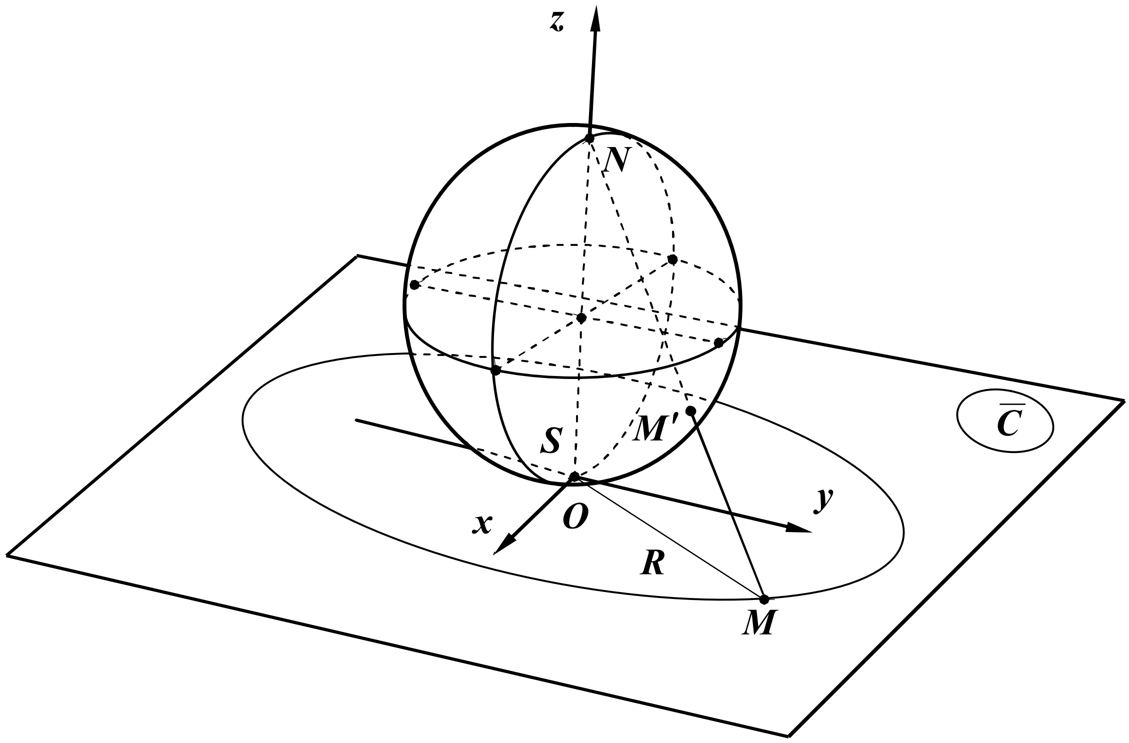

Рис. 2.2

Нехай довільне комплексне число z зображується точкою M. Точку перетину M' відрізка NM зі сферою називають ***сферичним зображенням*** числа z або його ***стереографічною проекцією*** на сферу. Стереографічна проекція встановлює взаємно-однозначну відповідність між комплексною площиною і одиничною сферою з виколеним північним полюсом. При стереографічній проекції кола переходять у кола, кут між перетинними кривими на площині дорівнює куту між образами цих кривих на сфері Рімана [21].

Щоб розповсюдити цю відповідність на усю сферу, на площині вводять так звану ***нескінченно віддалену точку***, яка умовно зображує *невласне* комплексне число $z=\infty$ (його модуль дорівнює $+\infty$, а аргумент не визначений). При цьому вважають, що точка $z=\infty$ відповідає північному полюсу N сфери. Внаслідок цього, зокрема, стереографічні проекції прямих на площині являють собою кола на сфері, які проходять через північний полюс.

Комплексну площину з приєднаною до неї нескінченно віддаленою точкою називають ***розширеною*** (або ***замкненою***) ***комплексною площиною*** $\overline{\mathbb{C}}$, в той час як площину $\mathbb{C}$, що розглядалася раніше, називають ***відкритою***.

Під *стереографічною проекцією* ***R*-*окола*** нескінченно віддаленої точки розуміють поверхню кульового сегмента з центром у північному полюсі. На площині йому відповідає сукупність точок z, які становлять *зовнішність* деякого круга радіуса R з центром у початку координат (рис. 2.2). Тому ***околом нескінченно віддаленої точки*** називають множину точок $z\in\mathbb{C}$, які задовольняють нерівність $|z|>R$, *з приєднанням самої точки* $z=\infty$.

2.2. Лінії та області на комплексній площині

Кожна крива L на площині може бути задана рівнянням $F(z)=0$ або $F(x,y)=0$.

Приклад 2.1. Яка крива визначається рівнянням
$$\mathrm{Re}(1+z)=|z|\ ?$$

Розв'язання. Оскільки $z=x+iy$, то $\mathrm{Re}(1+z)=1+x$. Тоді $1+x=\sqrt{x^2+y^2}$, звідки $1+2x+x^2=x^2+y^2$ або $y^2=1+2x$. Отже, задане рівняння визначає *параболу*.

Крива L на площині також може бути задана параметричними рівняннями
$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ \tau_1\le t\le\tau_2, \qquad (2.1)$$
де $x(t)$ й $y(t)$ – дійсні функції дійсної змінної t. Оскільки кожна точка (x,y) площини зображує комплексне число $z=x+iy$, то рівняння (2.1) можуть бути

подані у вигляді

$$z(t) = x(t) + i\,y(t), \quad \tau_1 \le t \le \tau_2 . \qquad (2.2)$$

У цьому випадку говорять, що крива L задана у *комплексно-параметричній* формі (2.2). Точка $a = z(\tau_1)$ називається ***початком*** або ***початковою точкою кривої*** L, а точка $b = z(\tau_2)$ – її ***кінцем*** або ***кінцевою точкою***. При цьому, якщо $z_1 = z(t_1)$ й $z_2 = z(t_2)$, де $\tau_1 \le t_1 < t_2 \le \tau_2$, то говорять, що точка z_2 кривої L *іде слідом* за точкою z_1 або, що те ж саме, точка z_1 *передує* точці z_2. Отже, *крива* L *є впорядкованою множиною точок комплексної площини* і завжди вважається орієнтованою в напрямку зростання параметра t. Напрямок руху точки z вздовж кривої L, який відповідає *зростанню* параметра t, називається ***додатним***. Зауважимо, що *протилежно орієнтована крива позначається* L^{-} і має рівняння $z(-t) = x(-t) + i\,y(-t), \quad -\tau_2 \le t \le -\tau_1$.

Якщо функції $x(t)$ й $y(t)$ *обидві неперервні* на $[\tau_1, \tau_2]$, то криву L називають ***неперервною*** або ***жордановою (кривою Жордана)*** за ім'ям французького математика Каміля Жордана (1838-1922). ***Простою кривою*** або ***простою дугою*** називається крива Жордана, яка не має *кратних* точок, зокрема, *точок самоперетину*. Це означає, що *усі* точки такої кривої *різні*, окрім, можливо, початкової і кінцевої, тобто

$$\forall t_i, t_k \in (\tau_1, \tau_2), \quad t_i \ne t_k : \quad z(t_i) \ne z(t_k) .$$

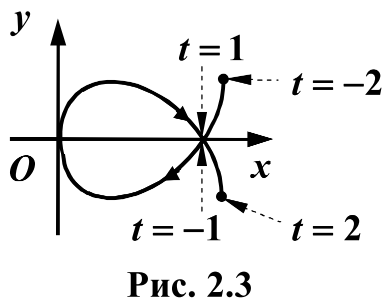

Рис. 2.3

Якщо $z(\tau_1) = z(\tau_2)$, тобто початкова і кінцева точки кривої співпадають, то таку криву називають ***замкненою***. На рис. 2.3 зображена крива $z(t) = at^2 + i(t - t^3)$ ($a > 0$), яка на відрізку $[-1, 1]$ є простою замкненою, а на відрізку $[-2, 2]$ вона незамкнена і не є простою, оскільки утворює петлю (самоперетинається у точці $(a, 0)$). При цьому точки $z_1 = z(1)$ й $z_2 = z(-1)$ є *різними* точками *на даній кривій*, хоча як точки площини вони співпадають: $z_1 = z_2 = a$.

Якщо функції $x(t)$ й $y(t)$ мають на $[\tau_1, \tau_2]$ *неперервні похідні* $\dot{x}(t)$ й $\dot{y}(t)$, які *одночасно* не перетворюються на нуль, тобто $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \ne 0 \quad \forall t \in [\tau_1, \tau_2]$, то відповідна крива називається ***гладкою*** на $[\tau_1, \tau_2]$. Це означає, що функція $z(t)$ на вказаному відрізку має неперервну похідну $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\,\dot{y}(t)$ й $\dot{z}(t) \ne 0$, причому *для замкненої* кривої повинна виконуватися рівність $\dot{z}(\tau_1) = \dot{z}(\tau_2)$. Дуга такої кривої не має ані кутових точок, ані точок загострення, дотична до неї змінюється неперервно. Наприклад, еліпс і коло є простими гладкими замкненими кривими, а крива, що зображена на рис. 2.3, на відрізку $[-2, 2]$ – гладка незамкнена і не є простою (див. вище). ***Надалі будемо розглядати лише прості гладкі криві, замкнені або незамкнені***.

Частина кривої L від точки $z_1 = z(t_1)$ до точки $z_2 = z(t_2)$, де $t_1,\ t_2 \in [\tau_1, \tau_2]$, називається ***дугою*** цієї кривої. Крива, що складається зі скінченного числа скінченних гладких дуг, називається ***кусково-гладкою***. Рівняння такої кривої можна записати у вигляді (2.2), але із застереженням, що на відрізку $[\tau_1, \tau_2]$ функції $x(t)$ та $y(t)$ повинні бути *неперервними* й *кусково-неперервно диференційовними* і також $\dot{z}(t) \neq 0$.

Крива L називається ***необмеженою***, якщо функція $z(t)$ неперервна й $\lim\limits_{t \to +\infty} z(t) = \infty$. Рівняння цієї кривої записується у вигляді $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\tau_1 \le t < +\infty$. Необмежена крива називається *кусково-гладкою*, якщо крива $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\tau_1 \le t \le B$ є кусково-гладкою для кожного скінченного $B > \tau_1$. Аналогічно визначаються необмежені криві, коли $t \to -\infty$ або $t \to \infty$.

<u>Приклад 2.2.</u> Визначити вигляд кривої, заданої рівнянням

$$z(t) = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1),\ t \in (-\infty, \infty).$$

Розв'язання. Оскільки крива задана в комплексно-параметричній формі, то її параметричні рівняння є $x(t) = t^2 + 2t + 5$, $y(t) = t^2 + 2t + 1$, $t \in (-\infty, \infty)$. Виключаючи параметр t з цих рівнянь, отримуємо рівняння $x = y + 4$ або $x - y - 4 = 0$, яке визначає пряму на площині. Далі, оскільки $x(t) = t^2 + 2t + 5 =$ $= (t+1)^2 + 4 \ge 4$, $y(t) = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 \ge 0$, то вихідне рівняння визначає відрізок прямої $x - y - 4 = 0$, що лежить у першій чверті ($x \ge 4$, $y \ge 0$).

<u>Приклад 2.3.</u> Визначити вигляд кривої, заданої рівнянням

$$z(t) = -2e^{it} + e^{-it},\ t \in (-\infty, \infty).$$

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння: $z(t) = -2(\cos t + i\sin t) +$ $+ (\cos t - i\sin t)$. Отже, параметричні рівняння кривої є $x(t) = -\cos t$, $y(t) = -3\sin t$, $t \in (-\infty, \infty)$. Виключаючи параметр t з цих рівнянь, отримуємо рівняння $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$, яке визначає еліпс.

Відкритою областю (або просто ***областю***) розширеної комплексної площини називається *зв'язна відкрита множина* D точок цієї площини, тобто таких, що: 1) будь-які дві точки $a, b \in D$ (рис. 2.4) можна з'єднати деякою неперервною лінією L, *усі* точки якої належать D (*властивість зв'язності*); 2) якщо $c \in D$, то існує $\delta-$окіл цієї точки, який *цілком* належить D (*властивість відкритості*).

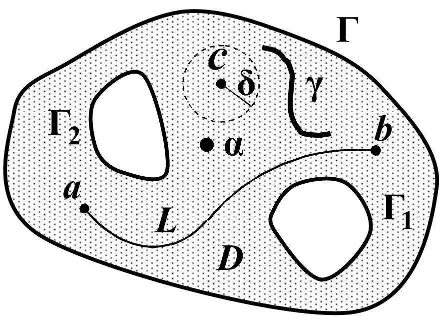

Рис. 2.4

Межовою точкою області D називають точку, яка *сама не належить* D, але у *будь-якому* як завгодно малому її $\delta-$околі завжди містяться як точки цієї області, так і точки, що до неї не належать. Сукупність Γ усіх межових точок області D утворює ***межу*** цієї області. Область D з приєднаною до неї межею Γ називається ***замкненою областю*** і позначається символом $\overline{D}$, тобто $\overline{D}=D\bigcup\Gamma$.

У подальшому завжди будемо розглядати лише такі області, межі яких складаються зі скінченного числа кусково-гладких кривих (замкнених або незамкнених) і ізольованих точок. На рис. 2.4 межу області D складають три замкнені лінії Γ, Γ_1 і Γ_2, один розріз γ і одна ізольована точка α.

Область D називається ***обмеженою***, якщо вона цілком належить деякому *скінченному* кругу $|z|<R$. Якщо область обмежена, то ***порядком зв'язності*** цієї області називають число частин, з яких складається її межа, при умові, що усі вони є жордановими кривими і не мають спільних точок. На рис. 2.4 зображена п'ятизв'язна область. Поняття порядку зв'язності поширюється і на необмежені області.

Область D називається ***однозв'язною***, якщо для будь-якої *замкненої* лінії L, що *цілком* належить D, область G, яка *ззовні* обмежена L, також *цілком належить* D (рис. 2.5). Інакше кажучи, однозв'язна область може мати розрізи по краях, але вона не має "дірок", хоча б навіть і точкових. Отже, усяка *довільна* замкнена лінія L, що цілком належить однозв'язній області, шляхом неперервної деформації може бути стягнена у точку, яка також належить цій області (рис. 2.6). Вочевидь, межею *обмеженої однозв'язної* області є *єдина* замкнена лінія.

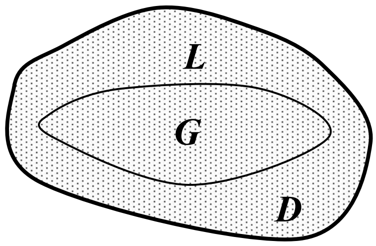

Рис. 2.5

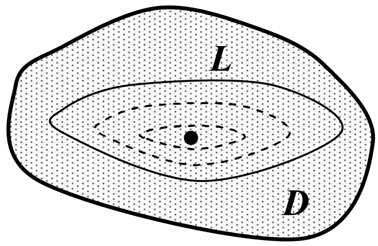

Рис. 2.6

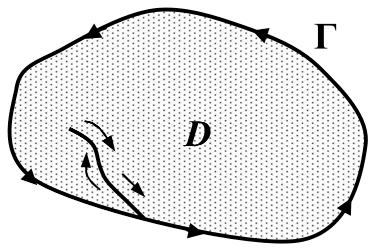

Рис. 2.7

Замкненим контуром будемо називати кусочно-гладку замкнену лінію. ***Напрямком обходу*** або ***орієнтацією*** контура називається зазначення порядку проходження його точок. Обхід контура починається з довільної точки, його напрямок графічно позначають стрілкою. ***Додатним напрямком*** обходу контура вважається такий, при якому область, що *ззовні* обмежена цим контуром, під час обходу залишається *зліва*. *Додатно орієнтований* контур будемо позначати верхнім індексом ”+”, наприклад, $\boldsymbol{L}^{+}$ або $\boldsymbol{\Gamma}^{+}$ (*за умовчанням* $\boldsymbol{L}$ або $\boldsymbol{\Gamma}$). Природно, *протилежний* напрямок обходу контура вважається ***від'ємним***. Будемо позначати такий контур індексом ”–”: $\boldsymbol{L}^{-}$ або $\boldsymbol{\Gamma}^{-}$. На рис. 2.7 показаний обхід у додатному напрямку межі $\boldsymbol{\Gamma}$ *однозв'язної* області $\boldsymbol{D}$.

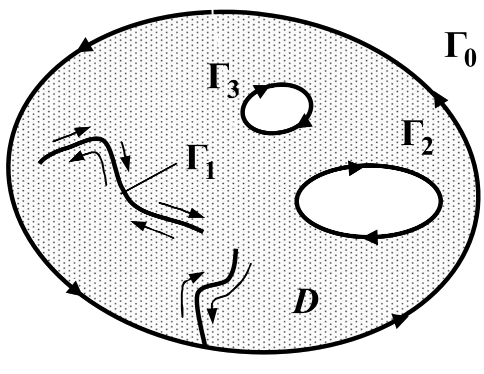

Рис. 2.8

У випадку *многозв'язної* області її повна межа складається з декількох контурів: зовнішнього $\boldsymbol{\Gamma}_0$ і внутрішніх $\boldsymbol{\Gamma}_1$, $\boldsymbol{\Gamma}_2$, . . . , $\boldsymbol{\Gamma}_n$. При *додатному* напрямку обходу *повної* межі *зовнішній* контур обходиться *проти ходу годинникової стрілки*, а усі *внутрішні* – *за ходом стрілки*. Розрізи, як внутрішні, так і ті, що є частинами зовнішнього контура, мають два береги і проходяться двічі у протилежних напрямках (при русі вздовж кожного з берегів область повинна залишатися *зліва*). Такий обхід повної межі чотиризв'язної області показаний на рис. 2.8.

У подальшому завжди будемо вважати, що усі межові криві області D орієнтовані таким чином, що при русі точки вздовж даної межової кривої у напрямку цієї орієнтації область D залишається зліва.

<u>Приклад 2.4.</u> З'ясувати, яка область визначається умовою

$$|z-2|-|z+2|<2.$$

Розв'язання. Перетворимо задану нерівність:

$$|x+iy-2|-|x+iy+2|<2,$$

$$|(x-2)+iy|-|(x+2)+iy|<2,$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}<2,$$

$$(x-2)^2+y^2<4+4\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2,$$

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}>-2x-1.$$

З останньої нерівності випливає система

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2x-1\ge 0, \\ (x+2)^2+y^2>4x^2+4x+1, \end{cases} \\ \begin{cases} -2x-1<0, \\ (x+2)^2+y^2\ge 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

отже,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le -\dfrac{1}{2}, \\ x^2-\dfrac{y^2}{3}<1, \end{cases} \\ \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2}, \\ (x+2)^2+y^2\ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

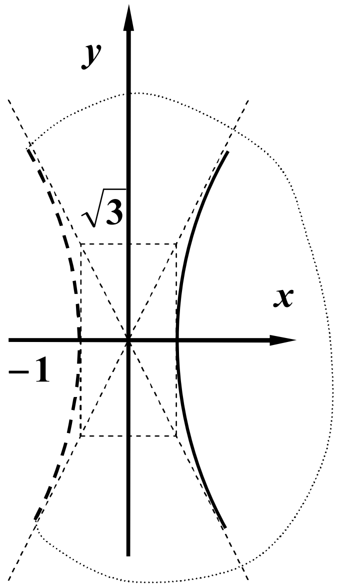

Рис. 2.9

Таким чином, задана нерівність визначає частину площини, що розташована *праворуч* лівої вітки гіперболи $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$, не включаючи цю вітку (рис. 2.9).

2.3. Поняття функції комплексної змінної та його геометричний зміст

Комплексною функцією f комплексної змінної z називається закон (або правило), за яким кожному значенню змінної z з множини D розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$ ставиться у відповідність одне (***однозначна функція***) або декілька (***многозначна функція***) значень змінної w з множини E розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{W}}$. Множина D називається ***множиною визначення***, а множина E – ***множиною значень*** функції f.

Зауваження. Множини $\boldsymbol{D}$ й $\boldsymbol{E}$ можуть бути дуже складними та різноманітними за структурою. Ми надалі будемо розглядати лише випадок, коли ці множини є *областями*. Зауважимо також, що загальноприйнятий символічний запис функціональної залежності $w = f(z)$ насправді виражає *значення* функції f в точці z.

Однозначна функція f називається ***взаємно-однозначною*** або ***однолистою*** в області $\boldsymbol{D}$, якщо в різних точках цієї області вона приймає різні значення.

З геометричної точки зору функція $w = f(z)$ визначає ***відображення*** області $\boldsymbol{D}$ однієї комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$ на деяку множину $\boldsymbol{E}$ іншої площини $\overline{\mathbb{W}}$. Іноді вважають, що $\overline{\mathbb{C}}$ і $\overline{\mathbb{W}}$ – це одна й та сама комплексна площина. Тоді функція $w = f(z)$ *переміщує* точки цієї площини з положення z в положення w. Точки z^*, такі, що $f(z^*) = z^*$, називаються ***нерухомими точками*** відображення $w = f(z)$. Говорять, що w – ***образ*** точки z, а точка z – ***прообраз*** точки w при відображенні $w = f(z)$. Точка w може мати декілька (навіть нескінченно багато) прообразів. Тому поведінку функції комплексної змінної не можна проілюструвати за допомогою графіка у декартовій системі координат. Геометричні властивості функції можна виявити лише при дослідженні відображення заданої лінії або області.

Якщо ж, навпаки, кожній точці $w \in \boldsymbol{E}$ за правилом f^{-1} ставиться у відповідність одна або декілька точок $z \in \boldsymbol{D}$, які функцією f відображуються в точку w, то це означає, що в області $\boldsymbol{E}$ задана однозначна або многозначна функція $z = f^{-1}(w)$, яка називається ***оберненою*** до функції $w = f(z)$ (рис. 2.10). Відображення f буде однолистим тоді і тільки тоді, коли *обидві* функції f і f^{-1} *однозначні*. У цьому випадку також говорять, що між областями $\boldsymbol{D}$ і $\boldsymbol{E}$ встановлена *взаємно-однозначна відповідність*.

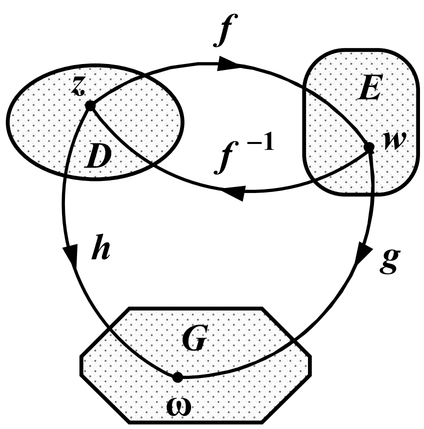

Рис. 2.10

Нехай функція $w = f(z)$ відображує область $\boldsymbol{D}$ на область $\boldsymbol{E}$, а функція $\omega = g(w)$ відображує $\boldsymbol{E}$ на $\boldsymbol{G}$. Функція $\omega = h(z) = g[f(z)]$, що відображує $\boldsymbol{D}$

на G, називається ***складеною функцією***, утвореною f та g, а відповідне відображення h – ***суперпозицією*** відображень f та g (рис. 2.10). Зокрема, якщо відображення f є однолистим, то $f^{-1}[f(z)] = z$.

Оскільки $w = u + iv = f(z) = f(x+iy)$, то кожній парі (x, y) дійсних чисел x і y, такій, що $x + iy \in D$, за правилом f ставиться у відповідність пара також дійсних чисел (u, v), така, що $u + iv \in E$. Це означає, що u і v є *дійсними функціями* дійсних змінних x і y, отже функція $w = f(z)$ може бути записана у вигляді

$$w = u(x, y) + iv(x, y). \qquad \textbf{(2.3)}$$

Функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$, визначені в області D, називаються відповідно ***дійсною*** і ***уявною частинами*** комплексної функції $w = f(z)$ і позначаються $u = \mathrm{Re}\, f(z)$, $v = \mathrm{Im}\, f(z)$.

Модулем функції $w = f(z)$ називається невід'ємна функція $\varphi(x, y)$, така, що

$$|w| = |f(z)| = \sqrt{[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2} = \varphi(x, y). \qquad \textbf{(2.4)}$$

Відповідна *поверхня* $|w| = \varphi(x, y)$ називається ***поверхнею модуля*** або ***рельєфом*** функції $w = f(z)$.

<u>Приклад 2.5.</u> Знайти образ точки $z_0 = 1 - i$ при відображенні $w = (z - i)^2$.

Розв'язання. $w = (1 - 2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = -3 - 4i$.

<u>Приклад 2.6.</u> Знайти дійсну та уявну частини функції $w = \bar{z} - iz^2$.

Розв'язання. Оскільки $z = x + iy$, то

$$w = x - iy - i(x+iy)^2 = x - iy - ix^2 - 2i^2xy - i^3y^2 = x + 2xy + i(y^2 - y - x^2).$$

Отже, $u(x, y) = x + 2xy$, $v(x, y) = y^2 - y - x^2$.

Нехай на площині $\mathbb{C}$ крива L задана рівнянням $F(x, y) = 0$. Для того, щоб знайти рівняння образу $\Phi(u, v) = 0$ цієї кривої на площині $\mathbb{W}$ при відображенні за допомогою функції $w = f(z) = u + iv$, треба виключити x й y з рівнянь

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad F(x, y) = 0.$$

<u>Приклад 2.7.</u> Визначити функцію $w = f(z)$ за відомими дійсною та уявною частинами: $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2y - 1$, $v(x, y) = 2xy + 2x$.

Розв'язання. Скористаємось формулами

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}).$$

Тоді

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(z + \bar{z})^2 + \frac{1}{4}(z - \bar{z})^2 + i(z - \bar{z}) - 1 = \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2) + i(z - \bar{z}) - 1,$$

$$v(x, y) = 2 \cdot \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \cdot \left[-\frac{i}{2}(z - \bar{z}) \right] + z + \bar{z} = z + \bar{z} - i\frac{z^2 - \bar{z}^2}{2}.$$

Отже,

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) = \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2) + i(z - \bar{z}) - 1 + iz + i\bar{z} + \frac{1}{2}(z^2 - \bar{z}^2) =$$

$$= z^2 + 2iz - 1.$$

<u>Приклад 2.8.</u> З'ясувати, в яку криву відображується за допомогою функції $w = \frac{1}{z}$ коло $|z| = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Оскільки за умовою $|z| = \frac{1}{2}$, то $|w| = \frac{1}{|z|} = 2$ або $u^2 + v^2 = 4$.

Отже, образом кола $|z| = \frac{1}{2}$ на площині $\mathbb{C}$ є коло $|w| = 2$ на площині $\mathbb{W}$, що проходиться за ходом годинникової стрілки.

Якщо крива L задана параметричними рівняннями (2.1) або в комплексно-параметричній формі (2.2), то параметричні рівняння її образу при відображенні $w = f(z) = u + iv$ будуть мати вигляд

$$u = u\,[x(t), y(t)] = U(t), \quad v = v\,[x(t), y(t)] = V(t).$$

<u>Приклад 2.9.</u> Знайти образ кола $z(t) = R\cos t + iR\sin t \quad (0 \le t < 2\pi)$ при відображенні $w = \frac{z}{\bar{z}}$.

Розв'язання. Оскільки $w = u + iv = \frac{z^2}{\bar{z}z} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\frac{2xy}{x^2 + y^2}$, то $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$,

$v = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$. З заданого рівняння випливає, що $x = R\cos t$, $y = R\sin t$. Підставимо їх у вирази u і v і отримаємо параметричні рівняння образу кола $u = \cos 2t$, $v = \sin 2t$, звідки $u^2 + v^2 = 1$. отже, образом є одиничне коло, що проходиться двічі, оскільки $0 \le t < 2\pi$.

Приклад 2.10. Знайти нерухомі точки відображення $w = z^2 + 5z + 5$.

Розв'язання. Нерухомі точки заданого відображення є корені рівняння $z^2 + 5z + 5 = z$ або $z^2 + 4z + 5 = 0$, звідки $z_{1,2} = -2 \pm i$.

2.4. Основні елементарні функції комплексної змінної

1. Ціла раціональна функція (многочлен)

$$w = P_n(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \dots + p_{n-1} z + p_n, \qquad \textbf{(2.5)}$$

де p_i $(i = \overline{1, n})$ – комплексні коефіцієнти, $p_0 \ne 0$. Усякий многочлен можна подати у вигляді $P_n(z) = p_0 (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}$, де $z_1, z_2, \dots, z_m$ – корені многочлена із кратностями $k_1, k_2, \dots, k_m$ відповідно, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ (***теорема Гаусса*** або ***основна теорема алгебри***).

2. Дробово-лінійна функція

$$w = \frac{az + b}{cz + d}. \qquad \textbf{(2.6)}$$

3. Дробово-раціональна функція

$$w = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \qquad \textbf{(2.7)}$$

де $P_n(z)$ і $Q_m(z)$ – многочлени степенів n і m відповідно. Функція визначена для усіх z, таких, що $Q_m(z) \ne 0$.

4. Показникова функція e^z.

Оскільки $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, то, після застосування до e^{iy} формули Ейлера (1.14), отримаємо

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \qquad \textbf{(2.8)}$$

Вочевидь, $\mathrm{Re}\, e^z = e^x \cos y$, $\mathrm{Im}\, e^z = e^x \sin y$, $e^z \ne 0$, оскільки $\left| e^z \right| = e^x > 0$.

Функція $w = e^z$ визначена на усій комплексній площині і на дійсній осі співпадає з відповідною функцією дійсної змінної. Крім того, вона має звичайні властивості показникової функції

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad e^{z_1-z_2} = e^{z_1}/e^{z_2}, \quad (e^z)^n = e^{nz}$$

і є періодичною з чисто уявним періодом $T = 2\pi i$, тобто $e^{z+2\pi ki} = e^z$ ($k \in \mathbb{Z}$). Звідси випливає, що e^z *не є однолистою* в усій комплексній площині.

5. Логарифмічна функція $\mathbf{Ln}\, z$, де $z \neq 0$, визначається як функція, обернена показниковій (тобто $e^{Lnz} = z$), причому

$$\mathbf{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) \quad (k \in \mathbb{Z}), \qquad \textbf{(2.9)}$$

де $\arg z$ – головне значення аргументу z.

Функція $\mathbf{Ln}\, z$ є многозначною. При $k = 0$ отримуємо її ***головне значення*** або ***головну вітку***

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z,$$

отже,

$$\mathbf{Ln}\, z = \ln z + 2\pi ki \quad (k \in \mathbb{Z}). \qquad \textbf{(2.10)}$$

Справедливі співвідношення: $\mathbf{Ln}(z_1 z_2) = \mathbf{Ln}\, z_1 + \mathbf{Ln}\, z_2$,

$$\mathbf{Ln}(z_1/z_2) = \mathbf{Ln}\, z_1 - \mathbf{Ln}\, z_2.$$

<u>Приклад 2.11.</u> Подати у алгебраїчній формі і обчислити $\mathbf{Ln}(15 + 8i)$.

Розв'язання. Знайдемо модуль і головне значення аргументу числа $z = 15 + 8i$: $|z| = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$, $\arg z = arctg\dfrac{8}{15}$. Тоді з подання (2.10) маємо

$$\mathbf{Ln}(15 + 8i) = \ln 17 + i\left(arctg\frac{8}{15} + 2\pi k\right) \approx 2{,}833 + i\left(0{,}49 + 2\pi k\right) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

6. Загальна показникова функція $w = a^z$, де $a \neq 0$ – будь-яке комплексне число, визначається рівністю

$$a^z = e^{zLna}. \qquad \textbf{(2.11)}$$

Це многозначна функція, головне значення якої дорівнює $a^z = e^{z\ln a}$.

7. Загальна степенева функція $w = z^a$, де a – будь-яке комплексне число, визначається рівністю

$$z^a = e^{aLnz}. \qquad \textbf{(2.12)}$$

Це многозначна функція, головне значення якої дорівнює $z^a = e^{a\ln z}$.

Зауваження. Степінь з *довільним* показником, взагалі кажучи, не підкоряється звичайним правилам додавання і множення показників, тобто

$$z^{a_1} z^{a_2} = e^{a_1 Lnz} e^{a_2 Lnz} = e^{a_1 Lnz + a_2 Lnz} \neq e^{(a_1+a_2)Lnz} = z^{a_1+a_2}$$

й

$$(z^{a_1})^{a_2} = (e^{a_1 Lnz})^{a_2} = e^{a_2[a_1(Lnz+2k\pi i)]} \neq e^{a_2 a_1 Lnz}.$$

8. Тригонометричні функції комплексної змінної визначаються рівностями

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \qquad (2.13)$$

Вкажемо деякі їх ***властивості***:

1) На дійсній осі усі вони співпадають з відповідними функціями дійсної змінної.
2) Основні тригонометричні співвідношення залишаються справедливими.
3) $\sin z$ – непарна функція, а $\cos z$ – парна.
4) $\sin z$ і $\cos z$ – періодичні функції з дійсним основним періодом $T = 2\pi$, $\operatorname{tg} z$ і $\operatorname{ctg} z$ – періодичні функції з дійсним основним періодом $T = \pi$.
5) На відміну від функцій $\sin x$ і $\cos x$ дійсної змінної, $\sin z$ і $\cos z$ *можуть* приймати *будь-які* значення, зокрема, такі, що за модулем перевищують одиницю.

Приклад 2.12. Подати у алгебраїчній формі число $\sin\left(\frac{\pi}{3}+4i\right)$.

Розв'язання. За тригонометричною формулою синуса суми

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+4i\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos(4i) + \cos\frac{\pi}{3}\sin(4i) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3}\cos(4i) + \sin(4i)\right].$$

З формул (2.13) при $z = 4i$ маємо $\cos 4i = \dfrac{e^4+e^{-4}}{2}$, $\sin 4i = \dfrac{e^{-4}-e^4}{2i}$, отже,

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+4i\right) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3}\frac{e^4+e^{-4}}{2} + \frac{e^{-4}-e^4}{2i}\right] = \sqrt{3}\frac{e^4+e^{-4}}{4} + i\frac{e^4-e^{-4}}{4}.$$

9. Гіперболічні функції комплексної змінної визначаються рівностями

$$shz = \frac{e^z-e^{-z}}{2}, \quad chz = \frac{e^z+e^{-z}}{2}, \quad thz = \frac{shz}{chz}, \quad cthz = \frac{chz}{shz}. \qquad (2.14)$$

Функції shz і chz – періодичні, з уявним основним періодом $T = 2\pi i$, а функції tgz і $ctgz$ – періодичні, з уявним основним періодом $T = \pi i$.

Тригонометричні і гіперболічні функції зв'язані між собою наступними співвідношеннями:

$$sh\,z = -i\sin iz\,, \quad ch\,z = \cos iz\,, \quad th\,z = -i\,tg\,iz\,, \quad cth\,z = i\,ctg\,iz \qquad (2.15)$$

або

$$\sin z = -i\,sh\,iz\,, \; \cos z = ch\,iz\,, \; tg\,z = -i\,th\,iz\,, \; ctg\,z = i\,cth\,iz\,. \qquad (2.16)$$

На підставі цих співвідношень і формул тригонометрії неважко довести, що

$$\sin z = \sin x \cdot chy + i\cos x \cdot shy, \quad \cos z = \cos x \cdot chy - i\sin x \cdot shy,$$

$$shz = shx \cdot \cos y + i\,chx \cdot \sin y, \quad chz = chx \cdot \cos y + i\,shx \cdot \sin y,$$

$$tgz = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + ch2y} + i\frac{sh2y}{\cos 2x + ch2y}, \quad ctgz = \frac{\sin 2x}{ch2y - \cos 2x} - i\frac{sh2y}{ch2y - \cos 2x}.$$

10. Обернені тригонометричні і гіперболічні функції є многозначними і виражаються наступними формулами

$$Arc\sin z = \frac{\pi}{2} - iLn\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \quad Arc\cos z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$Arctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{i - z}{i + z}, \quad Arcctgz = \frac{i}{2}Ln\frac{z - i}{z + i},$$

$$Arsh\,z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right), \quad Arch\,z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \qquad (2.17)$$

$$Arth\,z = \frac{1}{2}Ln\frac{1 + z}{1 - z}, \quad Arcth\,z = \frac{1}{2}Ln\frac{z + 1}{z - 1},$$

де $\sqrt{z^2 - 1}$ розуміється *у алгебраїчному змісті*.

Головні значення цих функцій $\mathbf{arcsin}\,z$, $\mathbf{arccos}\,z$, $\mathbf{arctg}\,z$, $\mathbf{arcctg}\,z$, $\mathbf{arsh}\,z$, $\mathbf{arch}\,z$, $\mathbf{arth}\,z$ і $\mathbf{arcth}\,z$ виражаються тими ж формулами із заміною **Ln** на його головну вітку **ln**.

<u>Приклад 2.13.</u> Розв’язати рівняння $\sin z = 2$.

Розв’язання. Якщо $\sin z = 2$, то $z = Arc\sin 2$. За відповідною формулою (2.17) маємо

$$Arc\sin 2 = \frac{\pi}{2} - iLn\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

(тут перед $\sqrt{3}$, який *розуміється у арифметичному змісті*, ставиться $\pm$).

Скористаємось формулою (2.9), поклавши $|z| = 2 \pm \sqrt{3}$, $\arg z = 0$. Маємо

$$Arc\sin 2 = \frac{\pi}{2} - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2\pi k = \frac{\pi}{2} \pm i\ln\left(2 + \sqrt{3}\right) + 2\pi k \;\; (k \in \mathbb{Z}).$$

Отже, задане рівняння має дві серії коренів, які подаються у вигляді

$$z_1 = \frac{\pi}{2} - i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 2\pi k,\ \ z_2 = \frac{\pi}{2} - i\ln\left(2-\sqrt{3}\right) + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

або у вигляді

$$z_1 = \frac{\pi}{2} + i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 2\pi k,\ \ z_2 = \frac{\pi}{2} - i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Приклад 2.14. Подати у алгебраїчній формі і обчислити $\mathrm{arctg}(2-i)$.

Розв'язання. З відповідної формули (2.17) випливає, що $\mathrm{arctg}z = -\frac{i}{2}\ln\frac{i-z}{i+z}$.

Поклавши $z = 2-i$, отримаємо $\mathrm{arctg}(2-i) = -\frac{i}{2}\ln\frac{i-(2-i)}{i+(2-i)} = -\frac{i}{2}\ln(i-1) =$

$= -\frac{i}{2}\left[\ln|i-1| + i\arg(i-1)\right]$. Оскільки $|i-1| = \sqrt{2}$, а $\arg(i-1) = \frac{3\pi}{4}$, то остаточно маємо $\mathrm{arctg}(2-i) = \frac{3\pi}{8} - i\frac{\ln 2}{4} \approx 1{,}178 - 0{,}173i$.

2.5. Границя функції комплексної змінної

Нехай функція $w = f(z)$ визначена і однозначна в деякому околі точки z_0 окрім, можливо, самої точки z_0. Число A називається ***границею функції $f(z)$ в точці*** z_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$, як завгодно малого, існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для усіх точок z проколеного $\delta-$околу U_δ точки z_0 (тобто таких, що задовольняють нерівність $0 < |z - z_0| < \delta$) виконується нерівність $|f(z) - A| < \varepsilon$. Наявність у функції $f(z)$ границі A в точці z_0 символічно записується у вигляді $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ і означає наступне: для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon-$околу U_A точки A знайдеться такий проколений $\delta-$окіл U_δ точки z_0, що для усіх $z \in U_\delta$ відповідне значення $f(z) \in U_A$. При цьому припускається, що z_0 й A – *скінченні точки* комплексної площини. Підкреслимо, що згідно визначенню функція $f(z)$ прямує до своєї границі *незалежно від способу наближення точки z до z_0*.

Зауваження.

1. В такій формі визначення границі охоплює також випадки $z_0 = \infty$ й (або) $A = \infty$. Під проколеним околом точки $z_0 = \infty$ розуміють, як це було сказано раніше, множину точок z таких, що $|z| > R$.

2. Існування границі $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, де $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ рівносильне існуванню двох границь $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} u(x, y)$ й $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} v(x, y)$, причому

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} u(x, y) + i \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} v(x, y)$.

Справедливі наступні **теореми** (***властивості границь***). Нехай існують *скінченні* границі $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$. Тоді

1) існують і скінченні границі $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z) \pm g(z)]$, причому

$$\lim_{z\to z_0}[f(z) \pm g(z)] = A \pm B;$$

2) існує і скінченна границя $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]$, причому

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)] = A\cdot B;$$

3) якщо $B \neq 0$, існує і скінченна границя $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}$, причому

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}.$$

<u>Приклад 2.15.</u> Обчислити границі

а) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2 - 4iz - 3}{z - i}$; б) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{shiz}$; в) $\lim\limits_{z\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2z}{chiz + ishiz}$; г) $\lim\limits_{z\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{2iz} + 1}{e^{iz} + i}$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2 - 4iz - 3}{z - i} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{z\to i}\dfrac{(z - 3i)(z - i)}{z - i} = \lim\limits_{z\to i}(z - 3i) = i - 3i = -2i$;

б) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{shiz} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{\dfrac{\sin z}{-i}} = -i$;

в) $\lim\limits_{z\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2z}{chiz + ishiz} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{z\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2z}{\cos z - \sin z} = \lim\limits_{z\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{(\cos z + \sin z)(\cos z - \sin z)}{\cos z - \sin z} =$

$= \lim\limits_{z\to \frac{\pi}{4}}(\cos z + \sin z) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$;

г) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{2iz}+1}{e^{iz}-i}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2ie^{2iz}}{ie^{iz}}=2\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}e^{iz}=2(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2})=2i$ (тут ми використали правило Лопіталя).

2.6. Неперервність функції комплексної змінної

1. *Неперервність функції в точці і в області*

Функція $f(z)$, яка визначена в околі точки z_0, в тому числі і в самій цій точці, називається ***неперервною в точці*** z_0, якщо

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0). \tag{2.18}$$

Інакше кажучи, функція $f(z)$ неперервна в точці z_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$, як завгодно малого, можна вказати таке число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що для усіх точок z непроколеного $\delta-$околу U_δ точки z_0 (тобто таких, що задовольняють нерівність $|z-z_0|<\delta$) виконується нерівність $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.

Для того, щоб функція $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ була неперервною в точці $z_0=x_0+iy_0$, необхідно і достатньо, щоб обидві функції $u(x, y)$ й $v(x, y)$ були неперервні в точці (x_0, y_0) за сукупністю змінних x й y.

Функція $w=f(z)$, яка визначена в області D, називається ***неперервною в цій області***, якщо $f(z)$ неперервна в кожній точці області D.

Функція $w=f(z)$ називається ***неперервною в замкненій області*** $\overline{D}$, якщо вона визначена в $\overline{D}$ й для кожної точки $z_0\in\overline{D}$ (включаючи межові точки) виконується рівність (2.18).

Якщо зафіксувати точку z_0 і перейти до іншої точки $z\in D$, то аргумент зміниться на величину

$$\Delta z=z-z_0=x-x_0+i(y-y_0)=\Delta x+i\Delta y, \tag{2.19}$$

яка називається ***приростом аргументу в точці*** z_0. Відповідне змінення функції

$$\Delta w=f(z)-f(z_0)=f(z_0+\Delta z)-f(z_0) \tag{2.20}$$

називається ***приростом функції в точці*** z_0. Отже, неважко довести, що визначення неперервності функції в точці можна надати також у вигляді:

функція $f(z)$ називається ***неперервною в точці*** z_0, якщо вона визначена в *непроколеному* околі цієї точки й $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$.

Відповідні теореми про неперервні функції дійсної змінної залишаються чинними і для функцій комплексної змінної, а саме, сума, різниця і добуток скінченного числа функцій, неперервних у області D, також є функціями, неперервними в цій області, а функція $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ неперервна у тих точках області D, де $g(z) \neq 0$.

Суперпозиція неперервних функцій також є неперервною функцією: якщо функція $w = f(z)$ неперервна в точці z_0, а функція $\omega = g(w)$ неперервна в точці $w_0 = f(z_0)$, то складена функція $\omega = g\,[f(z)]$ неперервна в точці z_0.

2. *Неперервність функції на кривій*

Нехай крива L задана у комплексно-параметричному вигляді

$$z = f(t) = x(t) + i\,y(t), \quad \tau_1 \le t \le \tau_2 \tag{2.2}$$

і нехай на відрізку $[\tau_1, \tau_2]$ задані дві дійсні функції $u(t)$ і $v(t)$. Тоді говорять, що на кривій L задана функція $w = g(z) = g\,[f(t)] = \varphi(t)$, тобто

$$w = \varphi(t) = u(t) + iv(t), \quad \tau_1 \le t \le \tau_2\,. \tag{2.21}$$

Функція $\varphi(t)$ називається ***неперервною на кривій*** L, якщо обидві функції $u(t)$ та $v(t)$ неперервні на відрізку $[\tau_1, \tau_2]$.

Позначимо через $M(L)$ множину точок z комплексної площини, таких, що $z = f(t)$, $\tau_1 \le t \le \tau_2$. Якщо крива L є простою, то співвідношення (2.21) визначає на $M(L)$ *однозначну* функцію $w = g(z) = g\,[f(t)] = \varphi(t)$.

Справедливі наступні твердження:

1) якщо функція $f(z)$ неперервна в області D, то вона неперервна на кожній кривій, що лежить в області D;
2) якщо функція $f(z)$ визначена в області D й неперервна на кожній кривій, що лежить в D, то $f(z)$ неперервна в області D.

3. *Неперервність функції в області аж до її межі*

Нехай функція $f(z)$ визначена в обмеженій області D, межа Γ якої складається зі скінченного числа замкнених кривих $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$, на кожній з яких $f(z)$ також визначена.

Функція $f(z)$ називається ***неперервною в області D аж до її межі*** Γ, якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках області D і в усіх точках її межі Γ.

Якщо межа Γ області D складається з *простих* замкнених кривих, то неперервність функції в області D аж до межі Γ рівносильна неперервності цієї функції в $\overline{D}$. Але якщо межова крива області D не є простою, то з неперервності функції в області D аж до межі, взагалі кажучи, не випливає неперервність цієї функції в $\overline{D}$.

4. *Рівномірна неперервність*

Функція $f(z)$ називається ***рівномірно неперервною в області*** D, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$, як завгодно малого, існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-яких $z_1, z_2 \in D$, таких, що задовольняють умові $|z_1 - z_2| < \delta$, виконується нерівність $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Справедлива ***теорема Кантора***: функція $f(z)$, яка неперервна на замкненій обмеженій множині E, рівномірно неперервна на цій множині.

<u>Приклад 2.16.</u> Довести неперервність функції $w = z^2$ при будь-якому значенні z.

Розв'язання. Візьмемо довільну точку z_0 й довільне число $\varepsilon > 0$. Оскільки $f(z_0) = z_0^2$, то покажемо, що існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $\left|z^2 - z_0^2\right| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$.

Якщо $z \to z_0$, то знайдеться таке число $M > 0$, що $|z| < M$ й $|z_0| < M$. Тоді

$$\left|z^2 - z_0^2\right| = |(z + z_0)(z - z_0)| = |z + z_0| \cdot |z - z_0| < (|z| + |z_0|) \cdot |z - z_0| < 2M|z - z_0|.$$

Якщо обрати $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$, то з нерівності $|z - z_0| < \delta$ буде випливати, що $|z^2 - z_0^2| < 2M\delta \le \varepsilon$, тобто *при будь-якому* z_0 функція $w = z^2$ є неперервною.

ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 2

Вказати, яка лінія визначається рівнянням:

2.1. $\mathrm{Im}\, z^2 = 2$. **2.2.** $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{2}$. **2.3.** $|z - i| + |z + i| = 4$.

2.4. $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$. **2.5.** $z(t) = t^3 - i(t^3 + 16)$, $t \in (-\infty, \infty)$.

2.6. $z(t) = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4)$, $t \in (-\infty, \infty)$. **2.7.** $z(t) = 2e^{it} + e^{-it}/2$, $t \in (-\infty, \infty)$. **2.8.** $z(t) = 3tgt + i\sec t$, $t \in (-\infty, \infty)$. **2.9.** $z(t) = t + it^2$, $t \ge 0$.

З'ясувати, яка область визначається умовою:

2.10. $|z| > 2 + \mathrm{Im}\, z$. **2.11.** $\mathrm{Im}\, \bar{z}^2 < 1$. **2.12.** $4 \le |z - 1| + |z + 1| \le 8$.

2.13. $\dfrac{1}{4} < \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) + \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) < \dfrac{1}{2}$.

Знайти образ точки z_0 при відображенні $w = f(z)$:

2.14. $z_0 = 1$, $w = \dfrac{1}{z - i}$. **2.15.** $z_0 = 2 + 3i$, $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$. **2.16.** $z_0 = \dfrac{1+i}{2}$, $w = (z - i)^2$.

Знайти дійсну та уявну части функції:

2.17. $f(z) = i\bar{z} + 2z^2$. **2.18.** $f(z) = 2i - z + iz^2$. **2.19.** $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{i} + \dfrac{i}{\bar{z}}$.

2.20. $f(z) = \mathrm{Re}(z^2 + i) + i\,\mathrm{Im}(z^2 - i)$.

Визначити функцію $w = f(z)$ за відомими дійсною та уявною частинами:

2.21. $u(x, y) = x + y$, $v(x, y) = x - y$.

2.22. $u(x, y) = x\dfrac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = y\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}$.

2.23. $u(x, y) = \dfrac{1}{x}$, $v(x, y) = \dfrac{1}{y}$.

2.24. З'ясувати, в яку лінію перетворюється коло $|z| = 1$ при відображенні $w = \dfrac{z}{(1-z)^2}$.

2.25. З'ясувати, в яку лінію перетворюється пряма $x = y$ при відображенні $w = z^2$.

2.26. З'ясувати, в яку лінію перетворюється лінія $\arg z = \dfrac{3}{4}\pi$ при відображенні $w = \dfrac{1}{z}$.

Подати у алгебраїчній формі функції:

2.27. $w = 2z - 1$. **2.28.** $w = z + z^2$. **2.29.** $w = \dfrac{1}{z}$. **2.30.** $w = e^{1-z}$.

2.31. $w = \sin(z - i)$. **2.32.** $w = sh(z + 2i)$. **2.33.** $w = tgz$. **2.34.** $w = 3^{\frac{1}{z}}$.

Обчислити:

2.35. $\cos(1+i)$. **2.36.** $ch\,i$. **2.37.** $sh(i-2)$. **2.38.** $Ln(-1)$. **2.39.** $\ln i$.

2.40. $Ln\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. **2.41.** $ctg\,\pi i$. **2.42.** $th\,\pi i$. **2.43.** $Arc\sin i$. **2.44.** $Arctg\dfrac{i}{3}$.

2.45. i^i.

Розв'язати рівняння:

2.46. $e^{-z} + 1 = 0$. **2.47.** $e^z + i = 0$. **2.48.** $4\cos z + 5 = 0$.

2.49. $sh\,iz = -i$. **2.50.** $\ln(z+i) = 0$. **2.51.** $\ln(i - z) = 1$.

Обчислити границі:

2.52. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\cos z}{ch\,iz}$. **2.53.** $\lim\limits_{z\to \frac{\pi}{4}i} \dfrac{\sin iz}{chz + ishz}$.

2.54. $\lim\limits_{z\to -\frac{\pi}{2}i} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z + i}$. **2.55.** $\lim\limits_{z\to -i} \dfrac{z^2 + 3iz - 2}{z+i}$.

3. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

3.1. Похідна і диференціал

Нехай функція $w = f(z) = u + iv$ визначена в деякому околі U точки z, в тому числі і в самій цій точці. Дамо незалежній змінній $z = x + iy$ приріст $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, який не виводить за межі околу U. Тоді функція $w = f(z)$ отримає відповідний приріст $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$.

Похідною функції $w = f(z)$ ***в точці*** z називається границя відношення приросту функції Δw до приросту аргументу Δz, коли приріст аргументу прямує до нуля *довільним* способом.

Похідна позначається $w', f'(z), \dfrac{dw}{dz}$ або $\dfrac{df}{dz}$. Означення похідної можна записати у вигляді:

$$w' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z). \tag{3.1}$$

Зауваження. Границя (3.1) може бути скінченною, нескінченною або взагалі не існувати.

Функція $w = f(z)$ називається ***диференційовною в точці*** z, якщо її приріст Δw в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta w = A\Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z, \tag{3.2}$$

де комплексне число A не залежить від z, а функція $\alpha(\Delta z)$ є нескінченно малою при $\Delta z \to 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha(\Delta z) = 0$.

Так само, як і для функції дійсної змінної доводиться, що функція $f(z)$ диференційовна в точці z тоді і тільки тоді, коли вона має в цій точці *скінченну* похідну, причому $A = f'(z)$. Також аналогічно доводиться, що, якщо функція $f(z)$ диференційовна в точці z, то вона неперервна в цій точці (обернене твердження у загальному випадку невірне).

Диференціалом функції $f(z)$ ***в точці*** z називається *головна частина* $A\Delta z$, тобто $f'(z) \cdot \Delta z$, відповідного приросту, лінійна відносно Δz.

Диференціалом незалежної змінної z домовилися вважати приріст Δz.

Диференціали позначаються символом d. Отже, з урахуванням того, що $A = f'(z)$,

$$dw = df(z) = f'(z)\,dz. \tag{3.3}$$

Звідси отримаємо вираз

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz}, \tag{3.4}$$

який називається ***диференціальною формою*** похідної функції $f(z)$ ***в точці*** z.

3.2. Умови Коші-Рімана

Як відомо з дійсного аналізу, *необхідною і достатньою* умовою диференційовності функції *однієї* змінної у деякій точці є існування скінченної похідної в цій точці. Для функції *двох* дійсних змінних *достатньою* умовою її диференційовності є *неперервність* в точці частинних похідних за обома змінними. Умови ж диференційовності функції *комплексної* змінної суттєво більш обмежувальні. Внаслідок того, що границя (3.1) повинна існувати і не залежати від способу, яким точка $z+\Delta z$ наближається до точки z при $\Delta z \to 0$, дійсна та уявна частини диференційовної функції $f(z)$ не можуть бути довільними. Вони повинні бути зв'язані певними додатковими співвідношеннями. *Умови диференційовності* функції комплексної змінної даються наступною теоремою.

Теорема 3.1. Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ визначена в деякому околі точки $z = x + iy$. Тоді для диференційовності в точці z функції $f(z)$ як функції комплексної змінної *необхідно і достатньо*, щоб у цій точці функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ були диференційовними як функції двох дійсних змінних і виконувалися співвідношення

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.5}$$

Зауваження. Співвідношення (3.5) прийнято називати ***умовами Коші-Рімана***, хоча набагато раніше (у 1752 р.) вони були отримані Жаном Лероном Д'Аламбером (1717-1783) і Л.Ейлером (у 1755 р.).

Доведемо *необхідність.* Нагадаємо, що функція $\varphi(x, y)$ двох *дійсних* змінних називається *диференційовною в точці* (x, y), якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді $\Delta\varphi = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\cdot$

$\cdot\Delta y$, де A й B – числа, які не залежать від Δx й Δy, а $\alpha(\Delta x, \Delta y)\to 0$ й $\beta(\Delta x, \Delta y)\to 0$ при $\Delta x\to 0$ й $\Delta y\to 0$. Якщо функція $\varphi(x, y)$ диференційовна в точці (x, y), то в цій точці $A=\partial\varphi/\partial x$, $B=\partial\varphi/\partial y$.

Нехай функція $f(z)$ в точці z диференційовна. Тоді $\Delta f = f'(z)\cdot\Delta z + {}$ $+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z$, де $\alpha(\Delta z)=\chi(\Delta x, \Delta y)+i\gamma(\Delta x, \Delta y)\to 0$ при $\Delta z\to 0$, отже, $\chi(\Delta x, \Delta y)\to 0$, $\gamma(\Delta x, \Delta y)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$. Оскільки $\Delta f=\Delta u+i\Delta v$, $f'(z)=A+iB$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, то після підстановки цих виразів у Δf і відокремлення дійсної та уявної частин отримаємо

$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \chi\Delta x - \gamma\Delta y, \quad \Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \chi\Delta x + \gamma\Delta y.$$

Це доводить, що обидві функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ диференційовні в точці (x, y), причому $\dfrac{\partial u}{\partial x}=A$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-B$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=B$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=A$. Умови Коші-Рімана безпосередньо випливають з останніх співвідношень.

Достатність приймемо без доведення.

При виконанні умов Коші-Рімана похідна функції $f(z)$ може бути подана у наступних чотирьох еквівалентних формах:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad \textbf{(3.6)}$$

Зауважимо, що у полярних координатах $z=\rho e^{i\varphi}=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ умови Коші-Рімана мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}, \quad \rho\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\partial v}{\partial\varphi}, \qquad \textbf{(3.7)}$$

де $f(z)=u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)+iv(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. При виконанні (3.7) $f'(z)$ приймає одну з наступних форм

$$f'(z)=\frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+i\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}-i\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right). \qquad \textbf{(3.8)}$$

З властивостей границь і означення похідної випливає, що звичайні правила диференціювання суми, різниці, добутку, частки, складеної і оберненої функцій, а також таблиця похідних функцій дійсної змінної залишаються справедливими й для функцій комплексної змінної.

Приклад 3.1. Довести диференційовність функції $f(z)=\cos z$ і знайти її похідну.

Розв'язання. Маємо $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x +$ $+ i\sin x)$, $e^{-iz} = e^{-i(x+iy)} = e^{y-ix} = e^{y}(\cos x - i\sin x)$. Тоді

$$\cos z = \frac{1}{2}[\cos x(e^{y} + e^{-y}) + i\sin x(-e^{y} + e^{-y})] = u + iv,$$

де $u = \frac{1}{2}\cos x(e^{y} + e^{-y})$, $v = \frac{1}{2}\sin x(-e^{y} + e^{-y})$.

Перевіримо виконання умов Коші-Рімана. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}\sin x(e^{y} + e^{-y}),\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cos x(e^{y} - e^{-y}),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\cos x(-e^{y} + e^{-y}),\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin x(-e^{y} - e^{-y}).$$

Функції $u(x, y)$ й $v(x, y)$ як функції дійсних змінних x й y диференційовні в будь-якій точці (x, y) комплексної площини (мають неперервні частинні похідні) і при цьому, як неважко бачити, задовольняють умови Коші-Рімана. Тому за першою з формул (3.6) маємо

$$f'(z) = (\cos z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\Big[-\sin x(e^{y} + e^{-y}) + i\cos x(-e^{y} + e^{-y})\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[e^{-y}(i\cos x - \sin x) - e^{y}(\sin x + i\cos x)\Big] =$$

$$= \frac{i}{2}\Big[e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\Big] = -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z.$$

Приклад 3.2. Перевірити виконання умов Коші-Рімана і у разі позитивної відповіді знайти похідну функції $f(z) = z^5$ в полярних координатах.

Розв'язання. Оскільки $z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^5 = \rho^5 e^{i5\varphi} = \rho^5\cos 5\varphi + i\rho^5\sin 5\varphi = u + iv,$$

де $u = u(\rho, \varphi) = \rho^5\cos 5\varphi$, $v = v(\rho, \varphi) = \rho^5\sin 5\varphi$. Ці функції диференційовні в будь-якій точці (ρ, φ). Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -5\rho^5\sin 5\varphi,\quad \frac{\partial u}{\partial \rho} = 5\rho^4\cos 5\varphi,\quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 5\rho^5\cos 5\varphi,\quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = 5\rho^4\sin 5\varphi,$$

Бачимо, що умови Коші-Рімана (3.7) виконуються при будь-якому скінченному $z = \rho e^{i\varphi}$. Тоді за першою з формул (3.8) маємо

$$f'(z)=(z^5)'=\frac{\rho}{z}\left(5\rho^4\cos 5\varphi+i5\rho^4\sin 5\varphi\right)=5\frac{\rho^5}{z}\left(\cos 5\varphi+\sin 5\varphi\right)=5\frac{z^5}{z}=5z^4.$$

3.3. Поняття аналітичної функції. Особливі точки

Функція $w=f(z)$ називається ***аналітичною в точці*** z_0, якщо вона диференційовна не тільки у самій точці z_0, але й в деякому її околі.

З цього визначення випливає, що функція, аналітична в точці z_0, буде аналітичною також в *кожній точці* деякого околу точки z_0. Тому *множина аналітичності функції завжди відкрита*.

Функція, що аналітична *в кожній точці* деякої області D, називається ***аналітичною*** (інакше ***регулярною*** або ***голоморфною***) ***в*** цій ***області***.

Зауваження. Згідно цьому визначенню аналітична в області D функція повинна бути *однозначною* в D, оскільки поняття границі і похідної визначені лише для однозначних функцій. Тому ***надалі під аналітичною завжди будемо розуміти однозначну функцію***.

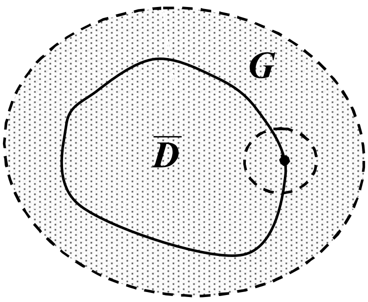

Рис. 3.1

У точках z межі *замкненої* області $\overline{D}$ похідна $f'(z)$ не визначена, оскільки ці точки не мають околів, які б *цілком* належали $\overline{D}$. Тому функція $f(z)$ називається ***аналітичною*** (***регулярною*** або ***голоморфною***) ***в замкненій області*** $\overline{D}$, якщо вона аналітична в деякій області G, яка містить $\overline{D}$ ($\overline{D}\subset G$) (рис. 3.1).

Функція називається ***аналітичною на кривій*** L, якщо вона аналітична в деякій області, яка містить цю криву.

Функція $f(z)$ називається ***аналітичною на нескінченності***, якщо функція $f\left(\frac{1}{z}\right)$ аналітична в точці $z=0$.

Точки, в яких (однозначна) функція $f(z)$ є аналітичною, називаються ***регулярними*** або ***правильними точками*** цієї функції. Точки, в яких функція $f(z)$ не є аналітичною, у тому числі точки, в яких $f(z)$ не визначена, називаються ***особливими точками*** цієї функції. Особлива точка z_0 називається ***ізольованою точкою*** функції $f(z)$, якщо знайдеться такий *проколений* окіл U_δ

цієї точки (див. п.2.1), що в *кожній* його точці $f(z)$ є *аналітичною*. Наприклад, функція $f(z)=z^3$ аналітична в усій комплексній площині; функція $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-i)}$ аналітична в усій комплексній площині за винятком двох ізольованих особливих точок $z_1=-1$ й $z_2=i$; функція $f(z)=\mathrm{Re}\,z$ не аналітична в жодній точці. Більш докладно ізольовані особливі точки аналітичної функції будуть розглянуті пізніше, у розділі 6.

Поняття аналітичної функції є одним з найважливіших понять теорії функцій комплексної змінної, оскільки клас аналітичних функцій відіграє особливу роль не тільки при розв’язанні численних математичних проблем, але й прикладних задач, які виникають у різних галузях науки і техніки і потребують застосування методів ТФКЗ.

Означення похідної (3.1) дозволяє перенести на аналітичні функції комплексної змінної ряд властивостей диференційовних функцій дійсної змінної, зокрема, якщо $f(z)$ й $g(z)$ – аналітичні функції в області D, то функції $f(z)\pm g(z)$, $f(z)\cdot g(z)$ також аналітичні в області D, а частка $f(z)/g(z)$ – функція, аналітична в усіх точках області D, у яких $g(z)\neq 0$. З теореми про похідну складеної функції випливає, що якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і відображує область D в область E змінної w, а функція $\omega=g(w)$ аналітична в області E, то складена функція $\omega=g[f(z)]$ змінної z аналітична в області D.

<u>Приклад 3.3.</u> Чи є аналітичною функція $f(z)=ze^z$?

Розв’язання. Маємо $ze^z=(x+iy)e^x(\cos y+i\sin y)=e^x(x\cos y-y\sin y)+$ $+ie^x(x\sin y+y\cos y)$, отже,

$$u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y),\ v(x,y)=e^x(x\sin y+y\cos y).$$

Перевіримо виконання умов Коші-Рімана. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(x\cos y-y\sin y)+e^x\cos y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=e^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(x\sin y+y\cos y)+e^x\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=e^x(x\cos y+\cos y-y\sin y).$$

Оскільки частинні похідні неперервні в усій комплексній площині, то функції $u(x,y)$ й $v(x,y)$ як функції дійсних змінних x й y диференційовні в будь-якій точці (x, y). Крім того, як неважко бачити, умови Коші-Рімана виконуються. Тому функція $f(z) = ze^z$ всюди аналітична.

Приклад 3.4. Чи є аналітичною функція $f(z) = z^2\bar{z}$?

Розв'язання. Маємо $z^2\bar{z} = (x+iy)^2(x-iy) = x^3 + xy^2 + i(x^2y + y^3)$, отже,

$$u(x, y) = x^3 + xy^2,\ v(x, y) = x^2y + y^3.$$

Ці функції диференційовні в будь-якій точці (x, y), оскільки частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2$ неперервні в усій комплексній площині. Умови Коші-Рімана в даному випадку мають вигляд системи рівнянь $3x^2 + y^2 = 3y^2$, $2xy = -2xy$ і виконуються тільки в одній точці $(0, 0)$. Тому функція $f(z) = z^2\bar{z}$ диференційовна тільки в точці $z = 0$ і ніде не аналітична.

3.4. Гармонічні функції та їх зв'язок з аналітичними

Функція $u = u(x, y)$ двох дійсних змінних називається ***гармонічною в області*** D, якщо в цій області вона визначена, має неперервні частинні похідні другого порядку і задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3.9}$$

Рівняння (3.9) називається ***рівнянням Лапласа*** на честь видатного французького математика П'єра Сімона Лапласа (1749-1827). Разом із гармонічними функціями воно відіграє важливу роль у фізиці і техніці. Наприклад, будь-яку гармонічну функцію можна розглядати як потенціал деякого векторного поля; усталений розподіл температури в області або функція потоку безвихрової плоскої течії нестисливої ідеальної рідини також є гармонічними функціями. Для функції комплексної змінної рівняння Лапласа має той самий вигляд, що й для функції дійсних змінних.

Зв'язок між аналітичними і гармонічними функціями встановлюється наступними двома теоремами.

Теорема 3.2. Дійсна та уявна частини однозначної та аналітичної в області D функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є в цій області гармонічними функціями.

Доведення. Оскільки функція $f(z)$ аналітична в області D, то $\forall z \in D$ вона має похідні *усіх* порядків (див. далі теорему 4.10) і виконуються умови Коші-Рімана (3.5). Тому функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ мають неперервні частинні похідні першого та другого порядку, отже, рівняння (3.5) можно диференціювати по x і y. Диференціюючи перше з них по x, а друге по y, отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Оскільки мішані частинні похідні (у разі їх неперервності) не залежать від порядку диференціювання, то $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$. Складаючи відповідні частини останніх рівнянь, отримаємо рівняння Лапласа (3.9) відносно функції $u(x, y)$, отже вона є гармонічною. Для функції $v(x, y)$ доведення аналогічне.

Зворотне ж твердження у загальному випадку невірне: якщо $u(x, y)$ й $v(x, y)$ – гармонічні, але *довільно обрані* функції, то функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ зовсім не обов'язково буде аналітичною. Наприклад, функції $u = xy$ й $v = x - y$, як неважко перевірити, є гармонічними, але функція $f(z) = xy + i(x - y) = (1 + i)\bar{z}$ не аналітична, оскільки не виконуються умови Коші-Рімана (теорема 3.1).

Спряженими називають функції $u(x, y)$ й $v(x, y)$, гармонічні в області D та зв'язані умовами Коші-Рімана (порядок функцій в парі є істотним).

Наступна теорема, яка є наслідком теорем 3.1 та 3.2, визначає умови аналітичності функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Теорема 3.3. Для того, щоб дві функції $u(x, y)$ й $v(x, y)$, гармонічні в однозв'язній області D, були дійсною та уявною частинами аналітичної функції, необхідно і достатньо, щоб вони були *спряженими*.

Якщо одна з цих функцій відома, то в однозв'язній області можна знайти іншу функцію згідно наступній теоремі.

Теорема 3.4. Для усякої функції, гармонічної в однозв'язній області D, можна знайти з точністю до довільного сталого доданка (дійсного або уявного) спряжену з нею гармонічну функцію, а саме,

– якщо відома $u(x, y)$, то

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C; \qquad (3.10)$$

– якщо відома $v(x, y)$, то

$$u(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy + C. \qquad (3.11)$$

Тут C – довільний сталий доданок, а інтеграл не залежить від кривої, яка з'єднує точки $(x_0, y_0) \in D$ й $(x, y) \in D$, а залежить лише від точки (x, y), якщо точка (x_0, y_0) фіксована.

З теорем 3.3 й 3.4 випливає, що якщо в однозв'язній області D задана гармонічна функція, то можна знайти, з точністю до сталого доданка, аналітичну в області D функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тобто відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною, якою є вихідна функція. Завдання значення $f(z)$ в деякій фіксованій точці дозволяє знайти конкретне значення сталого доданка.

Зауваження. У випадку *многозв'язної* області D інтеграли в (3.10) й (3.11) можуть залежати від шляху інтегрування. Тоді в D не будуть існувати спряжені гармонічні функції $u(x, y)$ й $v(x, y)$.

Відзначимо, що при відшуканні функції $v(x, y)$ за заданою функцією $u(x, y)$ (або навпаки) часто зручніше замість формул (3.10) й (3.11) безпосередньо застосовувати умови Коші-Рімана. Крім того, якщо відомі значення $f(z_0)$ та одна з частин (дійсна або уявна) аналітичної в околі точки z_0 функції $f(z)$, то цю функцію можна відновити також за однією з наступних формул:

$$f(z) = 2 \cdot u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - f(z_0) \qquad (3.12)$$

або

$$f(z) = 2i \cdot v\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) + \overline{f(z_0)}, \qquad (3.13)$$

де $\overline{f(z_0)}$ – число, спряжене з $f(z_0)$.

<u>Приклад 3.5.</u> Перевірити, чи є функції $u = 3(x^2 - y^2)$ й $v = 3x^2y - y^3$ спряженими гармонічними.

Розв'язання. $\frac{\partial u}{\partial x}=6x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-6y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6-6=0$.

Отже, функція $u(x,\, y)$ задовольняє рівняння Лапласа і тому є гармонічною.

$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy$, $\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=6y$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-6y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y-6y=0$.

Отже, функція $v(x,\, y)$ також задовольняє рівняння Лапласа і тому також є гармонічною. Однак, як бачимо, умови Коші-Рімана не виконуються:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x\neq\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-6y\neq\frac{\partial v}{\partial x}=6xy.$$

Тому задані функції, хоча й гармонічні, але при цьому вони не є спряженими, отже, не можуть бути дійсною та уявною частинами однієї і тієї ж аналітичної функції.

<u>Приклад 3.6.</u> Перевірити, чи існує аналітична функція $f(z)$, уявною частиною якої є функція $v(x,\, y)=e^x\cos y$, і якщо так, то відновити $f(z)$ за умовою $f(0)=1+i$.

Розв'язання. Перевіримо спочатку, чи є задана функція $v(x,\, y)=e^x\cos y$ гармонічною. Для цього знайдемо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-e^x\cos y.$$

Неважко бачити, що функція $v(x,\, y)$ задовольняє рівнянню Лапласа (3.9), тобто вона є гармонічною і тому теоретично *може* бути уявною частиною деякої аналітичної функції $f(z)$, тобто $f(z)$ дійсно *існує.*

<u>*I спосіб.*</u> З умов Коші-Рімана маємо: $\frac{\partial u}{\partial x}=-e^x\sin y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\cos y$.

Проінтегруємо по x першу рівність:

$$u(x,\, y)=\int\left(-e^x\sin y\right)dx=-e^x\sin y+C(y),$$

де $C(y)$ – невідома поки що функція.

Підставимо знайдену функцію $u(x,\, y)$ до другої рівності і отримаємо рівняння $-e^x\cos y+C'(y)=-e^x\cos y$, з якого знаходимо $C'(y)=0$. Отже, $C(y)=C^*$, де C^* - довільна стала.

Отже, ми знайшли з точністю до сталого доданка C^*, який в цьому випадку є *дійсним*, гармонічну функцію $u(x, y) = C^* - e^x \sin y$, спряжену з вихідною функцією $v(x, y)$. Знайдена функція $u(x, y)$ є дійсною частиною аналітичної функції $f(z)$, отже $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = C^* - e^x \sin y + i \cdot e^x \cos y$. З умови $f(0) = 1 + i$ випливає, що $0 + C^* + i = 1 + i$, звідки $C^* = 1$ і тому $u(x, y) = 1 - e^x \sin y$. Таким чином, маємо:

$$f(z) = 1 - e^x \sin y + i \cdot e^x \cos y = 1 + i \cdot e^x (\cos y + i \sin y).$$

Оскільки $e^x (\cos y + i \sin y) = e^z$, то остаточно отримуємо $f(z) = 1 + ie^z$.

Зауваження. На практиці в більшості випадків функції $u(x, y)$ й $v(x, y)$ задаються виразами, що включають елементарні функції типа показникової або тригонометричних. Тоді функцію $f(z)$ можна виразити через змінну z за допомогою формальної заміни $x = z$, $y = 0$: $f(z) = \left[u(x, y) + iv(x, y)\right]\Big|_{\substack{x = z \\ y = 0}}$.

Тут

$$f(z) = (1 - e^x \sin y + i \cdot e^x \cos y)\Big|_{\substack{x = z \\ y = 0}} = 1 - e^z \cdot \sin 0 + ie^z \cos 0 = 1 + ie^z.$$

<u>*II спосіб.*</u> В даному випадку $z_0 = 0$, $f(z_0) = 1 + i$, тому $\bar{z}_0 = 0$, $\overline{f(z_0)} = 1 - i$. Тоді за формулою (3.13) маємо

$$f(z) = 2i \cdot v\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) + \overline{f(z_0)} = 2ie^{\frac{z}{2}} \cos\frac{z}{2i} + 1 - i = \left\{\cos\frac{z}{2i} = \cos\left(-\frac{iz}{2}\right) = \right.$$

$$\left. = ch\frac{z}{2} = \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{2}\right\} = 2ie^{\frac{z}{2}} \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{2} + 1 - i = ie^z + i + 1 - i = 1 + ie^z.$$

<u>Приклад 3.7.</u> Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо відома її дійсна частина $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ і значення $f(i) = -1 + 2i$.

Розв'язання. В даному випадку $z_0 = i$, $f(z_0) = -1 + 2i$, тому $\bar{z}_0 = -i$, $\overline{f(z_0)} = -1 - 2i$. Тоді за формулою (3.12) маємо

$$f(z) = 2\left[\left(\frac{z - i}{2}\right)^2 - \left(\frac{z + i}{2i}\right)^2 + 2\frac{z - i}{2}\right] + 1 - 2i = z^2 + 2z.$$

3.5. Геометричний зміст модуля та аргументу похідної. Поняття конформного відображення

Нехай аналітична функція $w = f(z)$ відображає область D комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$ на область E площини $\overline{\mathbb{W}}$, так що точці z відповідає точка w, а точці $z + \Delta z$ відповідає точка $w + \Delta w$. Величина $\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ показує, як саме співвідноситься відстань $|\Delta z|$ між точками z й $z + \Delta z$ із відстанню $|\Delta w|$ між відповідними точками w й $w + \Delta w$. Границя $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ називається ***коефіцієнтом розтягу в точці*** z. Оскільки $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \left|\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right| = |f'(z)|$, то ***модуль похідної функції*** $f(z)$ ***в точці*** z ***дорівнює коефіцієнту розтягу в цій точці.*** Якщо $|f'(z)| > 1$, то у достатньо малому $|\Delta z|$-околі точки z відповідна відстань $|\Delta w|$ збільшується у порівнянні з $|\Delta z|$, тобто має місце *розтяг*. Якщо ж $|f'(z)| < 1$, то відображення $w = f(z)$ приводить до *стиску*.

Оскільки $f'(z)$ не залежить від способу прямування Δz до нуля, тобто від того, яким саме шляхом точка $z + \Delta z$ наближається до точки z, то *коефіцієнт розтягу є однаковим в усіх напрямках*. Це означає, що якщо коло γ (рис. 3.2) відображається у лінію Γ, то ця лінія, незалежно від напрямку, буде відрізнятися від кола радіуса $|f'(z)||\Delta z|$ з центром в точці w на величину більш високого порядку малості, ніж $|\Delta z|$. Інакше кажучи, *нескінченно малі кола відображаються у кола з точністю до малих вищих порядків.*

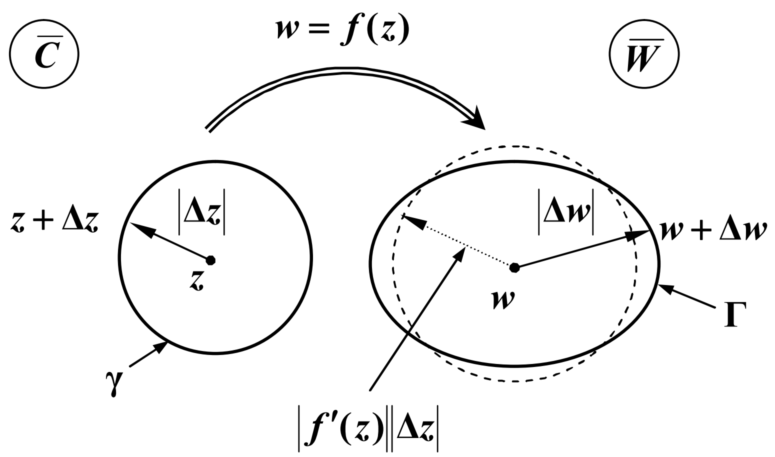

Рис. 3.2

Нехай $f'(z)\neq 0$. Припустимо, що через точку z проходить деяка *гладка* крива l. Образом цієї кривої буде крива L, яка проходить через відповідну точку w (рис. 3.3).

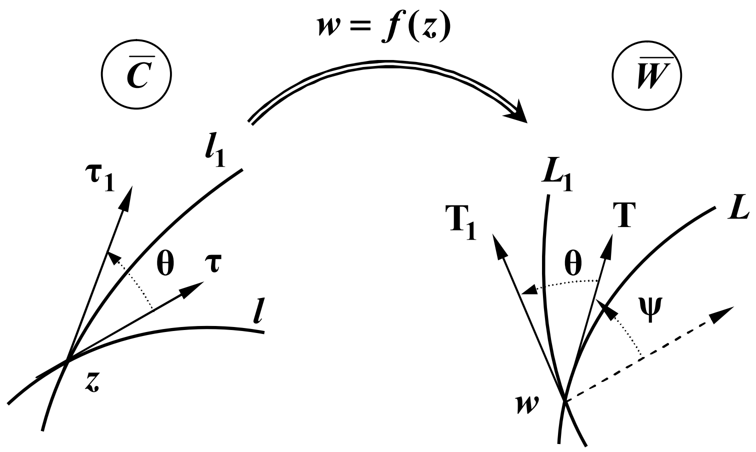

Рис. 3.3

Якщо $\boldsymbol{\tau}$ – дотична до кривої l в точці z, а $\mathbf{T}$ – дотична до кривої L в точці w, то ***аргумент похідної*** $\psi=\arg f'(z)$ – ***це*** різниця між кутовими коефіцієнтами дотичних $\boldsymbol{\tau}$ й $\mathbf{T}$, тобто ***кут, на який повертається дотична при відображенні $w=f(z)$.*** При цьому, якщо $\psi>0$, то поворот відбувається проти ходу годинникової стрілки, а якщо $\psi<0$, – за ходом годинникової стрілки. Цей кут *не залежить від кривої* l, отже, дотичні до *усіх* кривих, що проходять через точку z, при відображенні $w=f(z)$ повертаються на *один і той самий* кут $\psi=\arg f'(z)$. Тому, оскільки кутом між кривими, що перетинаються в деякій точці, називають кут між відповідними дотичними, кут θ між двома різними прообразами l та l_1 в точці z буде дорівнювати куту між їх образами L та L_1 в точці w як за величиною, так і за напрямком відліку (рис. 3.3). Таким чином, ***якщо $f'(z)\neq 0$, то відображення $w=f(z)$ зберігає кути між кривими у точках їх перетину.*** З цим фактом пов'язане широке застосування комплексних функцій у картографії і гідродинаміці.

<u>Приклад 3.8.</u> Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту при відображенні $w=z^3$ в точці $z_0=2-i$.

Розв'язання. Маємо $w'(z)=3z^2$, отже, $w'(z)\Big|_{z=2-i}=3(2-i)^2=9-12i=$

$$=15\left[\cos\left(2\pi-arctg\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(2\pi-arctg\frac{4}{3}\right)\right]=15\left[\cos\left(-arctg\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(-arctg\frac{4}{3}\right)\right]$$

і тому $\left|f'(z)\right|\Big|_{z=2-i}=15$, $\arg f'(z)\Big|_{z=2-i}=-arctg\frac{4}{3}$, тобто коефіцієнт розтягу $k = 15 > 1$ (розтяг), а кут повороту $\psi = -arctg\frac{4}{3} < 0$ (за ходом годинникової стрілки).

Якщо при відображенні $w = f(z)$ розтяг в точці z не залежить від напрямку і зберігаються кути між будь-якими двома кривими, що проходять через точку z, то це відображення називається ***конформним в точці*** z.

Зауваження. Якщо $f'(z) = 0$, то відображення, взагалі кажучи, вже не буде конформним в даній точці.

Відображення називається ***конформним в області*** D, якщо воно конформне в кожній точці цієї області.

Критерій конформності відображення. Для того, щоб функція $w = f(z)$ реалізувала конформне відображення в області D, необхідно і достатньо, щоб у цій області вона була однолистою і аналітичною, причому $f'(z) \neq 0$ всюди в D.

Якщо при даному конформному відображенні зберігається також напрямок відліку кутів, то воно називається ***конформним відображенням першого роду***; якщо ж напрямок відліку кутів змінюється на протилежний, то воно називається ***конформним відображенням другого роду***.

<u>Приклад 3.9.</u> Вказати область, у якій відображення $w = (z + 2i)^3$ є конформним.

Розв'язання. Оскільки функція $f(z) = (z + 2i)^3$ є аналітичною й однолистою в усій комплексній площині, а її похідна $f'(z) = 3(z + 2i)^2$ дорівнює 0 тільки в точці $z = -2i$, то дане відображення є конформним всюди, окрім точки $z = -2i$.

ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 3

3.1. З'ясувати, чи є аналітичними функції:

$$\text{а) } f(z) = |z|\bar{z}; \quad \text{б) } f(z) = e^{z^2}; \quad \text{в) } f(z) = |z|\operatorname{Re} z; \quad \text{г) } f(z) = \sin 3z - i.$$

3.2. Перевірити виконання умов Коші-Рімана і у разі позитивної відповіді знайти похідну функції:

в декартових координатах

$$\text{а) } f(z) = e^{2z}; \quad \text{б) } f(z) = \sin\frac{z}{3}; \quad \text{в) } f(z) = shz; \quad \text{г) } f(z) = Ln\, z;$$

в полярних координатах д) $f(z)=z\,\mathrm{Im}\,z$; е) $f(z)=chz$.

3.3. Довести гармонічність функції:

$$\text{а) } u=x^2+2x-y^2;\quad \text{б) } u=2e^x\cos y;\quad \text{в) } u=\frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\text{г) } u=-\frac{y}{x^2+y^2};\quad \text{д) } u=arctg\frac{y}{x};\quad \text{е) } u=\ln(x^2+y^2).$$

3.4. Чи можуть наступні функції бути дійсною або уявною частинами деякої аналітичної функції $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$:

$$\text{а) } u=x^2+2xy-y^2;\quad \text{б) } u=x^2;\quad \text{в) } v=\ln(x^2+y^2);\quad \text{г) } v=\frac{x^2+1}{2}y^2\ ?$$

3.5. Чи будуть наведені пари функцій спряженими гармонічними:

$$\text{а) } u=\frac{x}{x^2+y^2},\ v=-\frac{y}{x^2+y^2};\qquad \text{б) } u=x,\ v=-y;$$

$$\text{в) } u=e^x\cos y+1,\ v=e^x\sin y+1;\quad \text{г) } u=y^3-3x^2y,\ v=x^3-3xy\,?$$

3.6. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за відомою її дійсною $u(x,y)$ або уявною $v(x,y)$ частиною:

$$\text{а) } u(x,y)=x^3-3xy^2;\qquad \text{б) } v(x,y)=xy;$$

$$\text{в) } u(x,y)=2xy+3;\qquad \text{г) } v(x,y)=2e^x\sin y.$$

3.7. Відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою її дійсною $u(x,y)$ або уявною $v(x,y)$ частиною і значенням $f(z_0)$:

$$\text{а) } u=\frac{x}{x^2+y^2},\ f(\pi)=\frac{1}{\pi};\qquad \text{б) } v=arctg\frac{y}{x}\ (x>0),\ f(1)=0;$$

$$\text{в) } u=x^3-6x^2y-3xy^2+2y^3,\ f(0)=i;\qquad \text{г) } v=2(chx\sin y-xy),\ f(0)=0.$$

3.8. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту при відображенні $w=f(z)$ в точці z_0:

$$\text{а) } w=z^2,\ z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2};\qquad \text{б) } w=e^z,\ z_0=-1-i\frac{\pi}{2};$$

$$\text{в) } w=\sin z,\ z_0=0;\qquad \text{г) } w=z^3,\ z_0=1+i\frac{\pi}{2}.$$

3.9. Вказати область, у якій відображення $w=f(z)$ є конформним:

$$\text{а) } w=e^{-3z};\quad \text{б) } w=z^2-4z;\quad \text{в) } w=-iz^2;\quad \text{г) } w=sh(1-z).$$

4. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

4.1. Інтеграл від функції комплексної змінної

Нехай в деякій області D задані неперервна й однозначна функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ та кусково-гладка замкнена або незамкнена лінія L. Оскільки $dz=dx+idy$, то ***інтеграл*** $\int\limits_L f(z)dz$ ***від комплексної функції*** $f(z)$ ***по лінії*** L можна подати у вигляді суми двох дійсних криволінійних інтегралів другого роду від дійсних функцій u й v

$$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_L (u+iv)(dx+idy)=\int\limits_L udx-vdy+i\int\limits_L vdx+udy, \tag{4.1}$$

де лінія L називається ***шляхом інтегрування***.

Внаслідок цього інтеграл $\int\limits_L f(z)dz$ має відповідні ***властивості*** криволінійних інтегралів, а саме:

1. ***Лінійність.*** Для будь-яких комплексних сталих $C_i=const \quad (i=\overline{1,n})$

$$\int\limits_L \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(z)dz=\sum_{i=1}^{n} C_i \int\limits_L f_i(z)dz. \tag{4.2}$$

2. ***Адитивність.*** Якщо лінія L розбита на частини $L_1, L_2, \dots, L_n$, тобто $L=\sum\limits_{i=1}^{n} L_i$, то

$$\int\limits_L f(z)dz=\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{L_i} f(z)dz. \tag{4.3}$$

3. При зміні напрямку руху вздовж лінії L інтеграл змінює знак:

$$\int\limits_{L^+} f(z)dz=-\int\limits_{L^-} f(z)dz, \tag{4.4}$$

де L^+ й L^- позначають *один і той самий шлях*, що проходиться у протилежних напрямках.

Зауваження. У подальшому інтегрування *у додатному напрямку* (який відповідає *зростанню* значень змінної інтегрування) будемо *за умовчанням* позначати символом $\int\limits_{L}$, а *у від'ємному* (тобто протилежному) *напрямку* – символом $\int\limits_{L^-}$.

Часто обчислення інтеграла по комплексній змінній зводиться до обчислення звичайного визначеного інтеграла. Нехай дуга *гладкої* кривої L задана у комплексно-параметричній формі $z(t) = x(t) + i\,y(t)$, $\tau_1 \le t \le \tau_2$, причому значення $t = \tau_1$ й $t = \tau_2$ відповідають початковій та кінцевій точкам дуги. Тоді $dz = \dot{z}(t)dt$ й (4.1) набуде вигляду

$$\int\limits_{L} f(z)dz = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} f\left[z(t)\right]\dot{z}(t)dt\,, \tag{4.5}$$

де $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\,\dot{y}(t)$. Крапкою, як і раніше, позначається похідна по t.

Зауваження.

1. Комплексно-параметричне рівняння *прямої*, яка проходить через точки $z_1 = (x_1,\, y_1)$ та $z_2 = (x_2,\, y_2)$, має вигляд

$$z(t) = t + i\,[y_1 + k(t - x_1)], \tag{4.6}$$

де $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, а параметр t при русі по відрізку прямої від точки z_1 до точки z_2 змінюється від $\tau_1 = x_1$ до $\tau_2 = x_2$. Тоді $\dot{z}(t) = 1 + ik$. Ця пряма також може бути описана комплексно-параметричним рівнянням вигляду

$$z(t) = z_1 + te^{i\arg(z_2 - z_1)}, \tag{4.7}$$

де параметр t при русі від z_1 до z_2 змінюється від $\tau_1 = 0$ до $\tau_2 = |z_2 - z_1|$. Тоді $\dot{z}(t) = e^{i\arg(z_2 - z_1)}$. При зворотному русі від z_2 до z_1 беремо $\arg(z_1 - z_2)$.

2. Комплексно-параметричне рівняння *кола* радіуса R з центром в точці $z = z_0 = (x_0,\, y_0)$ має вигляд

$$z(t) = x_0 + R\cos t + i\,(y_0 + R\sin t), \tag{4.8}$$

де параметр t при русі по дузі кола від точки $z_1 = (x_1,\, y_1)$ до точки $z_2 = (x_2,\, y_2)$ змінюється від $\tau_1 = \varphi_1$ до $\tau_2 = \varphi_2$. Значення φ_1 і φ_2, що відповідають точкам z_1 і z_2 (рис. 4.1), обчислюються за формулами

$$\varphi_k = \arg(z_k - z_0) \quad (k = 1,\, 2), \tag{4.9}$$

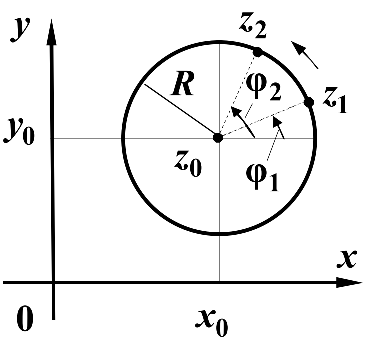

Рис. 4.1

отже, $tg\varphi_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, $tg\varphi_2 = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$. Тоді $\dot{z}(t) = -R\sin t + iR\cos t$. Це коло також може бути описане також рівнянням вигляду

$$z(t) = z_0 + Re^{it}, \qquad (4.10)$$

де параметр t змінюється від $\tau_1 = \varphi_1$ до $\tau_2 = \varphi_2$. Тоді $\dot{z}(t) = iRe^{it}$.

3. Комплексно-параметричне рівняння *еліпса* з осями симетрії, паралельними осям координат, і центром в точці $z = z_0 = (x_0, y_0)$ (рис. 4.2) має вигляд

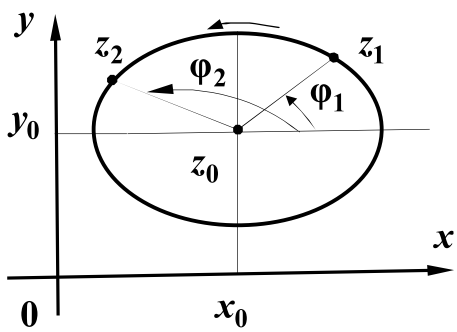

Рис. 4.2

$$z(t) = (x_0 + a\cos t) + i(y_0 + b\sin t), \qquad (4.11)$$

де a і b – півосі еліпса, а параметр t при русі по дузі еліпса від точки $z_1 = (x_1, y_1)$ до точки $z_2 = (x_2, y_2)$ змінюється від $\tau_1 = \varphi_1$ до $\tau_2 = \varphi_2$ (φ_1 і φ_2 мають той самий зміст, що й в випадку кола). Тоді $\dot{z}(t) = -a\sin t + ib\cos t$.

<u>Приклад 4.1.</u> Обчислити інтеграл $\int\limits_L (2 - i + z\,\mathrm{Im}\,z)dz$, де L:

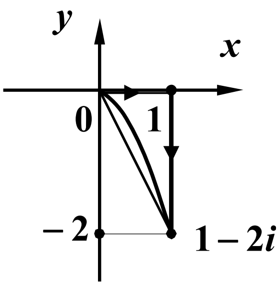

Рис. 4.3

а) відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 - 2i$;

б) дуга параболи $y = -2x^2$, що з'єднує ті ж самі точки;

в) ламана $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = 1$ (рис. 4.3).

Розв'язання. З урахуванням того, що $z = x + iy$, перепишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$2 - i + z\,\mathrm{Im}\,z = u + iv = 2 - i + (x + iy)y = xy + 2 + i(y^2 - 1).$$

Тут $u(x, y) = xy + 2$, $v(x, y) = y^2 - 1$. Тоді за формулою (4.1) отримаємо

$$\int\limits_L (2 - i + z\,\mathrm{Im}\,z)dz = \int\limits_L (xy + 2)dx - (y^2 - 1)dy + i\int\limits_L (y^2 - 1)dx + (xy + 2)dy.$$

а) Рівняння прямої, що проходить через точки $z_1 = 0$ й $z_2 = 1 - 2i$ є $y = -2x$, а x зростає від 0 до 1, отже, $dy = -2dx$ і тоді

$$\int_L (2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz = \int_0^1 [(-2x^2+2)-(4x^2-1)(-2)]dx +$$

$$+i\int_0^1 [(4x^2-1)+(-2x^2+2)(-2)]dx = \int_0^1 6x^2dx + i\int_0^1 (8x^2-5)dx = 2-i\frac{7}{3}.$$

б) Для параболи $y=-2x^2$ маємо $dy=-4xdx$, а x зростає від 0 до 1. Отже,

$$\int_L (2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz = \int_0^1 [(-2x^3+2)-(4x^4-1)(-4x)]dx + i\int_0^1 [(4x^4-1)+$$

$$+(-2x^3+2)(-4x)]dx = 2\int_0^1 (8x^5-x^3-2x+1)dx + i\int_0^1 (12x^4-8x-1)dx = \frac{13}{6}-i\frac{13}{5}.$$

в) На відрізку z_1z_3 маємо $y=0$, $dy=0$, а x зростає від 0 до 1. На відрізку z_3z_2 маємо $x=1$, $dx=0$, а y спадає від 0 до -2. Отже, за властивістю лінійності криволінійного інтеграла отримуємо

$$\int_{z_1z_3z_2} (2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz = \int_{z_1z_3} (2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz + \int_{z_3z_2} (2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz =$$

$$= \int_0^1 2\,dx - i\int_0^1 dx + \int_0^{-2} (1-y^2)dy + i\int_0^{-2} (y+2)dy = 2-i+\frac{2}{3}-2i = \frac{8}{3}-3i.$$

Порівнюючи між собою усі отримані значення заданого інтеграла, можемо зробити висновок, що *цей* інтеграл *залежить* від лінії L (шляху інтегрування).

Приклад 4.2. Обчислити інтеграл $\int_L (2z+1)\,\bar{z}\,dz$, де L – верхнє півколо $|z|=1$, що обходиться за ходом годинникової стрілки (рис. 4.4).

Розв'язання. Скористаємось рівнянням (4.8). Оскільки за умовою задачі верхнє півколо радіуса $R=1$ з центром в початку координат обходиться за ходом годинникової стрілки, то $z_0=(0,0)$, $z_1=(-1,0)$, $z_2=(1,0)$, комплексно-параметричне рівняння півкола має вигляд $z(t)=\cos t + i\sin t$, де параметр t змінюється від $\tau_1=\varphi_1=\pi$, $\tau_2=\varphi_2=0$. Отже,

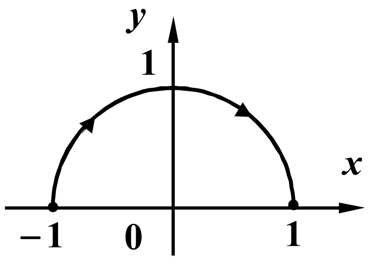

Рис. 4.4

$$dz = \dot{z}(t)dt = (-\sin t + i\cos t)\,dt$$

і за формулою (4.5) маємо

$$\int\limits_L (2z+1)\,\bar{z}\,dz = \int\limits_{\pi}^{0} (2\cos t + i2\sin t + 1)(\cos t - i\sin t)(-\sin t + i\cos t)dt =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{0} (2\cos t + i2\sin t + 1)idt = (2\cos t + i2\sin t + it)\Big|_{\pi}^{0} = 4 - i\pi .$$

Зауваження. Задану дугу кола можна також описати рівнянням (4.10), де $R = 1$, $z_0 = 0$, а параметр t змінюється від π до 0. Тоді $z = e^{it}$, $dz = ie^{it}dt$ і за формулою (4.5) маємо

$$\int\limits_L (2z+1)\,\bar{z}\,dz = \int\limits_{\pi}^{0} (2e^{it}+1)e^{-it}ie^{it}dt = i\left(\frac{2}{i}e^{it} + t\right)\Bigg|_{\pi}^{0} = 2 - 2e^{i\pi} - i\pi = 4 - i\pi .$$

<u>Приклад 4.3.</u> Обчислити інтеграл $\int\limits_L (2z+1)dz$, де L:

а) відрізок прямої від точки $z_1 = 2 + \sqrt{3} + 3i$ до точки $z_2 = 3 + i(2 + \sqrt{3})$;

б) дуга кола радіуса $R = 2$ з центром в точці $z_0 = 2 + 2i$, яка обмежена вказаними точками і обходиться проти ходу годинникової стрілки (рис. 4.5).

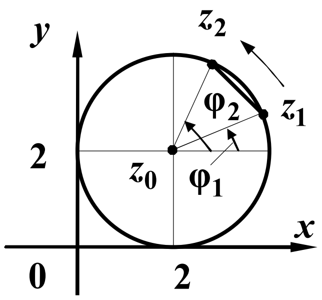

Рис. 4.5

Розв'язання.

а) <u>*І спосіб.*</u> Скористаємось формулою (4.6). Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої: $k = \dfrac{2+\sqrt{3}-3}{3-2-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}} = -1$.

Отже, комплексно-параметричне рівняння заданої прямої має вигляд $z(t) = t + i\,(-t + 5 + \sqrt{3})$. Тоді $\dot{z}(t) = 1 - i$. При русі від точки z_1 до точки z_2 параметр t змінюється від $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ до $x_2 = 3$, отже, за формулою (4.5) будемо мати

$$\int\limits_L (2z+1)dz = \int\limits_{2+\sqrt{3}}^{3} \left\{ 2\left[t + i\,(-t + 5 + \sqrt{3})\right] + 1 \right\} (1-i)\,dt =$$

$$= (1-i)\left[t^2(1-i) + t(1 + 10i + 2i\sqrt{3})\right]\Bigg|_{2+\sqrt{3}}^{3} = 5 - 9\sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1) .$$

<u>*ІІ спосіб.*</u> Скористаємось формулою (4.7). Знайдемо $\arg(z_2 - z_1)$:

$$z_2 - z_1 = 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow tg(z_2 - z_1) = -1,\ x_2 - x_1 = (1 - \sqrt{3}) < 0,$$

$y_2 - y_1 = (\sqrt{3}-1) > 0 \Rightarrow \arg(z_2 - z_1) = \pi - arctg\,1 = \dfrac{3\pi}{4}$. Отже, комплексно-параметричне рівняння заданої прямої має вигляд $z(t) = 2+\sqrt{3}+3i+te^{i\frac{3\pi}{4}}$. Тоді $\dot{z}(t) = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Оскільки $|z_2 - z_1| = \left|1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)\right| = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, то за формулою (4.5) маємо

$$\int_L (2z+1)dz = \int_0^{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} \left[4+2\sqrt{3}+6i+2te^{i\frac{3\pi}{4}}\right] e^{i\frac{3\pi}{4}}dt =$$

$$= e^{i\frac{3\pi}{4}}\left[t^2 e^{i\frac{3\pi}{4}} + t(5+2\sqrt{3}+6i)\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = 5-9\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1).$$

б) <u>*I спосіб.*</u> Скористаємось формулою (4.8). Оскільки $z_1 - z_0 = \sqrt{3}+i$, $z_2 - z_0 = 1+i\sqrt{3}$, то

$$x_1 - x_0 = \sqrt{3} > 0,\ y_1 - y_0 = 1 > 0 \Rightarrow \varphi_1 = \arg(z_1 - z_0) = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6};$$

$$x_2 - x_0 = 1 > 0,\ y_2 - y_0 = \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \varphi_2 = \arg(z_2 - z_0) = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Отже, комплексно-параметричне рівняння заданого кола має вигляд

$$z(t) = 2+2\cos t + i(2+2\sin t).$$

Тоді $\dot{z}(t) = -2\sin t + i2\cos t$ і за формулою (4.5) маємо

$$\int_L (2z+1)dz = 8i\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos t + i\sin t + \frac{5}{4} + i\right)(\cos t + i\sin t)dt = 5-9\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$$

(проміжні перетворення і обчислення в цьому випадку є доволі громіздкими і тому не наведені).

<u>*II спосіб.*</u> Скористаємось формулою (4.10) і вже знайденими φ_1 та φ_2. Комплексно-параметричне рівняння заданого кола має вигляд $z(t) = 2+2i+2e^{it}$, отже, $\dot{z}(t) = 2ie^{it}$ і за формулою (4.5) маємо

$$\int_L (2z+1)dz = 2i\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4+4i+4e^{it}+1\right)e^{it}dt = 2\left(5+4i+2e^{it}\right)e^{it}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 5-9\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1).$$

Як бачимо, заданий інтеграл не залежить від шляху інтегрування: на відрізку прямої й на дузі кола він приймає одне й те саме значення. Причини цього ми обговоримо в п. 4.3.

4.2. Інтегрування многозначних функцій

Нехай в області D задана многозначна функція $w = f(z)$. Однозначна функція $w = \varphi(z)$, аналітична в області D, називається ***однозначною віткою*** функції $f(z)$, якщо для будь-якої точки $z_0 \in D$ значення $\varphi(z_0)$ належить множині значень функції $f(z)$ в точці $z = z_0$. Многозначна в області D функція може мати як скінченне число однозначних віток, так і нескінченну їх кількість. Наприклад, функція $w = \sqrt[n]{z}$ має n однозначних віток $w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}$ $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$, а функція $w = Lnz$ – нескінченну кількість таких віток $w_k = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Точка z комплексної площини, яка має таку властивість, що обхід навколо неї в достатньо малому околі тягне за собою перехід від однієї вітки многозначної функції до іншої, називається ***точкою розгалуження (галуження)*** цієї многозначної функції. Наприклад, точками розгалуження многозначної функції $w = \sqrt[n]{z}$ є точки $z = 0$ та $z = \infty$. Після n-кратного обходу навколо точки $z = 0$ ми повертаємось до первісної вітки функції $w = \sqrt[n]{z}$. Такі точки розгалуження називаються ***алгебраїчними точками розгалуження*** $n-1$***-го порядку***. В кожній з таких точок многозначна функція приймає тільки одне значення (наприклад, $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{\infty} = \infty$), тобто різні однозначні вітки функції у цих точках співпадають. Для логарифмічної функції $w = Lnz$ точками розгалуження є точки $z = 0$ та $z = \infty$, причому $Ln0 = \infty$ й $Ln\infty = \infty$. Будь-яке скінченне число обходів *не приведе до первісної вітки* функції Lnz. Такі точки розгалуження називаються ***логарифмічними***.

При інтегруванні многозначної функції необхідно виділяти її однозначну вітку. Це досягається завданням значень многозначної функції в деякій точці контура інтегрування. Зауважимо, що якщо контур інтегрування є *замкненим*, то *початковою точкою обходу вважається та точка, в якій задається значення підінтегральної функції.*

Приклад 4.4. Обчислити інтеграл $\int\limits_{L^-} \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}$, де L – верхнє півколо $|z| = 1$, $\sqrt[3]{1} = 1$.

Розв'язання. Функція $\sqrt[3]{z}$ є многозначною: $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}e^{\frac{i}{3}(\arg z + 2k\pi)}$ $(k = 0, 1, 2)$. Умові $\sqrt[3]{1} = 1$ задовольняє та однозначна вітка цієї функції, для якої $k = 0$. Насправді, при $k = 0$ (і оскільки $\arg 1 = 0$) $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}\, e^0 = 1$.

Оскільки радіус кола $R = 1$ і центр кола розташований в початку координат, то за формулою (4.10) $z(t) = e^{it}$. Тоді $\dot{z}(t) = ie^{it}$. Оскільки за умовою задачі верхнє півколо обходиться проти руху годинникової стрілки (на що вказує L^-), то в формулі (4.5) $\tau_1 = \pi$, $\tau_2 = 0$. Отже, маємо

$$\int\limits_L \frac{dz}{\sqrt[3]{z}} = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{1}{e^{\frac{it}{3}}} ie^{it}dt = -i\int\limits_0^{\pi} e^{i\frac{2t}{3}}dt = -\frac{3}{2}e^{i\frac{2t}{3}}\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{3}{2}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^0\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} - 1\right) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} - i).$$

Зауваження. Тут і надалі символом $\oint\limits_C$ домовимося позначати інтеграл по *замкненому* контуру C, який *за умовчанням* вважаємо *додатно орієнтованим*. Інтеграл по *від'ємно орієнтованому* контуру будемо позначати символом $\oint\limits_{C^-}$.

Приклад 4.5. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C Lnz\, dz$, де C – коло $|z| = 1$, за умов:

а) $Lni = \frac{\pi}{2}i$;

б) обхід контура починається в точці $z_0 = 1$;

в) обхід контура починається в точці $z_0 = -1$.

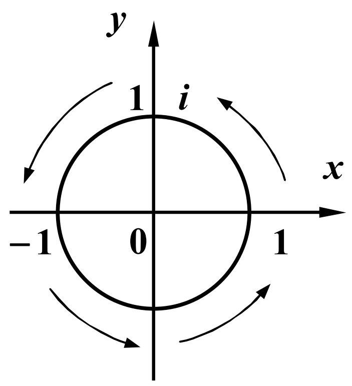

Рис. 4.6

Розв'язання. Функція $w = Lnz$ є многозначною. Її однозначні вітки мають вигляд

$$w_k = \ln z + 2\pi ki \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

де $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ – головна вітка.

а) Оскільки $Lni = \ln|i| + i\arg i + i2k\pi$, то умові $Lni = \frac{\pi}{2}i$ задовольняє та однозначна вітка цієї функції, для якої $k = 0$. Насправді, при $k = 0$ (і оскільки $|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$) $Lni = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$. Отже, за умовою задачі обрана головна вітка $\ln z$.

Оскільки радіус кола $R = 1$ і центр кола розташований у початку координат (рис. 4.6), то за формулою (4.10) $z(t) = e^{it}$. Тоді $\dot{z}(t) = ie^{it}$. Початковою точкою обходу контура в даному випадку є точка $z_0 = i$, тому в формулі (4.5) $\tau_1 = \frac{\pi}{2}$, $\tau_2 = \frac{5\pi}{2}$. Отже, маємо

$$\oint_C Lnz\,dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \ln\left(e^{it}\right) ie^{it}dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} te^{it}dt = \begin{vmatrix} u = t, & dv = e^{it}dt, \\ du = dt, & v = \frac{1}{i}e^{it} \end{vmatrix} = -e^{it}\left(\frac{t}{i} + 1\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} =$$

$$= -\left[e^{i\frac{5\pi}{2}}\left(\frac{5\pi}{2i} + 1\right) - e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2i} + 1\right)\right] = -\left(\frac{5\pi}{2} + i - \frac{\pi}{2} - i\right) = -2\pi.$$

б) Початковою точкою обходу контура є точка $z_0 = 1$, тому обираємо однозначну вітку, для якої $Ln1 = 0$. Як і в попередньому випадку, це буде головна вітка $\ln z$: $Ln1 = \ln|1| + i\arg 1 + i2k\pi = 0 + i\cdot 0 + i2k\pi = 0 \Rightarrow k = 0$. В формулі (4.5) у відповідності з початковою точкою обходу покладемо $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 2\pi$ і отримаємо

$$\oint_C Lnz\,dz = \int_0^{2\pi} \ln\left(e^{it}\right) ie^{it}dt = -\int_0^{2\pi} te^{it}dt = -e^{it}\left(\frac{t}{i} + 1\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -\left[e^{2\pi i}\left(\frac{2\pi}{i}+1\right)-e^{0}\right] = -\left(\frac{2\pi}{i}+1-1\right) = 2\pi i.$$

в) Початковою точкою обходу контура є точка $z_0 = -1$, тому обираємо однозначну вітку, для якої $Ln(-1) = 0$. Як і в попередніх випадках, це буде головна вітка $\ln z$:

$$Ln(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) + i2k\pi = 0 + i\cdot\pi + i2k\pi = i\pi(2k+1) = 0 \Rightarrow k = 0,$$

оскільки $k \in \mathbb{Z}$. В формулі (4.5) у відповідності з початковою точкою обходу покладемо $\tau_1 = \pi$, $\tau_2 = 3\pi$ і отримаємо

$$\oint_C Lnz\,dz = \int_{\pi}^{3\pi} \ln\left(e^{it}\right) ie^{it}dt = -\int_{\pi}^{3\pi} te^{it}dt = -\,e^{it}\left(\frac{t}{i}+1\right)\Bigg|_{\pi}^{3\pi} =$$

$$= -\left[e^{3\pi i}\left(\frac{3\pi}{i}+1\right)-e^{i\pi}\left(\frac{\pi}{i}+1\right)\right] = -\left(-\frac{3\pi}{i}-1+\frac{\pi}{i}+1\right) = -2\pi i.$$

4.3. Інтегральна теорема Коші

У загальному випадку $\int\limits_L f(z)dz$ залежить не тільки від підінтегральної функції $f(z)$, але й, як ми вже бачили у прикладі 4.1, від шляху інтегрування (кривої L). Значний практичний інтерес викликає питання умов, за яких інтеграл не буде залежати від шляху інтегрування (як у прикладі 4.3). Ці умови вперше (1825 р.) були сформульовані О.Коші у вигляді теореми, яка носить його ім'я .

Теорема 4.1 ***(інтегральна теорема Коші)***. Якщо функція $f(z)$ *аналітична* в *однозв'язній* області D, то для усіх кривих, що *цілком* лежать у цій області і мають *спільні* кінці, інтеграл $\int\limits_L f(z)dz$ приймає *одне й те саме значення*.

Отже, якщо криві γ_1 й γ_2 цілком лежать в області D і мають спільні початок і кінець, то $\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz$. Таким чином, криву можна довільно деформувати в області D, залишаючи нерухомими її кінці і не змінюючи при цьому значення інтеграла (рис. 4.7).

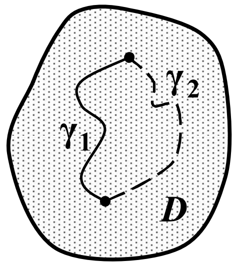

Рис. 4.7

Доведення. Зі співвідношення (4.1) випливає, що питання незалежності комплексного інтеграла $\int\limits_L f(z)dz$ від L зводиться до питання незалежності від L дійсних криволінійних інтегралів $\int\limits_\Gamma udx - vdy$ й $\int\limits_\Gamma vdx + udy$.

З дійсного аналізу відомо, що необхідною і достатньою умовою незалежності криволінійного інтеграла $\int\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ від шляху інтегрування є виконання умови $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. При цьому потрібно, щоб частинні похідні функцій P й Q були неперервними. Тому додатково припустимо, що похідна $f'(z)$ неперервна в D. Тоді частинні похідні функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ також будуть неперервними в D. Умови незалежності від шляху інтегрування вказаних дійсних інтегралів відповідно є $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Бачимо, що вони повністю збігаються з умовами Коші-Рімана, які виконані, оскільки функція $f(z)$ аналітична в області D. Отже, теорема доведена.

Тепер стає зрозумілим, чому інтеграл у прикладі 4.1 приймає різні значення на різних кривих, що мають спільні кінці в точках z_1 й z_2. Справа в тому, що підінтегральна функція $f(z) = 2 - i + z\,\mathrm{Im}\,z = xy + 2 + i(y^2 - 1)$ *не є аналітичною*, оскільки умови Коші-Рімана $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x = -\dfrac{\partial v}{\partial xy} = 0$ виконуються тільки в одній точці $z = 0$. Тому $f(z)$ диференційовна тільки в точці $z = 0$ і ніде не аналітична. Тому за теоремою Коші інтеграл $\int\limits_L (2 - i + z\,\mathrm{Im}\,z)dz$ *залежить* від шляху інтегрування, на відміну від інтеграла $\int\limits_L (2z + 1)dz$, що розглядався у прикладі 4.3 і підінтегральна функція якого є аналітичною.

Теоремі Коші можна надати також наступну форму.

Теорема 4.2. Якщо функція $f(z)$ аналітична в *однозв'язній* області D, то для будь-якого *замкненого* контура C, що *цілком належить* D,

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Приклад 4.6. Обчислити інтеграл $\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}dz$, де C – коло $|z-3-2i|=1$.

Розв'язання. В замкненій області, обмеженій колом $|z-3-2i|=1$, підінтегральна функція аналітична, тому за теоремою Коші

$$\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}dz = 0.$$

Іноді доводиться розглядати інтеграли вздовж ліній, на яких функція $f(z)$, залишаючись неперервною, перестає бути аналітичною. У цьому випадку справедливим є наступне ***узагальнення інтегральної теореми Коші для однозв'язної області***.

Теорема 4.3. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, межею якої є контур Γ, і неперервна в *замкненій* області $\overline{D}$, то

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Теорема Коші також може бути узагальнена на випадок *многозв'язних* областей. При її формулюванні будемо мати на увазі *попередню домовленість* (див. в кінці п.2.2) про те, що при русі вздовж *кожної* з кривих, що складають повну межу області, ця область *завжди залишається зліва.*

Теорема 4.4 ***(інтегральна теорема Коші для многозв'язної області)***. Якщо функція $f(z)$ аналітична в обмеженій скінченнозв'язній області D, *повною межею* якої є Γ, і неперервна в *замкненій* області $\overline{D}$, то $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$.

Доведення. Нехай функція $f(z)$ аналітична в многозв'язній області D, повну межу якої утворюють криві Γ_0, Γ_1, ... , Γ_n (рис. 4.8) і неперервна в $\overline{D}$. За допомогою розрізів γ_1, γ_2, ... , γ_m, що з'єднують внутрішні контури Γ_1, ... , Γ_n

із зовнішнім $\mathbf{\Gamma_0}$ (можливих варіантів з'єднання може бути декілька, на рисунку показаний один з них), перетворимо многозв'язну область $\boldsymbol{D}$ у *однозв'язну* область $\boldsymbol{D}^*$, повну межу якої позначимо $\mathbf{\Gamma}^*$. Неважко бачити, що $\mathbf{\Gamma}^*$ складається з ділянок кривих $\mathbf{\Gamma}_{\boldsymbol{k}}$ й розрізів $\gamma_{\boldsymbol{k}}$, причому кожен з розрізів проходиться *двічі у протилежних напрямках*. Функція $\boldsymbol{f(z)}$ аналітична в однозв'язній області $\boldsymbol{D}^*$ й неперервна в $\overline{\boldsymbol{D}}^*$, отже, за теоремою 4.3 та властивостю (4.3)

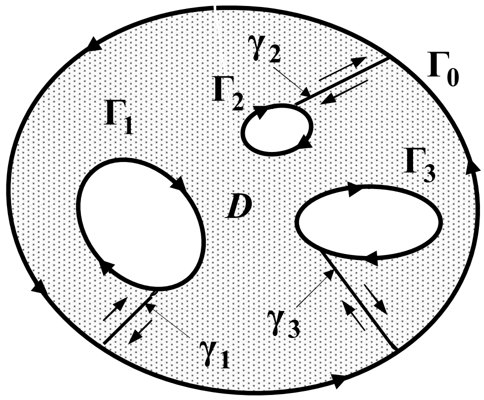

Рис. 4.8

$$\oint_{\Gamma^*} f(z)dz = \oint_{\Gamma_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k^+} f(z)dz + \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k^-} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)dz = 0 .$$

На підставі властивості (4.4) інтеграли вздовж розрізів γ_m взаємно знищуються, отже, остаточно маємо

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)dz = 0 ,$$

що й доводить теорему.

Зауваження. Якщо *зовнішній* контур обходиться *у додатному*, а усі *внутрішні* контури – у *від'ємному* напрямках, то

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k^-} f(z)dz = 0 ,$$

отже,
$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k^-} f(z)dz ,$$

тобто при такому обході повної межі *інтеграл по зовнішньому контуру дорівнює сумі інтегралів по усіх внутрішніх контурах*.

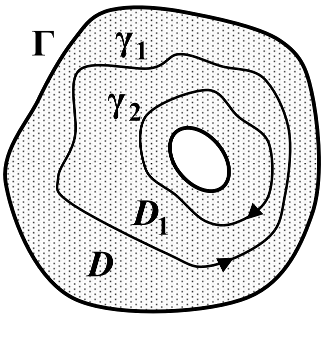

Рис. 4.9

У частинному випадку, коли функція $\boldsymbol{f(z)}$ аналітична в області $\boldsymbol{D}$ (не обов'язково однозв'язній), а γ_1 й γ_2 – *довільні* прості замкнені криві в $\boldsymbol{D}$ (γ_2 лежить всередині γ_1), що утворюють межу кільцеподібної області $D_1 \subset D$ (рис. 4.9), має місце рівність $\oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_2} f(z)dz = 0$, де обхід кривих γ_1 й γ_2 здійснюється *в одному і тому ж напрямку – додатному або від'ємному* (на рисунку показаний обхід в додатному напрямку). Звідси $\oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_2^-} f(z)dz$, тобто інтеграли по контурах γ_1 й γ_2, що проходяться *у протилежних напрямках*, приймають одне й те саме значення. Зокрема, роль контура γ_1 може відігравати й межа Γ області D, якщо $f(z)$ неперервна на Γ.

Приклад 4.7. Графічно зобразити подання інтеграла $\oint\limits_C \frac{1}{z^2 + 2iz} dz$, де C – коло $|z-1| = 3$, у вигляді $\oint\limits_C f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k^-} f(z)dz$.

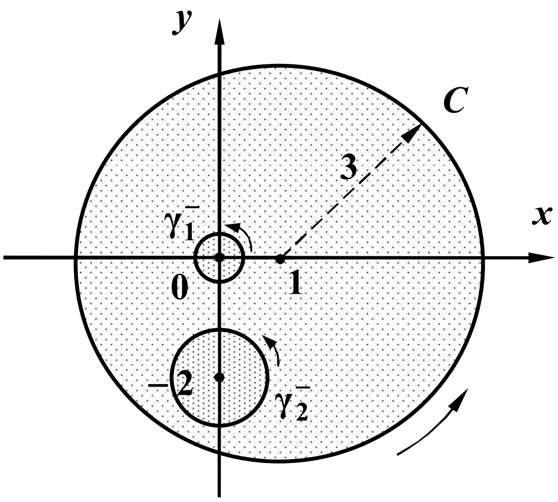

Рис. 4.10

Розв'язання. Підінтегральна функція аналітична в замкненій області, обмеженій колом C, окрім точок $z_1 = 0$ й $z_2 = -2i$ (особливі точки). Тому кожну з точок оточимо довільними замкненими контурами γ_1 й γ_2, достатньо малими, щоб вони не перетиналися один з іншим і цілком лежали всередині заданого зовнішнього контура, тобто в крузі $|z-1| \le 3$. Оскільки значення інтеграла не залежить від конфігурацій внутрішніх контурів, то у якості таких можемо взяти кола з центрами в особливих точках, наприклад, $\gamma_1 : |z| = 0{,}5$, $\gamma_2 : |z+2i| = 1$ (рис. 4.10).

У трьохзв'язній області, обмеженій колами C, γ_1 й γ_2 підінтегральна функція всюди аналітична, тому за теоремою Коші для многозв'язної області

$$\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{1}{z^2 + 2iz} dz = \oint\limits_{|z|=0,5} \frac{1}{z^2 + 2iz} dz + \oint\limits_{|z+2i|=1} \frac{1}{z^2 + 2iz} dz,$$

де обхід зовнішнього контура (кола C) здійснюється у додатному напрямку, а обох внутрішніх контурів (кіл γ_1 й γ_2) – у від'ємному напрямку (показано на рисунку). Значення обох інтегралів справа, а, отже, й заданого інтеграла, *не залежать* від радіусів кіл, що оточують особливі точки.

4.4. Невизначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца

Внаслідок інтегральної теореми Коші для функцій, аналітичних в однозв'язних областях, замість $\int\limits_L f(z)dz$ можна писати $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta$, маючи на увазі, що інтеграл обчислюється по *будь-якій* кривій L, що *цілком належить* D і кінцями якої є точки $z_1, z_2 \in D$.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області D. Якщо зафіксувати нижню межу інтегрування, то для будь-якої точки $z \in D$ інтеграл

$$\Phi(z) = \int\limits_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta \tag{4.12}$$

залежить тільки від точки z і, отже, є *однозначною* функцією в області D.

Теорема 4.5. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то інтеграл (4.12) також є *аналітичною* в області D функцією і

$$\Phi'(z) = \frac{d}{dz}\int\limits_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta = f(z) \quad (z_1, z \in D).$$

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, у [26]. Вона є найважливішим *наслідком теореми Коші* і дозволяє ввести *поняття невизначеного інтеграла* від функції комплексної змінної.

Первісною функції $f(z)$ називається функція $F(z)$, аналітична в області D і така, що рівність $F'(z) = f(z)$ справджується для усіх точок $z \in D$. Відомо, що усі первісні функції $f(z)$ різняться між собою лише сталими доданками. Інакше кажучи, *якщо первісна існує, то вона єдина з точністю до сталого доданка*. Зазначимо, що на підставі теореми 4.5 функція (4.12) є *однією з первісних* функції $f(z)$.

Множина $F(z)+C$ усіх первісних функції $f(z)$ називається ***невизначеним інтегралом від*** $f(z)$ і позначається символом $\int f(z)dz$, отже,

$$\int f(z)dz = F(z) + C, \tag{4.13}$$

де C – довільна стала.

Наслідком теореми 4.5 є наступне твердження.

Теорема 4.6. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D і $F(z)$ – яка-небудь її первісна, то для будь-яких точок $z_1, z_2 \in D$ справедлива ***формула Ньютона-Лейбніца***

$$\int_L f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta = F(\zeta)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1). \tag{4.14}$$

Доведення. Нехай $F(z)$ – яка-небудь первісна функції $f(z)$. Оскільки функція $\Phi(z)$ (4.12) також є первісною для $f(z)$, то $F(z) = \Phi(z) + C$, тобто

$$F(z) = \int_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta + C \quad (C = const).$$

Поклавши у цій рівності $z = z_1$, отримаємо $F(z_1) = C$. Після підстановки $z = z_2$ й знайденого C будемо мати

$$F(z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta + F(z_1),$$

звідки й випливає (4.14).

Слід зауважити, що у випадку, коли область аналітичності функції $f(z)$ є *многозв'язною*, інтеграл (4.12) *може залежати* від шляху інтегрування і, отже, тоді функція $\Phi(z)$ буде *многозначною*.

Оскільки визначення первісної й формула Ньютона-Лейбніца для функцій дійсної змінної повністю збігаються з такими для аналітичних функцій комплексної змінної, то правила і методи інтегрування, а також таблиця первісних залишаються справедливими і в комплексному аналізі. Зокрема, якщо функції $f(z)$ й $g(z)$ аналітичні в однозв'язній області D, а $z = z_1$ й $z = z_2$ – довільні точки цієї області, то має місце ***формула інтегрування частинами***

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\cdot g'(z)dz = f(z)\cdot g(z)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} g(z)\cdot f'(z)dz. \tag{4.15}$$

Заміна змінної в інтегралах функцій комплексної змінної здійснюється аналогічно заміні змінної при інтегруванні функцій дійсної змінної. Якщо аналітична функція $z = \varphi(w)$ взаємно-однозначно відображує криву S, що цілком лежить у області G площини змінної w, у криву L з області D площини змінної z, то

$$\int_L f(z)dz = \int_S f[\varphi(w)] \cdot \varphi'(w)dw. \qquad (4.16)$$

Приклад 4.8. Обчислити інтеграл $\int_L e^z dz$, де L – дуга параболи $y = x^3$ $(1 \le x \le 2)$.

Розв'язання.

I спосіб. За умовою задачі інтегрування повинно здійснюватися у *додатному* напрямку, що відповідає *зростанню* змінної x. Оскільки рухаємось по дузі кубічної параболи $y = x^3$, то початкова точка $M_1(1, 1)$, а кінцева – $M_2(2, 8)$ (вони зображують відповідно комплексні числа $z_1 = 1 + i$ й $z_2 = 2 + 8i$).

Підінтегральна функція аналітична всюди, тому за теоремою Коші 4.1 інтеграл не залежить від шляху інтегрування, отже, за формулою Ньютона-Лейбніца (4.14) маємо $\int_L e^z dz = \int_{1+i}^{2+8i} e^z dz = e^z \Big|_{1+i}^{2+8i} = e^{2+8i} - e^{1+i} = e^2(\cos 8 +$ $+ i\sin 8) - e(\cos 1 + i\sin 1) = e(e\cos 8 - \cos 1) + ie(e\sin 8 - \sin 1)$.

II спосіб. Обчислимо цей інтеграл безпосередньо за означенням.
Оскільки $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y = u + iv$, то за формулою (4.1) маємо

$$\int_L e^z dz = \int_L e^x \cos y dx - e^x \sin y dy + i\int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy.$$

Якщо $y = x^3$ $(1 \le x \le 2)$, то отримуємо

$$\int_L e^z dz = \int_1^2 [e^x \cos(x^3) - 3x^2 e^x \sin(x^3)]\, dx + i\int_1^2 [e^x \sin(x^3) + 3x^2 e^x \cos(x^3)]\, dx.$$

Зауваження. $\int e^x \sin[\varphi(x)]\, \varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} u = e^x, & dv = \sin[\varphi(x)]\, \varphi'(x)dx, \\ du = e^x dx, & v = -\cos[\varphi(x)] \end{vmatrix} =$

$= -\, e^x \cos[\varphi(x)] + \int e^x \cos[\varphi(x)]\, dx$. Аналогічно маємо

$$\int e^x \cos[\varphi(x)]\,\varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} u = e^x, & dv = \cos[\varphi(x)]\,\varphi'(x)dx, \\ du = e^x dx, & v = \sin[\varphi(x)] \end{vmatrix} =$$

$$= e^x \sin[\varphi(x)] - \int e^x \sin[\varphi(x)]\,dx\,.$$

Зважаючи на це зауваження, отримаємо

$$\int_L e^z dz = \left[e^x \cos(x^3) + ie^x \sin(x^3) \right]\Big|_1^2 = e^2 \cos 8 - e\cos 1 + i(e^2 \sin 8 - e\sin 1)\,,$$

що співпадає з результатом, отриманим першим способом. Оскільки інтеграл за теоремою Коші не залежить від шляху інтегрування, то дугу кривої $y = x^3$ можна замінити дугою будь-якої іншої кривої, наприклад, відрізком прямої $y = 7x - 6$, що з'єднує точки $M_1(1,1)$ і $M_2(2,8)$. При цьому в формулах, що наведені в зауваженні, покладаємо $\varphi(x) = 7x - 6$.

Як бачимо, обчислення першим способом виявилися значно простішими.

<u>Приклад 4.9.</u> Обчислити інтеграл $\int_1^i (3z^4 - 2z^3)dz$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція $f(z) = 3z^4 - 2z^3$ аналітична всюди, то за формулою Ньютона-Лейбніца знайдемо

$$\int_1^i (3z^4 - 2z^3)dz = \left(\frac{3}{5}z^5 - \frac{z^4}{2} \right)\Bigg|_1^i = \frac{3}{5}i - \frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}(-1+i)\,.$$

<u>Приклад 4.10.</u> Обчислити інтеграл $\int_L z^2 \cos z dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = i$ до точки $z_2 = 1$.

Розв'язання. Оскільки функції $f(z) = z^2$ та $g(z) = \cos z$ всюди аналітичні, то за формулою (4.15) інтегрування частинами знайдемо

$$\int_L z^2 \cos z dz = \int_i^1 z^2 \cos z dz = \begin{vmatrix} u = z^2, & dv = \cos z, \\ du = 2zdz, & v = \sin z \end{vmatrix} = z^2 \sin z\Big|_i^1 - 2\int_i^1 z\sin z dz =$$

$$= \begin{vmatrix} u = z, & dv = \sin z, \\ du = dz, & v = -\cos z \end{vmatrix} = \sin 1 + \sin i - 2\left[-z\cos z\Big|_i^1 + \int_i^1 \cos z dz \right] = \sin 1 + ish1 +$$

$$+ 2\cos 1 - 2i\cos i - 2\sin z\Big|_i^1 = \sin 1 + 2\cos 1 + ish1 - 2ich1 - 2\sin 1 + 2ish1 =$$

$= 2\cos 1 - \sin 1 + i(3sh1 - 2ch1)$.

Приклад 4.11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \frac{1 + tgz}{\cos^2 z} dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = i$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінної: $1 + tgz = w$, $\frac{dz}{\cos^2 z} = dw$, $1 + tg1 = w_1$, $1 + tgi = w_2$. Тоді за формулою (4.16) отримуємо

$$\int\limits_L \frac{1 + tgz}{\cos^2 z} dz = \int\limits_1^i \frac{1 + tgz}{\cos^2 z} dz = \int\limits_{1+tg1}^{1+tgi} w dw = \left.\frac{w^2}{2}\right|_{1+tg1}^{1+ith1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 2ith1 - th^2 1 - 1 - 2tg1 - tg^2 1\right) = -\left(tg1 + \frac{1}{2}tg^2 1 + \frac{1}{2}th^2 1\right) + ith1.$$

4.5. Інтегральна формула Коші. Інтеграл типу Коші

Теорема 4.7. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то для довільної точки $z \in D$ і будь-якого замкненого контура C, що *охоплює* точку z і цілком належить D, справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \qquad (4.17)$$

Ця формула була отримана О.Коші у 1831 р., тому її називають ***інтегральною формулою Коші*** або ***інтегралом Коші***. Вона дозволяє знайти *значення* аналітичної функції *в будь-якій точці* z області аналітичності за її значеннями на довільному замкненому контурі, який охоплює точку z і цілком міститься в області аналітичності (рис. 4.11).

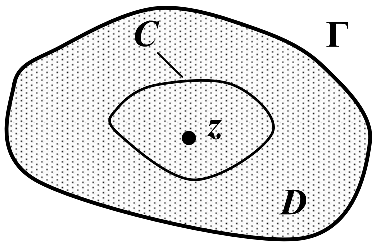

Рис. 4.11

Зауваження. Інтеграл Коші (4.17) існує для *будь-якого* положення точки z на комплексній площині, однак за умови, що точка z не лежить на контурі C ($z \notin C$). При цьому, якщо z лежить *всередині* C, то значення інтеграла дорівнює $f(z)$. Якщо ж z лежить *поза* C, то тоді підінтегральна функція $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ є аналітичною *всюди всередині* C, отже, за теоремою Коші (4.2) інтеграл дорівнює $\mathbf{0}$.

Узагальненням теореми 4.7 є наступна

Теорема 4.8. Якщо функція $f(z)$ аналітична в обмеженій скінченнозв'язній області D, повною межею якої є Γ, і неперервна в замкненій області $\overline{D}$, то для будь-якої точки $z \in D$ справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \tag{4.18}$$

Отже, формула Коші виражає фундаментальну властивість аналітичних функцій, а саме, те, що значення функції *всередині* області аналітичності цілком визначаються значеннями цієї функції *на межі* області: формула Коші дозволяє обчислити значення функції в будь-якій внутрішній точці області аналітичності за межовими значеннями цієї функції. На практиці при обчисленні інтегралів формула Коші звичайно застосовується у вигляді

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i \cdot f(z). \tag{4.19}$$

Зауваження. $$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 2\pi i \cdot f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \overline{D}. \end{cases}$$

Відзначимо *частинний випадок* формули (4.18). Нехай функція $f(z)$ аналітична в області D й γ_1 й γ_2 – прості замкнені криві в D (γ_2 лежить всередині γ_1), що утворюють межу області $D_1 \subset D$ (рис. 4.12). Тоді для будь-якої точки $z \in D_1$ справедлива формула

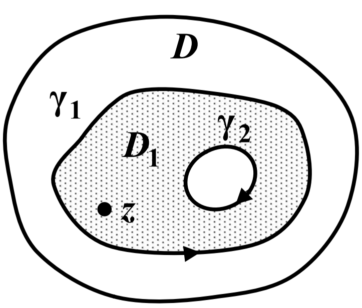

Рис. 4.12

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

у якій обхід кривих γ_1 й γ_2 здійснюється *в додатному напрямку* (показано на рисунку).

Наступні теореми являють собою деякі з важливих результатів застосування формули Коші.

Теорема 4.9 ***(теорема про середнє для аналітичних функцій).*** Якщо функція $f(z)$ неперервна у замкненому крузі і аналітична всередині нього, то значення функції у центрі круга дорівнює середньому арифметичному її значень на межі:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+R\cdot e^{i\varphi})d\varphi \ . \qquad (4.20)$$

Доведення. Розглянемо замкнений круг $\overline{D}: \ |\zeta - z| \le R$ з центром в точці z, межею Γ якого є коло $|\zeta - z| = R$. Для точок ζ межі справедливе співвідношення $\zeta = z + R\cdot e^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$, отже, $d\zeta = iR\cdot e^{i\varphi}d\varphi$. Тоді за формулою Коші отримаємо

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+R\cdot e^{i\varphi})}{R\cdot e^{i\varphi}}iR\cdot e^{i\varphi}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+R\cdot e^{i\varphi})d\varphi,$$

що і треба було довести.

Наступна теорема була сформульована і доведена О.Коші у 1842 р.

Теорема 4.10 ***(теорема про похідні аналітичної функції)***. Якщо функція $f(z)$ аналітична в обмеженій скінченнозв'язній області D, повною межею якої є Γ, і неперервна в замкненій області $\overline{D}$, то в будь-якій точці $z \in D$ вона має похідні усіх порядків, які обчислюються за формулами

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots). \qquad (4.21)$$

Таким чином, з існування в деякій області D першої похідної аналітичної функції $f(z)$ випливає існування *усіх* її похідних, причому *усі* вони *також* будуть *аналітичними* функціями.

Теорема 4.10 також може бути сформульована у наступному вигляді: якщо функція $\varphi(\zeta)$ *неперервна на межі* Γ області D, то функція $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$, подана формулою Коші, *аналітична в* D.

Зауваження. На практиці при обчисленні інтегралів формули (4.21) звичайно застосовуються у вигляді

$$\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} = \frac{2\pi i}{k!}\cdot f^{(k)}(z) \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots). \qquad (4.22)$$

Наслідком формул (4.21) є так звані ***нерівності Коші для похідних***:

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \le \frac{k!}{2\pi}\left|\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta\right| \le \frac{k!\,M\,l}{2\pi R^{k+1}} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots), \qquad (4.23)$$

де M – максимум модуля функції $f(z)$ в області D, R – відстань від точки z до межі області D, l – довжина цієї межі. Зокрема, якщо $f(z)$ аналітична в крузі $D:\ |z-z_0|<R$, то

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \le \frac{k!M}{R^k} \quad (k=1,2,3,\dots). \tag{4.24}$$

Наступна теорема істотно застосовувалася у роботах французького математика Жозефа Ліувілля (1809-1882) і тому носить його ім'я, хоча вперше вона була доведена О.Коші у 1844 р.

Теорема 4.11 ***(теорема Ліувілля)***. Якщо функція $f(z)$ аналітична і обмежена у всій комплексній площині $\mathbb{C}$, то вона стала.

Доведення. Оскільки $f(z)$ обмежена в площині $\mathbb{C}$, то знайдеться таке $M>0$, що $|f(z)|\le M \quad \forall z\in\mathbb{C}$. Для довільної точки z площини й *будь-якого* додатного R з нерівності (4.24) при $k=1$ маємо $|f'(z)|\le M/R$. Тоді $\lim\limits_{R\to\infty}|f'(z)|=0$, тобто *у всій площині* $\mathbb{C}$ $f'(z)\equiv 0$, звідки $f(z)=const \quad \forall z$.

Наступна теорема є оберненою основній теоремі Коші 4.2. Вперше вона була доведена у 1886 р. італійським математиком Джачинто Морерой (1856-1909).

Теорема 4.12 ***(теорема Мореры).*** Якщо функція $f(z)$ неперервна в однозв'язній області D й $\oint\limits_C f(z)dz=0$, де C – *будь-який замкнений* контур, що *цілком належить* D, то $f(z)$ аналітична в цій області.

Наслідок. При виконанні умов теореми функція $f(z)$ має в області D первісну вигляду $\Phi(z)=\int\limits_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta,\ \ \forall z_1\in D$.

Інтегральна формула Коші у вигляді (4.19) або (4.22) широко застосовується для обчислення інтегралів по замкнених контурах, що охоплюють особливі точки функції.

У деяких застосуваннях теорії функцій комплексної змінної, зокрема, при розв'язанні крайових задач гідродинаміки і теорії пружності, зустрічаються інтеграли вигляду

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} \quad (z\notin\gamma), \tag{4.25}$$

ззовні дуже схожі з інтегралом Коші. Однак, на відміну від останнього, де функція $f(z)$ *аналітична всередині замкненого контура* Γ, тут $f(z)$ – *довільна* функція, *задана на кусково-гладкій кривій* γ, *не обов'язково замкненій*. Припускається, що функція *неперервна* всюди на цій кривій, окрім, можливо, скінченного числа точок, де вона має розриви першого роду. За цих умов інтеграл (4.23) називається ***інтегралом типу Коші***. Він являє собою функцію, аналітичну в будь-якій точці z, що не належить кривій γ, тобто в області $\mathbb{C}\setminus\gamma$. При цьому, якщо γ розбиває площину $\mathbb{C}$ на декілька областей, то в цих областях інтеграл типу Коші визначає, взагалі кажучи, *різні* аналітичні функції. Наприклад, $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\begin{cases}1, & |z|<1,\\ 0, & |z|>1\end{cases}$. Крім того, навіть у випадку замкненого контура Γ інтеграл типу Коші, взагалі кажучи, не є інтегралом Коші, оскільки *довільна* функція $f(z)$ не завжди є аналітичною, внаслідок чого не можна очікувати, що $F(z)\to f(\zeta)$ при $z\to\zeta$. Доведено, наприклад, що якщо функція $\varphi(z)$ є аналітичною в деякій області, яка містить *просту замкнену криву* γ – межу області D, то для існування функції $f(z)$, аналітичної в D і такої, що співпадає з $\varphi(z)$ на кривій γ, необхідно і достатньо, щоб

$$\oint\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\equiv 0 \quad (z\notin\overline{D}).$$

На завершення відзначимо, що функція $F(z)$ *нескінченно диференційовна* в області $\mathbb{C}\setminus\gamma$, причому для її похідних справедливі формули, аналогічні формулам (4.20):

$$F^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}} \quad (k=1, 2, 3, \dots). \tag{4.26}$$

<u>Приклад 4.12.</u> Обчислити інтеграл $\oint\limits_{C}\frac{e^{z^3}}{z^2+2z}dz$, де C:

а) коло $|z-3|=1$; **б)** коло $|z-i|=2$; **в)** коло $|z+1|=2$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(z)=\frac{e^{z^3}}{z^2+2z}$ аналітична всюди, окрім точок $z_1=0$ й $z_2=-2$, в яких знаменник перетворюється на нуль (особливі точки).

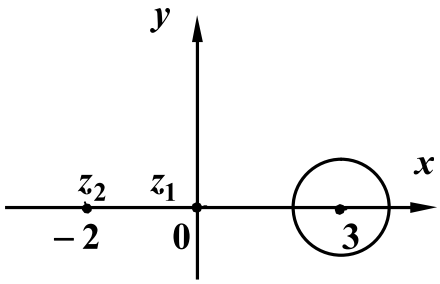

Рис. 4.13

а) В замкненому крузі $|z-3|\le 1$ (рис. 4.13) функція $f(z)$ аналітична, тому за інтегральною теоремою Коші $\oint\limits_{|z-3|=1}\frac{e^{z^3}}{z^2+2z}dz=0$.

б) В замкненому крузі $|z-i|\le 2$ (рис. 4.14) міститься одна особлива точка $z_1=0$. Запишемо інтеграл у вигляді $\oint\limits_{C}\frac{e^{z^3}}{z^2+2z}dz=\oint\limits_{|z-i|=2}\frac{\frac{e^{z^3}}{z+2}}{z}dz$. Функція $f(z)=\frac{e^{z^3}}{z+2}$ є

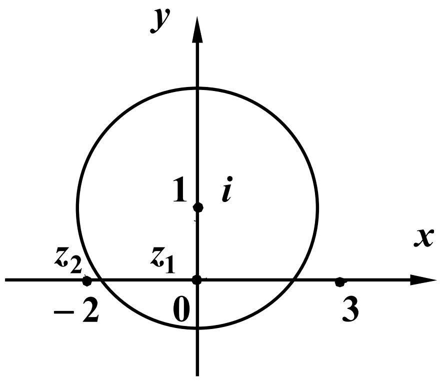

Рис. 4.14

аналітичною в крузі $|z-i|\le 2$. Тому за інтегральною формулою Коші при $z=0$ отримуємо

$$\oint\limits_{|z-i|=2}\frac{e^{z^3}}{z^2+2z}dz=2\pi i\left.\frac{e^{z^3}}{z+2}\right|_{z=0}=2\pi i\cdot\frac{1}{2}=\pi i\,.$$

в) В замкненому крузі $|z+1|\le 2$ (рис. 4.15) містяться обидві особливі точки $z_1=0$ й $z_2=-2$.

<u>*І спосіб.*</u> Розкладемо дріб $\frac{1}{z^2+2z}$ в суму найпростіших дробів:

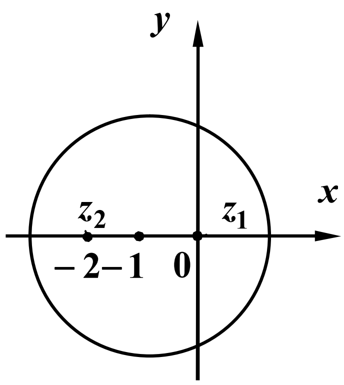

Рис. 4.15

$$\frac{1}{z^2+2z}=\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right).$$

Підставивши отриманий розклад в інтеграл, за інтегральною формулою Коші отримаємо

$$\oint\limits_{|z+1|=2}\frac{e^{z^3}}{z^2+2z}dz=\frac{1}{2}\left(\oint\limits_{|z+1|=2}\frac{e^{z^3}}{z}dz-\oint\limits_{|z+1|=2}\frac{e^{z^3}}{z+2}dz\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\pi i e^{z^3}\Big|_{z=0}-2\pi i e^{z^3}\Big|_{z=-2}\right)=\pi i(1-e^{-8})\,.$$

<u>*ІІ спосіб.*</u> Оточимо кожну з особливих точок довільними замкненими контурами γ_1 й γ_2, достатньо малими, щоб вони не перетиналися один з одним і цілком містилися всередині круга $|z+1|\le 2$. Розглянемо трьохзв'язну область,

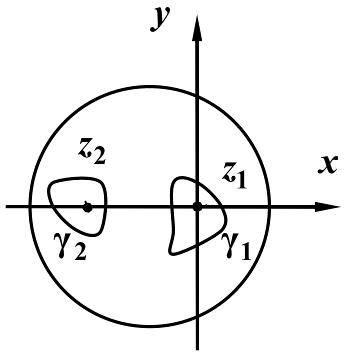

Рис. 4.16

обмежену колом $|z+1|=2$ й внутрішніми контурами γ_1 й γ_2 (рис. 4.16). За інтегральною теоремою Коші для многозв'язної області маємо

$$\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{e^{z^3}}{z^2+2z}\,dz = \oint\limits_{\gamma_1^-} \frac{e^{z^3}}{z^2+2z}\,dz + \oint\limits_{\gamma_2^-} \frac{e^{z^3}}{z^2+2z}\,dz.$$

Кожен з інтегралів справа обчислимо за інтегральною формулою Коші і в результаті отримаємо

$$\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{e^{z^3}}{z^2+2z}\,dz = \oint\limits_{\gamma_1^-} \frac{\frac{e^{z^3}}{z+2}}{z}\,dz + \oint\limits_{\gamma_2^-} \frac{\frac{e^{z^3}}{z}}{z+2}\,dz =$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{z^3}}{z+2}\right|_{z=0} + 2\pi i \left.\frac{e^{z^3}}{z}\right|_{z=-2} = 2\pi i \frac{1}{2} + 2\pi i \frac{e^{-8}}{-2} = \pi i\,(1-e^{-8}).$$

<u>Приклад 4.13.</u> Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^2-1)^2}\,dz$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(z)=\frac{z^3}{(z^2-1)^2}$ аналітична всюди, окрім точок $z_1=1$ й $z_2=-1$, в яких знаменник перетворюється на нуль (особливі точки). Обидві ці точки містяться всередині круга $|z|\le 2$. Оточимо кожну з них довільними замкненими контурами γ_1 й γ_2, достатньо малими, щоб вони не перетиналися один з іншим і цілком містилися всередині круга $|z|\le 2$. Розглянемо трьохзв'язну область, обмежену колом $|z|=2$ й внутрішніми контурами γ_1 й γ_2. За інтегральною теоремою Коші для многозв'язної області маємо

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^2-1)^2}\,dz = \oint\limits_{\gamma_1^-} \frac{z^3}{(z^2-1)^2}\,dz + \oint\limits_{\gamma_2^-} \frac{z^3}{(z^2-1)^2}\,dz.$$

Кожен з інтегралів справа обчислимо за інтегральною формулою Коші у вигляді (4.22). Отримуємо:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^2-1)^2}\,dz = \oint\limits_{\gamma_1^-} \frac{\frac{z^3}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}\,dz + \oint\limits_{\gamma_2^-} \frac{\frac{z^3}{(z-1)^2}}{(z+1)^2}\,dz = 2\pi i\left[\frac{z^3}{(z+1)^2}\right]'\Bigg|_{z=1} +$$

$$+2\pi i\left[\frac{z^3}{(z-1)^2}\right]'\Bigg|_{z=-1} = 2\pi i\left[\frac{3z^2(z+1)-2z^3}{(z+1)^3}\right]\Bigg|_{z=1} + 2\pi i\left[\frac{3z^2(z-1)-2z^3}{(z-1)^3}\right]\Bigg|_{z=-1} =$$

$$= \pi i + \pi i = 2\pi i\,.$$

ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 4

Обчислити інтеграл:

4.1. $\int\limits_L (1+i-2\bar{z})dz$, де L:

а) відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1+i$;

б) дуга параболи $y = x^2$, що з’єднує ті ж самі точки;

в) ламана $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = 1$.

4.2. $\int\limits_C (z^2 + z\bar{z})dz$, де C – верхнє півколо $|z| = 1$ $(\mathrm{Im}\, z \geq 0)$, що обходиться проти ходу годинникової стрілки.

4.3. $\int\limits_L e^{\bar{z}} dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = \pi - i\pi$;

4.4. $\int\limits_L \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}$, де L – праве півколо $|z| = 1$ $(\mathrm{Re}\, z \geq 0)$, $\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.5. $\int\limits_L \frac{Ln^2 z}{z} dz$, де L – чверть кола $|z| = 1$ $(\mathrm{Re}\, z \geq 0,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0)$, $Ln 1 = 2\pi i$.

4.6. $\int\limits_L \sin z\, dz$, де L – дуга кривої $z = t^2 + it$ від точки, де $t = \frac{1}{2}$, до точки, де $t = \frac{3}{2}$.

4.7. $\int\limits_1^i z\sin z\,dz$. **4.8.** $\int\limits_0^i (z-i)e^{-z}dz$. **4.9.** $\int\limits_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$. **4.10.** $\int\limits_{-i}^i ze^{z^2}dz$.

4.11. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+i} \cos z\,dz$.

4.12. $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$.

4.13. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz$.

4.14. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz$.

4.15. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{tgz}{ze^{\frac{1}{z+2}}}dz$.

4.16. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$.

4.17. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz$.

4.18. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

4.19. $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{zdz}{(z-2)^3(z+4)}$.

4.20. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cos\frac{\pi}{z+1}}{z^3}dz$.

4.21. $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}dz$.

4.22. $\oint\limits_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$ а) $C: |z|=\frac{1}{2}$; б) $C: |z|=\frac{3}{2}$; в) $C: |z-1|=\frac{1}{2}$.

4.23. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2-1)^3}$ а) $C: |z-1|=1$; б) $C: |z+1|=1$.

4.24. $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^3(z-1)}dz$.

5. РЯДИ

5.1. Послідовність комплексних чисел. Границя послідовності

Послідовністю комплексних чисел називається однозначне відображення $\varphi(n) = z_n$ множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел у множину $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Послідовність звичайно записують у вигляді $\{z_n\} = z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, де числа $z_1, z_2, \dots$ називаються ***членами*** послідовності, а вираз $z_n = \varphi(n)$ називається ***загальним членом*** послідовності.

Комплексне число a називається ***границею послідовності*** $\{z_n\}$, якщо $\forall \varepsilon > 0$, як завгодно малого, знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, починаючи з якого (тобто при $n \geq N$) усі члени z_n даної послідовності задовольняють нерівності $|z_n - a| < \varepsilon$.

Послідовність $\{z_n\}$, яка має *скінченну* границю, називається ***збіжною до числа*** a. Символічно це записується у вигляді $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Геометричний зміст збіжної послідовності полягає в тому, що у *будь-якому як завгодно малому проколеному* ε*-околі* точки $z = a$ (тобто у крузі радіуса ε з видаленим центром a), починаючи з відповідного номера, містяться *усі* члени послідовності, за виключенням скінченного їх числа.

Послідовність $\{z_n\}$ називається ***збіжною до нескінченно віддаленої точки*** або ***до нескінченності***, якщо для будь-якого, як завгодно великого числа $M > 0$ знайдеться такий номер $N = N(M)$, починаючи з якого (тобто при $n \geq N$) усі члени z_n даної послідовності задовольняють нерівності $|z_n| > M$. Символічно це записується у вигляді $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ і з "геометричної" точки зору означає, що *усі* члени послідовності, починаючи з відповідного номера, знаходяться *поза* будь-якого *як завгодно великого круга* з центром у початку координат, за виключенням скінченного їх числа.

Послідовність, границя якої не є скінченною (нескінченна або взагалі не існує), називається ***розбіжною***. Прикладом можуть служити послідовності $\{z_n\} = \{e^n\} = e, e^2, e^3, \dots$, $\{z_n\} = \{(-1)^n + 1\} = 0, 2, 0, 2, \dots$ або $\{z_n\} = \{\sin n\} = \sin 1, \sin 2, \sin 3, \dots$.

Збіжність послідовності встановлюється наступними теоремами.

Теорема 5.1. Для того, щоб комплексна послідовність $\{z_n\}=\{x_n+i\,y_n\}=$ $=\{x_n\}+i\{y_n\}$ збігалася, необхідно і достатньо, щоб збігалися обидві дійсні послідовності $\{x_n\}$ й $\{y_n\}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\beta$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$, де $a=\alpha+i\beta$.

Послідовність $\{z_n\}$ називається ***обмеженою***, якщо існує таке дійсне число $M>0$, що для *усіх* членів послідовності виконується нерівність $|z_n|\le M$. Це означає, що усі члени послідовності розташовані в замкненому крузі радіуса M з центром у початку координат.

Очевидно, що *якщо послідовність* $\{z_n\}$ *збігається, то вона обмежена*. Доведено також, що *зі всякої обмеженої послідовності можна вилучити збіжну підпослідовність (теорема Вейєрштрасса).*

Теорема 5.2 ***(критерій Коші)***. Послідовність $\{z_n\}$ збігається тоді і тільки тоді, коли $\forall\varepsilon>0$, як завгодно малого, знайдеться такий номер $N=N(\varepsilon)$, що для усіх $n>N$ й $m>N$ виконується нерівність $|z_n-z_m|<\varepsilon$.

<u>Приклад 5.1.</u> Знайти границю послідовності $z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{i\frac{\pi}{n}}$.

Розв'язання. Оскільки $z_n=x_n+iy_n$ й $e^{i\frac{\pi}{n}}=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}$, то

$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cos\frac{\pi}{n}$, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sin\frac{\pi}{n}$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cos\frac{\pi}{n}=e\cdot 1=e$,

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sin\frac{\pi}{n}=e\cdot 0=0$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=e+i\cdot 0=e$.

5.2. Числові ряди

Нехай задана послідовність $\{u_n\}$ комплексних чисел $u_n=x_n+iy_n$, $n\in\mathbb{N}$.

Числовим рядом називається вираз вигляду

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n. \tag{5.1}$$

Числа $u_1, u_2, \ldots$ називаються ***членами ряду***, причому формула $u_n = f(n)$, за якою можна знайти будь-який член ряду, називається ***загальним членом*** ряду (5.1). Наприклад, загальним членом ряду $\frac{3+2i}{3} + \left(\frac{6+5i}{7}\right)^2 + \left(\frac{9+8i}{11}\right)^3 + \ldots$ є $u_n = \left[\frac{3n+(3n-1)i}{4n-1}\right]^n$.

Сума S_n перших n членів ряду називається ***n-ю частинною (частковою) сумою*** ряду

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k . \qquad \textbf{(5.2)}$$

Частинні суми ряду (5.1) утворюють числову комплексну послідовність $\{S_n\}$. Якщо вона збігається, тобто існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad \textbf{(5.3)}$$

то ряд (5.1) називається ***збіжним***, а число S називається ***сумою*** цього ряду. Тому запис (5.3) еквівалентний запису $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$.

Якщо послідовність $\{S_n\}$ розбігається, тобто границя $\lim_{n\to\infty} S_n$ не є скінченною (нескінченна або взагалі не існує), то відповідний ряд називається ***розбіжним***.

Ряд (5.1) можна записати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_k = \sum_{n=1}^{\infty} (x_k + i\, y_k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_k + i \sum_{n=1}^{\infty} y_k . \qquad \textbf{(5.4)}$$

Теорема 5.3. Для того, щоб ряд (5.4) збігався, необхідно і достатньо, щоб одночасно збігалися обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_k$ й $\sum_{n=1}^{\infty} y_k$ з дійсними членами. Тоді $S = S_x + i\,S_y$, де $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $S_x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $S_y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Зауваження. Збіжність кожного з рядів $\sum_{n=1}^{\infty} x_k$ й $\sum_{n=1}^{\infty} y_k$ встановлюється на підставі відомих *ознак збіжності* рядів з *дійсними* членами (звичайна та “гранична” ознаки порівняння, ознака Д’Аламбера, “радикальна” ознака Коші, ознаки Діріхле, Лейбніца та ін.). Зауважимо, що для порівняння часто вибирають так званий ***узагальнений гармонічний ряд*** або ***ряд Діріхле*** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, який *збігається* при $\alpha>1$ і *розбігається* при $\alpha\le 1$; при $\alpha=1$ маємо звичайний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який *розбігається*.

<u>Приклад 5.2.</u> З’ясувати, чи збігаються ряди

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+in}{n^2}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{5^{n^2}}; \qquad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}.$$

Розв’язання.

а) Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+in}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається (*гармонічний ряд*), то на підставі теореми 5.3 заданий ряд також *розбігається* (незважаючи на те, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається як ряд Діріхле при $\alpha=2>1$).

б) Оскільки $\cos in^2=\frac{e^{n^2}+e^{-n^2}}{2}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{5^{n^2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n^2}+e^{-n^2}}{5^{n^2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^2+1}{5e}\right)^{n^2}.$$

Отриманий ряд з дійсними додатними членами збігається за “радикальною” ознакою Коші: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{e^2+1}{5e}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^2+1}{5e}\right)^{n}=0<1$. Тому заданий ряд також *збігається*.

в) Оскільки $e^{i\frac{\pi}{n}}=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n}}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n}}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n}}$ при $n\ge 3$ є рядом з додатними членами, який розбігається за "граничною" ознакою порівняння (порівнюємо з розбіжним *рядом Діріхле* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$). Тому на підставі теореми 5.3 заданий ряд *розбігається*

(незважаючи на те, що ряд з невід'ємними членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n}}$ збігається $\left(\sin\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi}{n}\right.$ при $n\to\infty$, отже, отримуємо *збіжний* ряд Діріхле $\left.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

На підставі теореми 5.3 нескладно довести, що ряди з комплексними членами мають ті ж властивості, що й ряди з дійсними членами.

Теорема 5.4 ***(необхідна ознака збіжності)***. Якщо ряд (5.1) збігається, то $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

Обернене твердження у загальному випадку невірне: якщо $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, то це зовсім не означає, що ряд збігається. Він може і розбігатися. Якщо ж $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то ряд напевно *розбігається* (***достатня умова розбіжності***).

Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$, отриманий з ряду (5.1) відкиданням перших n членів, називається ***n-м залишком*** ряду (5.1). Якщо він збігається, то позначимо його суму r_n, тобто $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$. Тоді, оскільки $S=S_n+r_n$, то $\lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}(S-S_n)=$ $=S-S=0$. Це означає, що *n-й залишок збіжного ряду прямує до* 0 *при* $n\to\infty$.

Теорема 5.5. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ й $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ збігаються і їх суми дорівнюють відповідно S_u і S_v, то для будь-яких чисел λ і μ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)$ також збігається і його сума дорівнює $\lambda S_u+\mu S_v$.

Теорема 5.6. Додавання або відкидання скінченного числа членів не змінює збіжності ряду.

Теорема 5.7 ***(критерій Коші)***. Ряд (5.1) збігається тоді і тільки тоді, коли $\forall \varepsilon > 0$, як завгодно малого, знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для усіх $n \ge N$ й $p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$.

Теорема 5.8. Якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \tag{5.5}$$

складений з *модулів* членів ряду (5.1), то ряд (5.1) також збігається і називається ***абсолютно збіжним***.

Отже, ряд, наведений у прикладі 5.2-б є абсолютно збіжним.

Обернене твердження у загальному випадку невірне, тобто зі збіжності ряду (5.1) збіжність ряду (5.5) ніяк не випливає.

Ряд (5.1) називається ***неабсолютно*** або ***умовно збіжним***, якщо він збігається, в той час як ряд (5.5) розбігається.

Збіжність або розбіжність ряду (5.5) з *дійсними невід'ємними* членами встановлюється на підставі відомих з дійсного аналізу ознак збіжності рядів з додатними членами (звичайна та гранична ознаки порівняння, ознака Д'Аламбера, "радикальна" ознака Коші та ін.). Нагадаємо дві з них.

Ознака Д'Аламбера. Якщо існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = p$, скінченна або нескінченна, то при $p < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, причому абсолютно, а при $p > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається.

"Радикальна" ознака Коші. Якщо існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = p$, скінченна або нескінченна, то при $p < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, причому абсолютно, а при $p > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається.

Зауваження. При $p=1$ обидві ознаки вважаються незастосовними.

Приклад 5.3. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i(-1)^n n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, зовні дуже схожий з *розбіжним* рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+in}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (приклад 5.2-а). Однак, на відміну від останнього, він *збігається*, причому *умовно*. Справді, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається (збіжний ряд Діріхле), причому абсолютно, як ряд з додатними дійсними членами, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ збігається умовно, отже, заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i(-1)^n n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ збігається. В той же час ряд (5.5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1+i(-1)^n n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається (за граничною ознакою порівняння). Тому заданий ряд збігається, але неабсолютно, тобто умовно.

Приклад 5.4. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}$.

Розв'язання. Позначимо $u_n=\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}$ і розглянемо ряд (5.5). Оскільки

$$|u_n|=\left|\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}\right|=\frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{2^n}\,\frac{e^n+e^{-n}}{2}}=2\frac{e^n}{e^{2n}+1},$$

то за "радикальною" ознакою Коші

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|2\frac{e^n}{e^{2n}+1}\right|}=e\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{e^{2n}+1}}=e\cdot\frac{1}{e^2}=\frac{1}{e}<1.$$

Це означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ збігається, отже, заданий ряд також *збігається*, причому *абсолютно*.

5.3. Ряди функцій комплексної змінної. Поняття рівномірної збіжності

Нехай задана послідовність $\{f_n(z)\}$ ($n \in \mathbb{N}$) функцій комплексної змінної, визначених в деякій області D.

Функціональним рядом називається вираз вигляду

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z). \qquad \textbf{(5.6)}$$

Якщо зафіксувати значення $z = z_0$, то отримаємо *числовий* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$, який може збігатися абсолютно чи умовно або розбігатися. Точка $z_0 \in D$ називається ***точкою збіжності (розбіжності)*** ряду (5.6), якщо відповідний числовий ряд збігається (розбігається). При цьому сам ряд (5.6) називається ***збіжним (розбіжним) в точці*** z_0**.** Сукупність $G \subset D$ усіх точок збіжності називається ***областю збіжності*** ряду (5.6). Кожній точці $z \in G$ відповідає певне значення суми $S(z)$ ряду (5.6), отже, *сума ряду є функція, що визначена в області збіжності цього ряду*.

Частинні суми $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ ряду (5.6) утворюють функціональну послідовність $\{S_n(z)\}$. *Збіжність ряду (5.6) в області* G означає існування скінченної границі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$, тобто $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, z) \in \mathbb{N}: \ \forall n > N$ $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$.

Функціональний ряд (5.6) називається ***рівномірно збіжним*** в області G, якщо послідовність його частинних сум збігається в G *рівномірно*, тобто коли $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \wedge \forall z \in G \quad |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$. Це означає, що нерівність виконується *одразу в усіх точках* області G, тобто наближення суми $S(z)$ частинними сумами $S_n(z)$ відбувається *рівномірно* в *усій* області.

Якщо ряд збігається в області G, то це зовсім не означає, що він збігається рівномірно.

Теорема 5.9 ***(ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності)***. Якщо усі члени ряду (5.6) в будь-якій точці z області D задовольняють умові $|f_n(z)| \le a_n$ $(a_n > 0)$ й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то ряд (5.6) збігається в області D абсолютно і рівномірно.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***мажорантним рядом*** для ряду (5.6) або його ***мажорантою***.

<u>Приклад 5.5.</u> Довести рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nz}$ в області $D = \{\operatorname{Re} z \ge \delta > 0\}$.

Доведення. Оскільки $\left|e^{-nz}\right| = e^{-nx}$, де $x = \operatorname{Re} z$, то в області D справедлива нерівність $\left|n^3 e^{-nz}\right| \le n^3 e^{-n\delta}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n\delta}$ при $\delta > 0$ збігається, тому за ознакою Вейєрштрасса заданий функціональний ряд в області D збігається рівномірно.

Зауваження. Ознака Вейєрштрасса є лише *достатньою ознакою* рівномірної збіжності. *Необхідною і достатньою ознакою* є ***критерій Коші***: ряд (5.6) збігається рівномірно в області D тоді і лише тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що для усіх $n \ge N$ й $\forall m \in \mathbb{N}$ одночасно в усіх точках області виконується нерівність $\left|\sum_{k=n}^{n+m} f_k(z)\right| < \varepsilon$.

Рівномірно збіжні ряди мають дуже важливі ***властивості***.

1. Якщо члени ряду (5.6) є *неперервними в області* D функціями й ряд збігається в D рівномірно, то його сума $S(z)$ також *неперервна* в D.
2. Якщо члени ряду (5.6) є неперервними в області D функціями й ряд збігається в D рівномірно до функції $S(z)$, то його можна почленно інтегрувати вздовж будь-якої кривої L, яка цілком лежить в області D, тобто

$$\int_L S(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L f_n(z)dz\,. \tag{5.7}$$

3. Якщо ряд (5.6) рівномірно збігається в області D до функції $S(z)$, а функція $g(z)$ обмежена в D, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g(z) f_n(z)$ рівномірно збігається в D до функції $g(z)S(z)$.

Зауваження. Теорема 5.9 і сформульовані властивості є справедливими не тільки для рядів, які рівномірно збігаються *в області*, але також і для рядів, які рівномірно збігаються *на кривій*.

Наступні теореми, які вперше були доведені К.Вейєрштрассом у 1859 р., стосуються рівномірно збіжних рядів *аналітичних* функцій.

4. **Теорема 5.10** ***(перша теорема Вейєрштрасса)***. Якщо члени ряду (5.6) є *аналітичними в однозв'язній області* D функціями й ряд збігається в D рівномірно, то його сума $S(z)$ також є функцією, *аналітичною* в D.
5. **Теорема 5.11** ***(друга теорема Вейєрштрасса)***. Довільний ряд (5.6), члени якого є *аналітичними в однозв'язній області* D і неперервними в $\overline{D}$ функціями і який збігається в $\overline{D}$ рівномірно, можна почленно диференціювати в D будь-яке число разів.

Зауваження. Для рівномірної збіжності ряду аналітичних функцій в замкненій області $\overline{D}$ достатньо його рівномірної збіжності *на межі* цієї області.

5.4. Степеневі ряди

5.4.1. Поняття степеневого ряду

Частинним випадком функціональних рядів є так звані *степеневі* ряди. Вони відіграють важливу роль не тільки у теоретичних дослідженнях (наприклад, розв'язання диференціальних рівнянь), але й у наближених обчисленнях (за їх допомогою, наприклад, обчислюються значення функцій складної природи і визначених інтегралів).

Степеневим називається функціональний ряд, членами якого є *степеневі* функції *з цілим невід'ємним показником*, тобто ряд вигляду

$$c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \qquad \textbf{(5.8)}$$

де $z_0, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ – задані *комплексні числа*. Числа $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ називаються ***коефіцієнтами***, число c_0 – ***вільним членом***, а z_0 – ***центром*** степеневого ряду. Домовимося n-м членом ряду вважати член з коефіцієнтом c_n, незважаючи на те, що він стоїть на $(n+1)$-му місці. Тоді вільний член будемо вважати "нульовим" членом ряду.

Зауваження. Деякі з коефіцієнтів ряду (5.8) можуть дорівнювати нулю. Якщо залишити *тільки ненульові* члени й *перепозначити* їх, то отримаємо степеневий ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{\varphi(n)}, \qquad \textbf{(5.9)}$$

де показник степеня $\varphi(n)$ *монотонно зростає* і приймає тільки *цілі невід'ємні значення*. На відміну від вихідного ряду, де показник степеня n приймає *усі без виключення* цілі значення від 0 до $+\infty$, тут показник степеня $\varphi(n)$ приймає лише *деякі* з цих значень. Це зауваження буде суттєво враховуватися у подальшому.

5.4.2. Збіжність степеневого ряду. Теорема Абеля

Очевидно, всякий степеневий ряд збігається в точці $z = z_0$ до суми $S = c_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку. Детальніші відомості про характер збіжності степеневих рядів дає наступна теорема, доведена у 1826 р. норвезьким математиком Нільсом Хенриком Абелем (1802-1829).

Теорема 5.12 ***(теорема Абеля)***. Якщо степеневий ряд (5.8) збігається в точці $z = z_1 \neq z_0$, то він збігається всюди всередині відкритого круга $|z-z_0| < |z_1-z_0|$, причому в будь-якому замкненому крузі $|z-z_0| \le r < |z_1-z_0|$ збіжність ряду буде рівномірною.

Доведення. Оскільки ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-z_0)^n$ збігається за умовою теореми, то виконується необхідна умова збіжності, а саме, $\lim_{n\to\infty} c_n(z_1-z_0)^n = 0$. Отже, послідовність $\{c_n(z_1 - z_0)^n\}$ збігається і тому є обмеженою, тобто $\left|c_n(z_1 - z_0)^n\right| = |c_n| \cdot |z_1 - z_0|^n \le M \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Звідси маємо $|c_n| \le \dfrac{M}{|z_1 - z_0|^n}$.

Оберемо довільну точку $z \ne z_0$, яка задовольняє умові $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, тобто лежить всередині відкритого круга радіуса $|z_1 - z_0|$ з центром в точці z_0 (рис. 5.1). Розглянемо в цій точці ряд (5.8). Тоді

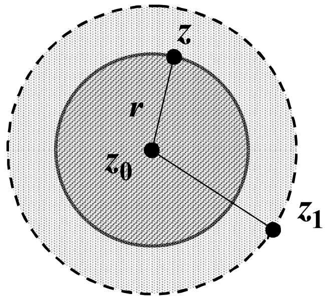

Рис. 5.1

$$\left|c_n(z - z_0)^n\right| = |c_n| \cdot |z - z_0|^n \le \frac{M}{|z_1 - z_0|^n} \cdot |z - z_0|^n.$$

Позначимо $q = \dfrac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}$. Очевидно, що $0 < q < 1$.

Отже,

$$\left|c_n(z - z_0)^n\right| \le Mq^n.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ збігається як ряд спадної геометричної прогресії, то за ознакою Вейєрштрасса (теорема 5.9) ряд (5.8) збігається абсолютно і рівномірно у замкненому крузі радіуса $r = q|z_1 - z_0|$ з центром в точці z_0 (рис. 5.1). Оскільки число q може бути взяте *як завгодно близьким до* 1, то ряд (5.8) збігається *в будь-якій точці* відкритого круга $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ і теорема Абеля доведена.

5.4.3. Наслідки теореми Абеля. Круг та радіус збіжності степеневого ряду

Наслідок 1. Якщо ряд (5.8) розбігається в точці $z = z_2$, то він розбігається для усіх z таких, що $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

Дійсно, припустимо, що ряд *збігається* в будь-якій точці z_3, такій, що $|z_3 - z_0| > |z_2 - z_0|$ (рис. 5.2). Тоді за теоремою Абеля він збігається всюди у відкритому крузі $|z - z_0| < |z_3 - z_0|$, в тому числі і в точці z_2, що суперечить умові.

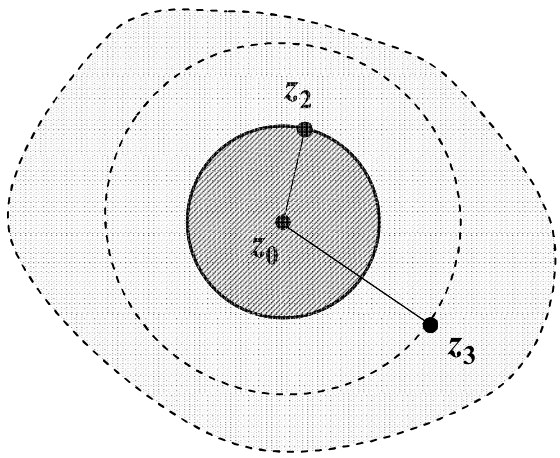

Рис. 5.2

Отже, якщо степеневий ряд (5.8) збігається (абсолютно або умовно) в точці $z = z_1 \neq z_0$, то за теоремою Абеля він збігається *абсолютно* всюди у відкритому крузі радіуса $|z_1 - z_0|$ з центром в точці z_0 (рис. 5.1), причому в будь-якому *замкненому* концентричному крузі, що лежить *всередині*, ряд збігається *рівномірно*. Якщо ж ряд розбігається в деякій точці z_2, то він розбігається *всюди ззовні* замкненого круга радіуса $|z_2 - z_0|$ з центром в точці z_0 (рис. 5.2).

Наслідок 2. З теореми Абеля випливає, що існує круг $|z - z_0| < R$, в кожній точці якого ряд (5.8) збігається, причому абсолютно. В кожній з точок зовнішності $|z - z_0| > R$ круга ряд розбігається, а в точках межі $|z - z_0| = R$ він може як збігатися, так і розбігатися. В будь-якому замкненому крузі $|z - z_0| \le r < R$ ряд збігається рівномірно. Відкритий круг $|z - z_0| < R$ називається ***кругом збіжності***, а радіус R цього круга – ***радіусом збіжності*** степеневого ряду (5.8). Отже, ***область збіжності*** *степеневого ряду складається з його круга збіжності й тих межових точок, у яких ряд збігається хоча б навіть і умовно.* Якщо ряд збігається *у всій комплексній площині*, то домовилися вважати $R = \infty$ (при цьому говорять, що *круг збіжності заповнює усю площину*). Якщо ж ряд збігається тільки в точці z_0, то домовилися вважати $R = 0$ (при цьому говорять, що *круг збіжності вироджується в точку*).

5.4.4. Основні властивості степеневих рядів

Безпосередньо з теорем Вейєрштрасса та Абеля випливають наступні твердження.

1. Сума будь-якого степеневого ряду всередині круга його збіжності є аналітичною функцією.
2. Будь-який степеневий ряд всередині круга його збіжності можна почленно диференціювати довільне число разів, тобто

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z - z_0)^{n-k} \quad (k = 1, 2, ...). \qquad (5.10)$$

3. Будь-який степеневий ряд можна почленно інтегрувати всередині круга його збіжності, тобто

$$\int_{z_0}^{z} S(w)dw = \int_{z_0}^{z} \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - z_0)^n \right] dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n \int_{z_0}^{z} (w - z_0)^n dw \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}. \qquad (5.11)$$

Зауваження. Усі ряди, отримані в результаті диференціювання або інтегрування мають той самий круг збіжності, що й вихідний ряд. Однак збіжність або розбіжність ряду в межових точках круга при вказаних операціях може й не зберігатися.

4. Степеневі ряди $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ й $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$, що збігаються відповідно в кругах $|z - z_0| < R_1$ й $|z - z_0| < R_2$, завжди мають деякий спільний круг збіжності $|z - z_0| < r$, $r = \min\{R_1, R_2\}$, всередині якого можна побудувати збіжні ряди $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda c_n + \mu d_n)(z - z_0)^n$ й $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k} \right) (z - z_0)^n$, причому

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda c_n + \mu d_n)(z - z_0)^n \ (\lambda, \mu = const), \qquad (5.12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k} \right) (z - z_0)^n. \qquad (5.13)$$

5.4.5. Обчислення круга та радіуса збіжності

Наступна теорема, вперше доведена О.Коші у 1821 р., не тільки знов встановлює існування радіуса збіжності степеневого ряду, але й визначає його величину через коефіцієнти ряду.

Теорема Коші-Адамара. Нехай дано степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$. Тоді **а)** якщо числова послідовність $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$ є необмеженою, то ряд розбігається при усіх $z \neq z_0$ ($R=0$); **б)** якщо послідовність $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$ обмежена й $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = l \neq 0$, то $R=\dfrac{1}{l}$; **в)** якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, то ряд збігається при усіх $z \in \overline{C}$ ($R=\infty$).

Формула

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

де $\overline{\lim}$ означає *верхню границю*, називається ***формулою Коші-Адамара*** (Жак Саломон Адамар (1865-1963) – французький математик).

На практиці ж у загальному випадку круг збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ визначається з нерівності

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{c_n(z-z_0)^n}\right| < 1$$

або з нерівності

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|c_n(z-z_0)^n\right|} < 1.$$

Якщо серед коефіцієнтів ряду *немає нульових*, то з цих нерівностей, за умови існування відповідних границь, випливають формули обчислення радіуса збіжності

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad \textbf{(5.14)}$$

або

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \qquad \textbf{(5.15)}$$

Зауваження.

1. Якщо $R=\infty$, то це означає, що ряд збігається при усіх $z \in \overline{C}$.
2. Якщо $R=0$, то це означає, що ряд збігається в єдиній точці $z=z_0$.

3. Якщо серед коефіцієнтів ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ *є нульові*, то границі $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ й $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ не існують і тому формули (5.14) та (5.15) *незастосовні!* Відповідний ряд *зі всіма ненульовими* коефіцієнтами має вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{\varphi(n)}$, де показник степеня $\varphi(n)$ приймає *не усі без виключення* цілі значення від 0 до $+\infty$, а лише *деякі* з них. В цьому випадку *круг* збіжності визначається з нерівності

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-z_0)^{\varphi(n+1)}}{c_n(z-z_0)^{\varphi(n)}}\right|<1$$

або з нерівності

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[\varphi(n)]{\left|c_n(z-z_0)^{\varphi(n)}\right|}<1.$$

Тоді замість формул (5.14) та (5.15) маємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[\alpha]{\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|},\quad \alpha=\varphi(n+1)-\varphi(n) \tag{5.16}$$

або

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[\beta]{|c_n|}},\quad \beta=\varphi(n). \tag{5.17}$$

Вибір формули визначається виглядом коефіцієнтів конкретного ряду.

У частинному випадку лінійної функції $\varphi(n)=kn+m$, де $(k\geq 2)\in\mathbb{N}$, а m – *ціле невід'ємне* число (може дорівнювати 0), формула (5.16) набуває вигляду

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}, \tag{5.18}$$

а формула (5.17) залишається незмінною.

<u>Приклад 5.6.</u> Знайти радіуси та круги збіжності степеневих рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^n(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{in}\right)^{2n^3}(z-2i)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}z^n$.

Розв'язання.

а) Оскільки $|c_n| = \left|\dfrac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)}\right| = \dfrac{|1+i|^n}{|(n+1)(n+2)|} = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{(n+1)(n+2)}$, то за формулою (5.15)

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(\sqrt{2})^n}{(n+1)(n+2)}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, кругом збіжності даного ряду є круг $|z+i| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

б) Оскільки $|c_n| = \left|\left(1+\dfrac{1}{in}\right)\right|^{2n^3} = \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)^{2n^3}$, то за формулою (5.15)

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)^{2n^3}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)^{2n^2}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = \frac{1}{e}.$$

Отже, кругом збіжності даного ряду є круг $|z-2i| < \dfrac{1}{e}$.

в) Оскільки $|c_n| = \dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}$, то за формулою (5.14)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}}{\dfrac{(n+1)![2(n+1)]!}{[3(n+1)]!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} = \frac{27}{4}.$$

Отже, кругом збіжності даного ряду є круг $|z| < \dfrac{27}{4}$.

<u>Приклад 5.7.</u> Знайти радіуси та круги збіжності степеневих рядів

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+5i)^n}{n^n}; \qquad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}(z-1)^n.$$

Розв'язання.

а) Оскільки $|c_n| = \dfrac{1}{n^n}$, то за формулою (5.15) маємо

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}}}=\lim_{n\to\infty} n=\infty.$$

Це означає, що ряд абсолютно збігається в усій комплексній площині, а в будь-якій обмеженій області він збігається рівномірно.

б) За формулою (5.14) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n!}{3^n}}{\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}}}=3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)}=0$. Це означає, що ряд збігається в єдиній точці $z=1$ (круг збіжності вироджується в точку).

Приклад 5.8. Дослідити збіжність степеневого ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^{n+2}n^2\ln n}$.

Розв'язання. За формулою (5.14) маємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3^{n+2}n^2\ln n}}{\dfrac{1}{3^{n+3}(n+1)^2\ln(n+1)}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=3.$$

Отже, ряд збігається в крузі $|z|<3$. Дослідимо поведінку ряду на межі цього круга, тобто на колі $|z|=3$. В точках кола маємо

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{z^n}{3^{n+2}n^2\ln n}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{3^{n+2}n^2\ln n}=\frac{1}{9}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}.$$

Порівняємо отриманий дійсний числовий ряд зі збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. За "граничною" ознакою порівняння $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^2\ln n}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}=0$. Оскільки границя скінченна і дорівнює нулю, то обидва ряди ведуть себе однаково. Це означає, що в кожній точці межі круга збіжності заданий степеневий ряд збігається. Отже, він збігається в замкненому крузі $|z|\le 3$, причому абсолютно, а в будь-якому замкненому крузі $|z|\le r<3$ він збігається рівномірно.

Приклад 5.9. Знайти радіус та круг збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\frac{(2n)!(z-2i)^{2n+3}}{(n!)^2}.$$

Розв'язання. Тут $\varphi(n)=2n+3$. Радіус збіжності визначимо за формулою (5.18) при $k=2$:

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+2)(n+1)}{n(n+3)}\right]^n\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Отже, ряд збігається в крузі $|z-2i|<\frac{1}{2}$.

<u>Приклад 5.10.</u> Дослідити збіжність степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,z^{n^2}}{n^n}$.

Розв'язання. Тут $\varphi(n)=n^2$. Круг збіжності визначимо, користуючись ознакою Д'Аламбера, тобто з нерівності $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-z_0)^{\varphi(n+1)}}{c_n(z-z_0)^{\varphi(n)}}\right|<1$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!\,z^{(n+1)^2}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!\,z^{n^2}}{n^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|z|^{2n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(n+1)}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}|z|^{2n+1}<1,$$

звідки $|z|<\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{e}=1$. Отже, ряд збігається в крузі $|z|<1$. В точках межі (на колі $|z|=1$) маємо дійсний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, який збігається за ознакою

Д'Аламбера: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(n+1)}=\frac{1}{e}<1$. Тому заданий

степеневий ряд збігається абсолютно в замкненому крузі $|z|\le 1$, а в будь-якому замкненому крузі $|z| \leq r < 1$ він збігається рівномірно.

Зауваження. Якщо скористатися формулою (5.17), то будемо мати

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\dfrac{n!}{n^n}}}.$$

Позбавимось від факторіала за *формулою Стірлінга:*

$$n! \to \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ при } n \to \infty.$$

Тоді отримаємо

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\frac{n^n}{\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{\sqrt[2n^2]{2\pi n}} = 1.$$

Отже, ряд збігається в крузі $|z| < 1$, що співпадає з раніше отриманим.

5.5. Ряд Тейлора. Розвинення аналітичних функцій в степеневі ряди

Раніше було встановлено, що сума усякого степеневого ряду всередині круга його збіжності є аналітичною функцією. В цьому випадку говорять, що степеневий ряд в крузі збіжності визначає певну аналітичну функцію – суму цього ряду. Природно виникає питання: а чи може, навпаки, функція, аналітична всередині деякого круга, бути в цьому крузі сумою певного степеневого ряду, тобто визначати такий ряд? Ствердна відповідь на це питання випливає з наведених нижче теорем.

Теорема 5.13 ***(теорема Тейлора)***. Якщо функція $f(z)$ аналітична в деякому відкритому крузі $|z - z_0| < r$, то в цьому крузі її можна подати у вигляді збіжного степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \qquad \textbf{(5.19)}$$

Коефіцієнти (5.19) називаються ***коефіцієнтами Тейлора функції $f(z)$ в***

точці z_0, а сам ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ називають ***рядом Тейлора функції*** $f(z)$ ***з центром в точці*** z_0 на честь англійського математика Брука Тейлора (1685-1731), в роботі якого (1715 р.) вперше зустрічається аналогічний ряд для дійсної змінної. Ряд Тейлора з центром в точці $z_0 = 0$ називають ***рядом Маклорена*** за прізвищем англійського математика Коліна Маклорена (1698-1746), який у 1742 р. вперше систематично застосував подібні ряди.

Подання функції деяким рядом називають ***розвиненням*** цієї ***функції в*** даний ***ряд***, отже запис

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad \textbf{(5.20)}$$

називається ***розвиненням функції*** $f(z)$ ***в ряд Тейлора в околі точки*** z_0 (або ***за степенями різниці*** $z-z_0$). При цьому також говорять, що функція $f(z)$ ***подається*** відповідним рядом Тейлора.

Теорема 5.14 ***(теорема єдиності розвинення функції в степеневий ряд)***.

Якщо функція $f(z)$ в деякому відкритому крузі з центром в точці z_0 може бути розвинена у степеневий ряд, то коефіцієнти цього ряду *однозначно* визначаються за формулами (5.19).

Отже, *якщо розвинення функції* $f(z)$ *в степеневий ряд в деякому відкритому крузі взагалі можливе, то воно єдине і є розвиненням цієї функції саме у відповідний ряд Тейлора і в ніякий інший.* Інакше кажучи, *знайдене будь-яким способом розвинення функції у степеневий ряд, якщо воно існує, обов'язково є розвиненням цієї функції у відповідний ряд Тейлора.*

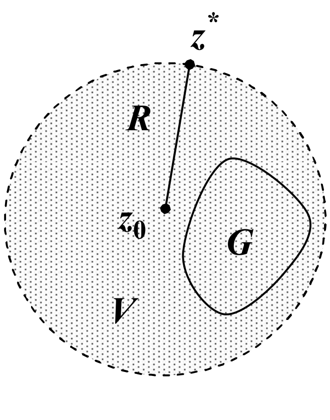

Рис. 5.3

Теорема єдиності є теоретичним обгрунтуванням усіх існуючих прийомів і методів розвинення функцій в степеневі ряди. Фундаментальне значення також має теорема, яка була доведена О.Коші у 1831 р.

Теорема 5.15 ***(теорема Коші)***. *В будь-якому* відкритому крузі $V = \{|z-z_0| < R\}$, у якому функція $f(z)$ аналітична, вона подається відповідним рядом Тейлора (5.20). В усякій *замкненій* області $G \subset V$ ряд

Тейлора збігається *рівномірно*.

Наслідок. Радіус $\boldsymbol{R}$ збіжності ряду Тейлора визначається відстанню від центру z_0 до *найближчої* до нього особливої точки z^* функції $f(z)$ (рис. 5.3), тобто $R = R(z_0, z^*) = \left| z^* - z_0 \right|$.

Зауваження.

1. З останнього також випливає, що межа круга збіжності ряду Тейлора містить *хоча б одну* особливу точку функції $f(z)$.

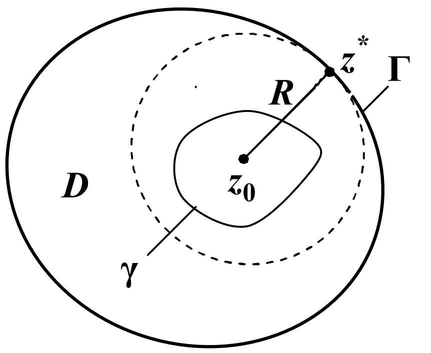

Рис. 5.4

2. Якщо функція $f(z)$ аналітична *всюди в області* $\boldsymbol{D}$, межею якої є $\boldsymbol{\Gamma}$, й z_0 – довільна *внутрішня* точка цієї області, то найближча особлива точка z^* функції $f(z)$ належить $\boldsymbol{\Gamma}$ (рис. 5.4), оскільки $\boldsymbol{\Gamma}$ складається суцільно з таких точок.

3. На підставі формули Коші для похідних (4.21) коефіцієнти (5.19) ряду Тейлора можна також подати у вигляді (***формули Коші для коефіцієнтів ряду Тейлора***)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \qquad \textbf{(5.21)}$$

де γ – довільний замкнений контур, який цілком належить кругу $\left| z - z_0 \right| < R$ і охоплює точку z_0.

Наведені теореми встановлюють взаємно-однозначну відповідність між функцією, аналітичною в околі деякої точки, й степеневим рядом з центром в цій точці. Це, в свою чергу, означає *рівносильність* понять функції, аналітичної в точці, даного у п.3.3 і наступного: ***однозначна функція називається аналітичною в деякій точці, якщо в околі цієї точки вона може бути подана у вигляді відповідного ряду Тейлора***.

На практиці при розвиненні конкретної функції $f(z)$ в ряд Тейлора з центром в заданій точці z_0 користуються різними способами. Один з них, який називається *способом безпосереднього розвинення*, полягає у відшуканні значень похідних $f^{(k)}(z_0)$ і формальному складанні відповідного ряду Тейлора з подальшим встановленням його круга збіжності. Цей спосіб доволі складний і громіздкий, тому звичайно його застосовують, коли потрібно знайти лише декілька перших членів ряду. Формулу загального члену ряду, яка містить $f^{(n)}(z_0)$, вдається знайти тільки для дуже обмеженої кількості функцій з відносно простими похідними. В переважній більшості випадків користуються іншими способами розвинення, що передбачають використання так званих *найпростіших розвинень*, тотожних перетворень заданої функції і різноманітних штучних прийомів. Також досить часто дуже корисним виявляється застосування властивостей степеневих рядів. Все це дозволяє отримувати розвинення багатьох функцій не тільки в ряд Маклорена, але й в ряд Тейлора.

Найпростішими розвиненнями називають відомі розвинення в ряд Маклорена основних елементарних функцій. Наведемо ***таблицю найпростіших розвинень*** (у дужках вказані області збіжності відповідних рядів):

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{5.22}$$

$$a^z = e^{z \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} z^n, \tag{5.23}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{5.24}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{5.25}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{5.26}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{5.27}$$

(***збігаються в усій комплексній площині***);

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \tag{5.28}$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)}{n!}z^n, \quad (5.29)$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad (5.30)$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n, \quad (5.31)$$

$$\sqrt{1+z}=1+\frac{z}{2}-\frac{1}{2\cdot 4}z^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}z^3-\ldots=1+\frac{z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}z^{n+1}, \quad (5.32)$$

$$\arcsin z=z+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7}+\ldots=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad (5.33)$$

$$\operatorname{arctg} z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad (5.34)$$

$$\operatorname{arsh} z=z-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7}+\ldots=z+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad (5.35)$$

$$\operatorname{arth} z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad (5.36)$$

(***збігаються в крузі*** $|z|<1$).

Зауваження.

1. Формула (5.28) дає розвинення в ряд Маклорена *головного значення* логарифма. Щоб отримати ряд для інших значень многозначної функції $\mathbf{Ln}(1+z)$, слід, у відповідності з формулою (2.10), до ряду (5.28) додавати числа $2k\pi i$ ($k\in\mathbb{Z}$), тобто

$$\mathbf{Ln}(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots+2k\pi i \ (k\in\mathbb{Z}).$$

2. Радіус збіжності *біноміального ряду* залежить від показника степеня α, а саме, якщо α – довільне комплексне число, то ряд збігається в крузі $|z|<1$, в частинному ж випадку натурального $\alpha=n$ ряд обривається на n-му члені, отже, *збігається в усій площині*.

Наведемо деякі приклади.

Приклад 5.11. Знайти п’ять перших, відмінних від нуля, членів розвинення в ряд Маклорена функції $f(z)=e^z\cos z$ та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв’язання. Фактично задача зводиться до відшукання п’яти перших ненульових коефіцієнтів ряду $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\dots$, де $c_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $(n=0,1,2,\dots)$.

I спосіб полягає у безпосередньому відшуканні значень похідних $f^{(n)}(0)$ в точці $z=0$. Маємо:

$$f^{(0)}(z)=f(z)=e^z\cos z, \qquad c_0=\frac{1}{0!}f^{(0)}(0)=f(0)=1,$$

$$f'(z)=e^z\cos z-e^z\sin z=e^z(\cos z-\sin z), \qquad c_1=\frac{1}{1!}f'(0)=1,$$

$$f''(z)=e^z(\cos z-\sin z)-e^z(\sin z+\cos z)=$$

$$=-2e^z\sin z, \qquad c_2=\frac{1}{2!}f''(0)=0,$$

$$f'''(z)=-2e^z(\sin z+\cos z), \qquad c_3=\frac{1}{3!}f'''(0)=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3},$$

$$f^{(4)}(z)=-4e^z\cos z, \qquad c_4=\frac{1}{4!}f^{(4)}(0)=-\frac{4}{24}=-\frac{1}{6},$$

$$f^{(5)}(z)=-4e^z(\cos z-\sin z), \qquad c_5=\frac{1}{5!}f^{(5)}(0)=-\frac{4}{120}=-\frac{1}{30}.$$

Отже,

$$f(z)=e^z\cos z=1+z-\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{6}z^4-\frac{1}{30}z^5+\dots.$$

II спосіб полягає у множенні рядів (5.22) й (5.25) безпосередньо або за формулою (5.13).

III спосіб полягає у застосуванні тотожності

$$e^z\cos z=e^z\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\left[e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z}\right].$$

Тоді на підставі (5.22) маємо $e^{(1\pm i)z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(1\pm i)^n z^n}{n!}$ і, оскільки за формулою

Муавра $(1\pm i)^n=\sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}\pm i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$, то шукане розвинення має вигляд

$$e^z\cos z=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2^n}}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}z^n=$$

$$=1+z-\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{6}z^4-\frac{1}{30}z^5+\ldots.$$

Оскільки задана функція не має особливих точок, то радіус збіжності отриманого ряду $R=\infty$. Це означає, що отримане розвинення справедливе в усій комплексній площині.

<u>Приклад 5.12.</u> Розвинути функцію $f(z)=z^4\sin(3z^2)$ в ряд Маклорена та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв'язання. Безпосереднє розвинення приведе до громіздких обчислень. Тому скористаємось відомим розвиненням (5.24) в ряд Маклорена функції $\sin z$, в якому замінимо z на $3z^2$, і отриманий ряд почленно помножимо на z^4:

$$\sin(3z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3z^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}z^{4n+2}}{(2n+1)!},$$

$$f(z)=z^4\sin(3z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}z^{4n+6}}{(2n+1)!}=3z^6-\frac{9}{2}z^{10}+\frac{81}{40}z^{14}-\ldots.$$

Отримане розвинення справедливе в усій комплексній площині.

В деяких випадках розвинення функції в степеневий ряд можна отримати, просумувавши табличні розвинення або раніше знайдені. При цьому іноді треба тотожно перетворити функцію таким чином, щоб подати її у вигляді зручної комбінації функцій, розвинення яких відомі.

<u>Приклад 5.13.</u> Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(z)=\frac{2z-5}{z^2-5z+6}$ та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв'язання. Задана функція є правильним раціональним дробом. У відповідності із розкладом знаменника на множники $z^2-5z+6=(z-2)(z-3)$ подамо її у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=\frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-3},\quad\text{звідки}\quad 2z-5=A(z-3)+B(z-2).$$

Невідомі коефіцієнти A і B знайдемо з системи рівнянь $\begin{array}{l|l} z=2 & -1=-A, \\ z=3 & 1=B. \end{array}$

Отже, $A=B=1$ й $f(z)=\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}=\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{z-3}$. Кожен з отриманих найпростіших дробів після нескладного тотожного перетворення розвинемо в ряд Маклорена за допомогою відомого розвинення (5.31):

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \quad \left(\left|\frac{z}{2}\right|<1\Rightarrow|z|<2\right),$$

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n \quad \left(\left|\frac{z}{3}\right|<1\Rightarrow|z|<3\right).$$

Отже,

$$\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n=-\frac{5}{6}-\frac{13}{36}z-\frac{35}{216}z^2-\dots.$$

Найближчою до точки $z=0$ особливою точкою функції $f(z)$ є точка $z=2$, тому $R=2$. Отже, отримане розвинення справедливе в крузі $|z|<2$ (він, як неважко бачити, є спільним кругом збіжності обох рядів – див. п.5.4.4, властивість 4).

<u>Приклад 5.14.</u> Розвинути в ряд Тейлора в околі точки $z_0=4$ (за степенями різниці $z-4$) функцію $f(z)=\ln(z^2+4z-5)$ та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв'язання. Перетворимо тотожно задану функцію, виділяючи різницю $z-4$:

$$f(z)=\ln(z^2+4z-5)=\ln[(z-1)(z+5)]=\ln\{[3+(z-4)][9+(z-4)]\}=$$
$$=\ln\left[27\left(1+\frac{z-4}{3}\right)\left(1+\frac{z-4}{9}\right)\right]=\ln 27+\ln\left(1+\frac{z-4}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{z-4}{9}\right).$$

Скористаємось розвиненням (5.28), в якому замінимо z на $\dfrac{z-4}{3}$ й на $\dfrac{z-4}{9}$. Отримаємо

$$\ln\left(1+\frac{z-4}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-4)^n}{n3^n} \quad \left(\left|\frac{z-4}{3}\right|<1\Rightarrow|z-4|<3\right),$$

$$\ln\left(1+\frac{z-4}{9}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-4)^n}{n9^n} \quad \left(\left|\frac{z-4}{9}\right|<1 \Rightarrow |z-4|<9\right).$$

Отже,

$$f(z)=\ln(z^2+4z-5)=\ln 27+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1+3^n}{n9^n}(z-4)^n=$$

$$=\ln 27+\frac{4}{9}(z-4)-\frac{5}{9^2}(z-4)^2+\frac{28}{3\cdot 9^3}(z-4)^3-\ldots .$$

Найближчою до точки $z_0=4$ особливою точкою функції $f(z)$ є точка $z=1$, тому $R=3$. Отже, отримане розвинення справедливе в крузі $|z|<3$, який є спільним кругом збіжності рядів $\ln\left(1+\dfrac{z-4}{3}\right)$ й $\ln\left(1+\dfrac{z-4}{9}\right)$.

5.6. Ряд Лорана. Подання аналітичних функцій рядами Лорана

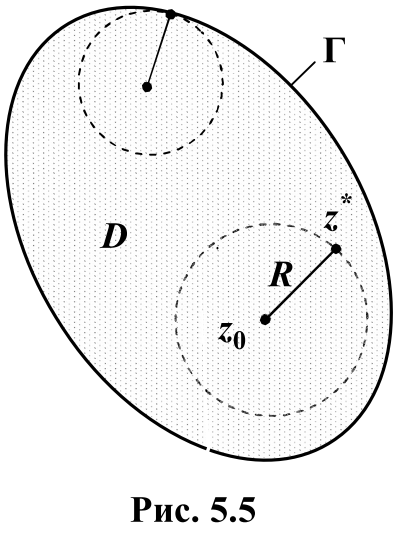

Рис. 5.5

Раніше було встановлено, що (однозначна) функція $f(z)$, аналітична у відкритому крузі $|z-z_0|<R$, радіус якого $R=R(z_0,z^*)=|z^*-z_0|$, де z^* – найближча до центру z_0 особлива точка функції $f(z)$, подається в цьому крузі відповідним рядом Тейлора, і таке подання є єдиним.

Це залишається вірним і тоді, коли функція $f(z)$ аналітична в деякій відкритій області D за винятком *ізольованих особливих точок*, а точка $z_0\in D$ – *правильна* (див. п.3.3). В цьому випадку радіус збіжності R відповідного ряду Тейлора також дорівнює відстані від точки z_0 до найближчої особливої точки, яка може бути або ізольованою, або найближчою точкою межі Γ області D (рис. 5.5).

Якщо ж точка z_0 є *особливою*, то подання функції *у крузі* з центром в z_0 звичайним рядом Тейлора взагалі неможливе. В цьому випадку необхідно розглядати *проколений окіл* ізольованої особливої точки z_0, а саме, *кільцеву* *область* вигляду $0<|z-z_0|<R$. Функція у такій області буде подаватися вже дещо іншим рядом. Можливість такого подання встановлюється наступною теоремою, яка вперше (у 1841 р.) була отримана К.Вейєрштрассом, але опублікована ним лише у 1894 р. Тому теорема носить ім'я французького математика П'єра Лорана (1813-1854), який опублікував її раніше (у 1843 р.).

Теорема 5.16 ***(теорема Лорана)***. Якщо функція $f(z)$ аналітична в деякому круговому кільці $K=\{0\le r<|z-z_0|<R\le\infty\}$, то в цьому кільці її можна подати збіжним степеневим рядом

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \tag{5.37}$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}},\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{5.38}$$

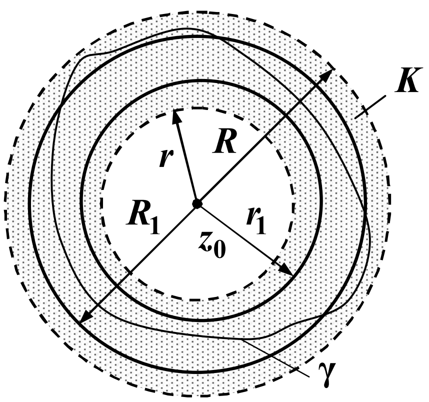

Рис. 5.6

де $\gamma\in K$ – довільний *замкнений контур*, що охоплює внутрішнє коло $|z-z_0|=r$ (рис. 5.6). В будь-якій *замкненій області*, що цілком належить кільцю K і охоплює внутрішнє коло, ряд (5.37) збігається *рівномірно*.

Зауваження. У частинному випадку γ – коло $|z-z_0|<\rho$, де $r<\rho<R$.

Узагальнений степеневий ряд (5.37) за цілими степенями різниці $z-z_0$ (як невід'ємними, так і від'ємними), коефіцієнти якого визначаються за формулами (5.38), називається ***рядом Лорана функції $f(z)$ з центром в точці z_0***.

Сукупність членів ряду з *невід'ємними* степенями

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \tag{5.39}$$

називається ***правильною частиною*** ряду Лорана, члени ж з *від'ємними* степенями утворюють його ***головну частину*** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-z_0)^n$. Надалі будемо записувати її у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}. \tag{5.40}$$

Очевидно, що коли головна частина відсутня ($C_{-n} = 0, \quad n = 1, 2, ...$), то ряд Лорана перетворюється на ряд Тейлора.

Запис

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \tag{5.41}$$

або
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \tag{5.42}$$

називається ***розвиненням функції $f(z)$ в ряд Лорана з центром в точці z_0*** (або ***в околі точки z_0***). При цьому також говорять, що ***функція $f(z)$ подається відповідним рядом Лорана***.

Правильна частина (5.39) ряду Лорана збігається абсолютно в крузі $|z-z_0| < R$ до деякої функції $f_1(z)$, причому в будь-якому замкненому крузі $|z-z_0| \le R_1$, де $R_1 < R$, правильна частина збігається рівномірно (рис. 5.6). Головна частина (5.40) ряду Лорана після заміни змінної $\frac{1}{z-z_0} = Z$ перетворюється на звичайний степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} Z^n$, який у крузі $|Z| < \frac{1}{r}$ збігається абсолютно до функції $\varphi(Z)$. Після повернення до попередньої змінної в припущенні $\varphi(Z) = f_2(z)$ отримаємо, що головна частина ряду Лорана збігається абсолютно *поза* внутрішнього круга, тобто в області $|z-z_0| > r$ (при умові, що *існує скінченна границя* $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|C_{-n-1}|}{|C_{-n}|}$), причому в будь-якій області $|z-z_0| \ge r_1$, де $r_1 > r$, головна частина збігається *рівномірно*. Ряд Лорана збігається до функції $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ тоді і тільки тоді, коли *одночасно* збігаються *обидві* його частини. Це можливе лише у спільній частині обох областей $|z-z_0| < R$ й $|z-z_0| > r$, тобто у круговому кільці $K = \{\, 0 \le r < |z-z_0| < R \le \infty \}$, де функція $f(z)$ аналітична. У випадку $r \ge R$ це кільце може виявитися порожнім, причому при $r = R$ множиною збіжності може бути будь-яка множина на колі $|z-z_0| = r$. В усіх точках кільця збіжності ряд Лорана збігається абсолютно. В будь-якій замкненій області $\{ r_1 \le |z-z_0| \le R_1, \quad r_1 > r, \ R_1 < R\}$, що належить кільцю K і охоплює внутрішнє коло (рис. 5.6), ряд збігається рівномірно.

Поведінка ряду Лорана в точках межових кіл може бути різноманітною. Область збіжності складається з кільця збіжності K й тих точок його межових кіл, де ряд збігається.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в проколеному околі *нескінченно віддаленої точки* $z_0 = \infty$, тобто у кільці $r < |z| \le \infty$, то в цьому кільці $f(z)$ подається збіжним рядом Лорана, отже, відповідне розвинення має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}. \tag{5.43}$$

Коефіцієнти цього ряду обчислюються за формулами

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{5.44}$$

де γ – довільний замкнений контур, що охоплює внутрішнє коло $|z| = r$. *Головна частина* ряду Лорана в околі *нескінченно віддаленої* точки має вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$, який *протилежний* вигляду головної частини ряду Лорана в околі *скінченної* точки z_0, але обидві вони складаються з тих і тільки тих членів, які прямують до нескінченності при $z \to \infty$ ($z \to z_0$). Правильна частина $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}$ також має вигляд, *протилежний* вигляду правильної частини ряду (5.42).

Функція $f(z)$ називається ***аналітичною у нескінченно віддаленій точці*** $z_0 = \infty$, якщо ця функція аналітична в кільці $r < |z| \le \infty$ і існує скінченна границя $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$.

Якщо $r < R$, то справедлива наступна теорема.

Теорема 5.17 ***(теорема єдиності розвинення функції в степеневий ряд)***.

Якщо функція $f(z)$ в деякому кільці $r < |z-z_0| < R$ може бути подана рядом (5.37), то вона аналітична в цьому кільці і таке подання є єдиним.

З наведених теорем випливає, що якщо функція, аналітична в деякому кільці, може бути розвинена у ньому в ряд за цілими степенями різниці $z - z_0$, то цей ряд є відповідним рядом Лорана даної функції і ніяким іншим. Інакше кажучи, *знайдене будь-яким способом розвинення аналітичної функції в ряд за цілими степенями, якщо таке розвинення існує, обов'язково буде розвиненням цієї функції у відповідний ряд Лорана.*

З формул (5.38) випливають наступні *оцінки коефіцієнтів ряду Лорана* – ***нерівності Коші***: якщо функція $f(z)$ обмежена на колі $\gamma_\rho = \{|z - z_0| = \rho,\ r < \rho < R\}$, причому $M = \max\limits_{z \in \gamma_\rho} |f(z)|$, то

$$|C_n| \le \frac{M}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5.45}$$

Вкажемо деякі ***властивості ряду Лорана***.

1. Сума ряду Лорана є аналітичною функцією всередині кільця K.
2. Ряд Лорана можна почленно диференціювати будь-яке число раз і інтегрувати всередині кільця збіжності. Усі отримані при цьому ряди мають те ж саме кільце збіжності, що й вихідний ряд. Поведінка ряду в точках межових кіл може змінюватися.
3. У кожному з межових кіл кільця збіжності $0 \le r < |z - z_0| < R \le \infty$ ряду Лорана міститься щонайменше одна особлива точка його суми.

На практиці при побудові розвинень функцій в ряди Лорана формули (5.38) для обчислення коефіцієнтів ряду застосовуються вкрай рідко, оскільки вони приводять до доволі громіздких викладок. Зазвичай замість цього, якщо це можливо, застосовуються ті ж способи, що й при розвиненні в ряди Тейлора, а саме, тотожні перетворення заданої функції, застосування найпростіших розвинень і властивостей степеневих рядів, зокрема, почленне диференціювання і інтегрування, арифметичні операції зі збіжними рядами і т.ін.

Приклад 5.15. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^n (z+1)^n}$.

Розв'язання. Тут $C_{-n} = \dfrac{1}{4^n}$, $z_0 = -1$. Тоді $C_{-n-1} = \dfrac{1}{4^{n+1}}$ і

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{|C_{-n-1}|}{|C_{-n}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}.$$

Отже, заданий ряд збігається абсолютно при $|z+1| > \frac{1}{4}$. В точках межі круга $|z+1| = \frac{1}{4}$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\frac{1}{4^n}} = \sum_{n=1}^{\infty}1$, який розбігається. Тому заданий ряд збігається абсолютно в круговому кільці $|z+1| > \frac{1}{4}$, причому в будь-якому концентричному кільці $\frac{1}{4} < r < |z+1| < R < \infty$ він збігається рівномірно.

<u>Приклад 5.16.</u> Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$.

Розв'язання. Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z+1)^n}$ маємо $C_{-n} = 2^{n-1}$, $z_0 = -1$. Тоді $C_{-n-1} = 2^n$ і $r = \lim_{n\to\infty}\frac{|C_{-n-1}|}{|C_{-n}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$. Отже, цей ряд збігається абсолютно в кільці $|z+1| > 2$. На межі $|z+1| = 2$ області, як неважко перевірити, ряд розбігається.

Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$ маємо $C_n = \frac{1}{(i+n)^n}$. Тоді $C_{n+1} = \frac{1}{(i+n+1)^{n+1}}$ і

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(i+n+1)^{n+1}}{(i+n)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{i+n+1}{i+n}\right)^n \lim_{n\to\infty}(i+n+1) = e\cdot\infty = \infty.$$

Отже, цей ряд збігається в усій комплексній площині. Обидва ряди одночасно збігаються в кільці $|z+1| > 2$, тому заданий ряд в цьому кільці збігається абсолютно, причому в будь-якому концентричному кільці $2 < r < |z+1| < R < \infty$ він збігається рівномірно.

<u>Приклад 5.17.</u> Розвинути функцію $f(z) = \frac{1}{z}\sin^2\frac{2}{z}$ в ряд Лорана в кільці $0 < |z| < 5$.

Розв'язання. Точка $z_0 = 0$ є особливою точкою заданої функції, отже, в кільці $0 < |z| < 5$ $f(z)$ аналітична і однозначно подається відповідним рядом Лорана за степенями z. Скористаємось формулою тригонометрії $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$ і відомим розвиненням (5.25) в ряд Маклорена функції $\cos z$. Отримаємо

$$\sin^2\frac{2}{z} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4}{z}\right) = \frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{4^2}{2!\,z^2}+\frac{4^4}{4!\,z^4}-\ldots+(-1)^n\frac{4^{2n}}{(2n)!\,z^{2n}}+\ldots\right)\right].$$

Тоді шуканий ряд Лорана має вигляд

$$f(z) = \frac{1}{z}\sin^2\frac{2}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{4^2}{2!\,z^3}-\frac{4^4}{4!\,z^5}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{4^{2n}}{(2n)!\,z^{2n+1}}+\ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^{2n}}{(2n)!\,z^{2n+1}}.$$

Зауваження. Оскільки задана функція не має інших особливих точок, окрім $z_0 = 0$, то отримане розвинення справедливе при усіх $z \neq 0$. Це означає, що ряд Лорана збігається до $f(z)$ в усій комплексній площині з видаленою точкою $z = 0$, причому *в будь-якому* кільці $0 < r < |z| < R < \infty$ він збігається *рівномірно*.

<u>Приклад 5.18.</u> Розвинути функцію $f(z) = ze^{\frac{1}{z+i}}$ в ряд Лорана в околі її особливої точки.

Розв'язання. Особливою точкою є $z_0 = -i$. Тотожно перетворимо задану функцію $ze^{\frac{1}{z+i}} = (z+i)e^{\frac{1}{z+i}} - ie^{\frac{1}{z+i}}$ і скористаємось відомим розвиненням (5.22) функції e^z в ряд Маклорена. Отримаємо

$$e^{\frac{1}{z+i}} = 1+\frac{1}{z+i}+\frac{1}{2!(z+i)^2}+\frac{1}{3!(z+i)^3}+\ldots = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(z+i)^n},$$

$$(z+i)e^{\frac{1}{z+i}} = z+i+1+\frac{1}{2!(z+i)}+\frac{1}{3!(z+i)^2}+\ldots = z+i+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!(z+i)^n}.$$

Розвинення заданої функції в ряд Лорана в околі точки $z_0 = -i$ має вигляд

$$f(z)=(z+i)e^{\frac{1}{z+i}}-ie^{\frac{1}{z+i}}=z+i+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!(z+i)^n}-i-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(z+i)^n}=$$

$$=z+1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{i}{n!}\right]\frac{1}{(z+i)^n}=z+1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-i-in}{(n+1)!}\right]\frac{1}{(z+i)^n}.$$

Оскільки задана функція не має інших особливих точок, окрім $z_0=-i$, то отримане розвинення справедливе при усіх $z\neq -i$. Це означає, що ряд Лорана збігається до $f(z)$ в усій комплексній площині з видаленою точкою $z_0=-i$, причому *в будь-якому* кільці $0<r<\left|z+i\right|<R<\infty$ він збігається *рівномірно*.

<u>Приклад 5.19.</u> Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{z-7}{z^2-4z+3}$

а) в околах її особливих точок; б) в крузі $|z|<1$; в) в околі точки $z=2$;

г) в кільці $1<|z|<3$; д) у зовнішності круга $|z|\le 3$ (рис. 5.7).

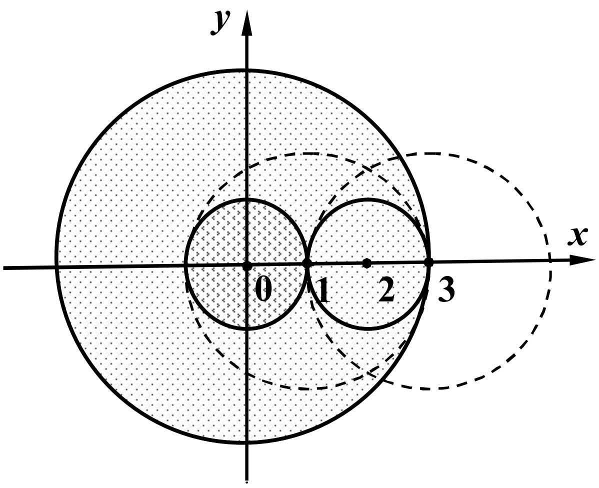

Рис. 5.7

Розв'язання. Особливими точками заданої функції є $z_1=1$ й $z_2=3$ (нулі знаменника). Їх околи зображені на рис. 5.7 (відповідно лівий і правий круги з пунктирною межею). Інші області також показані на цьому рисунку.

а)

1. *Окіл особливої точки* $z_1=1$. Проколеним околом точки $z=1$ є кільце $0<|z-1|<2$, в якому функція $f(z)$ аналітична і тому однозначно подається відповідним рядом Лорана за степенями різниці $z-1$. Радіус цього околу $R=2$ визначається відстанню від центру $z=1$ до найближчої особливої точки $z_2=3$.

Перетворимо задану функцію на суму найпростіших дробів:

$$\frac{z-7}{z^2-4z+3}=\frac{z-7}{(z-1)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-3},\quad \text{звідки}\quad z-7=A(z-3)+B(z-1).$$

Невідомі коефіцієнти A і B знайдемо з системи рівнянь $\begin{array}{l|l} z=1 & -6=-2A, \\ z=3 & -4=2B. \end{array}$

Отже, $A = 3$, $B = -2$ й $f(z) = \dfrac{z-7}{z^2 - 4z + 3} = \dfrac{3}{z-1} - \dfrac{2}{z-3}$. Перший доданок має потрібний вигляд (виражений через степінь різниці $z-1$). Другий доданок після нескладного тотожного перетворення розвинемо в ряд Тейлора в околі точки $z = 1$ за допомогою відомого розвинення (5.31):

$$-\frac{2}{z-3} = \frac{1}{1 - \dfrac{z-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2} \right)^n.$$

Отже, в околі особливої точки $z = 1$ ряд Лорана функції $f(z)$ має вигляд

$$\frac{z-7}{z^2 - 4z + 3} = \frac{3}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (z-1)^n.$$

2. *Окіл особливої точки* $z_2 = 3$. Проколеним околом точки $z = 3$ є кільце $0 < |z-3| < 2$, в якому функція $f(z)$ аналітична і тому однозначно подається відповідним рядом Лорана за степенями різниці $z-3$. Радіус цього околу $R = 2$ визначається відстанню від центру $z = 3$ до найближчої особливої точки $z_1 = 1$.

Раніше було знайдено $f(z) = \dfrac{z-7}{z^2 - 4z + 3} = \dfrac{3}{z-1} - \dfrac{2}{z-3}$. Другий доданок має потрібний вигляд (виражений через степінь різниці $z-3$). Перший доданок після тотожного перетворення розвинемо в ряд Тейлора в околі точки $z = 3$ за допомогою відомого розвинення (5.30):

$$\frac{3}{z-1} = \frac{3}{2} \frac{1}{1 + \dfrac{z-3}{2}} = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-3}{2} \right)^n.$$

Отже, в околі особливої точки $z = 3$ ряд Лорана функції $f(z)$ має вигляд

$$\frac{z-7}{z^2 - 4z + 3} = -\frac{2}{z-3} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-3)^n.$$

б) *В крузі* $|z| < 1$ функція $f(z)$ аналітична і тому однозначно подається *рядом Маклорена*. Зробимо відповідні тотожні перетворення

$$f(z) = \frac{z-7}{z^2 - 4z + 3} = \frac{3}{z-1} - \frac{2}{z-3} = -\frac{3}{1-z} + \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \dfrac{z}{3}}$$

і, скориставшися відомими розвиненнями (5.30) й (5.31), отримаємо шуканий ряд

$$\frac{z-7}{z^2-4z+3}=-3\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3^{n+1}}-3\right)z^n.$$

в) *В точці* $z=2$ і в деякому околі $|z-2|<R$ цієї точки функція $f(z)$ аналітична і тому однозначно подається *рядом Тейлора* за степенями різниці $z-2$. Оскільки точка $z=2$ рівновіддалена від особливих точок $z_1=1$ й $z_2=3$, то $R=|2-1|=|2-3|=1$. Зробимо відповідні тотожні перетворення

$$f(z)=\frac{z-7}{z^2-4z+3}=\frac{3}{z-1}-\frac{2}{z-3}=\frac{3}{1+(z-2)}+\frac{2}{1-(z-2)}$$

і, скориставшися відомими розвиненнями (5.30) й (5.31), отримаємо шуканий ряд

$$\frac{z-7}{z^2-4z+3}=3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}[3(-1)^n+2](z-2)^n.$$

г) *В кільці* $1<|z|<3$ функція $f(z)$ аналітична і тому однозначно подається відповідним рядом Лорана за степенями z. Раніше було знайдене $f(z)=-\frac{3}{1-z}+\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$. Ряд $\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$ збігається в крузі $|z|<3$. Оскільки ряд $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ збігається в крузі $|z|<1$, а в зовшішності цього круга $|z|>1$ він розбігається, то зробимо відповідне тотожне перетворення $\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ і скористаємось найпростішим розвиненням (5.31). Отримаємо ряд $\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$, який збігається при $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, тобто в крузі $|z|>1$. Отже, шуканий ряд Лорана має вигляд

$$\frac{z-7}{z^2-4z+3}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}.$$

д) *У зовнішності круга* $|z|\le 3$, тобто в кільці $3<|z|<\infty$, функція $f(z)$ аналітична і тому однозначно подається відповідним рядом Лорана за степенями

z. Отриманий вище ряд $\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$ збігається в кільці $|z|>1$, а, отже, й в кільці $|z|>3$. В той же час ряд $\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$, який збігається в крузі $|z|<3$, в кільці $|z|>3$ буде розбігатися. Тому зробимо тотожне перетворення, аналогічне попередньому: $\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}$. Скориставшися розвиненням (5.31), отримаємо ряд $\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}$, який збігається при $\left|\frac{3}{z}\right|<1$, тобто в кільці $|z|>3$. Отже, шуканий ряд Лорана має вигляд

$$\frac{z-7}{z^2-4z+3}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2\cdot 3^{n-2}}{z^n}.$$

Порівнюючи усі отримані ряди між собою, бачимо, що вигляд ряду Лорана *однієї й тієї ж* функції залежить від кільця, що розглядається.

З А Д А Ч І Д О Р О З Д І Л У 5

Знайти границі послідовностей:

5.1. $z_n=\frac{e^{in}}{n^2}$. **5.2.** $z_n=\frac{n+2i}{3n+7i}$. **5.3.** $z_n=(1+3i)^n$.

Дослідити збіжність рядів:

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$. **5.5.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^n}$. **5.6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}$. **5.7.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sh\, i\sqrt{n}}{\sin in}$.

5.8. Довести рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 z^{2n}}$ в області $D=\{|z|\ge 1\}$.

Знайти радіуси збіжності рядів:

5.9. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^n$. **5.10.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{in}\right)^n$. **5.11.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+6}\right)^{n^2}(z+2)^n$.

5.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(z-5i)^n$. **5.13.** $\sum_{n=1}^{\infty}6^n z^{5n}$. **5.14.** $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n^3}(z-1)^n$.

5.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i\sqrt{5})^n}{(3-i\sqrt{7})^{2n}}(z+i)^{3n}$.

Розвинути в ряд Маклорена функцію та вказати область, в якій це розвинення справедливе:

5.16. $f(z)=z^3 sh(2z^2)$. **5.17.** $f(z)=z^5\ln(1-8z^3)$. **5.18.** $f(z)=\frac{3}{1+z-2z^2}$.

5.19. $f(z)=\sqrt[3]{27-z}$. **5.20.** $f(z)=\ln(1+z-2z^2)$.

Знайти чотири перші ненульові члени розвинення в ряд Маклорена функції $f(z)$ та вказати область, в якій це розвинення справедливе:

5.21. $f(z)=\frac{1}{1+e^z}$. **5.22.** $f(z)=\frac{1}{5+e^{-z}}$. **5.23.** $f(z)=\ln\cos z$. **5.24.** $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$.

Розвинути в ряд Тейлора в околі точки z_0 функцію та вказати круг збіжності отриманого ряду:

5.25. $f(z)=\frac{1}{z^2-6z+5}$, $z_0=3$. **5.26.** $f(z)=e^{z^2-4z+1}$, $z_0=2$.

5.27. $f(z)=\sin(z^2+4z)$, $z_0=-2$. **5.28.** $f(z)=\ln(5z+3)$, $z_0=1$.

5.29. $f(z)=\ln(z^2+6z+12)$, $z_0=-3$.

Знайти область збіжності ряду:

5.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{(z+2i)^n}$. **5.31.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^{-n}}{(z-2-i)^n}$.

5.32. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n (z-2+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (1+in)(z-2+i)^n$.

5.33. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{4}\right)^n$.

Розвинути в ряд Лорана за степенями z в кільці $1 < |z| < 2$ функцію:

5.34. $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$.

5.35. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2 (z+2)}$.

5.36. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$.

Розвинути в ряд Лорана за степенями $z - z_0$ у вказаному кільці функцію:

5.37. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2 + \frac{3}{2} z - 1}$, $z_0 = 1$, $\dfrac{1}{2} < |z| < 2$.

5.38. $f(z) = \dfrac{2z^2 - 5}{z^2 - z - 2}$, $z_0 = \dfrac{3}{2}$, $1 < |z| < 2$.

5.39. $f(z) = \dfrac{3z^2 + 1}{3z^2 - 2z - 1}$, $z_0 = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3} < |z| < 1$.

5.40. $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2 (z+2)}$, $z_0 = -2$, $0 < |z+2| < 1$.

5.41. $f(z) = \dfrac{9 - z^2}{z(z+9)}$, $z_0 = -4$, $4 < |z+4| < 5$.

6. НУЛІ ФУНКЦІЙ. ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ

6.1. Нулі аналітичної функції. Теорема єдиності

Точка z_0, у якій $f(z_0)=0$, називається ***нулем*** функції $f(z)$.

Розглянемо наступні випадки.

1. $z_0 \neq \infty$ (скінченна точка).

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області D і не дорівнює тотожно нулю в деякому околі G свого нуля $z_0 \in D$, тобто $f(z_0)=0$, $f(z)\neq 0 \ \forall z \in G \subset D$ $(z \neq z_0)$. Тоді в околі G функція $f(z)$ подається відповідним рядом Тейлора з центром в точці z_0, причому в цьому розвиненні коефіцієнт $c_0=0$ через те, що $f(z_0)=0$. Деякі з інших коефіцієнтів розвинення також можуть дорівнювати нулю, але ж не всі, інакше тоді сума ряду буде тотожно дорівнювати нулю. Отже, в околі нуля розвинення функції $f(z)$ в ряд Тейлора має вигляд

$$f(z)=c_n(z-z_0)^n + c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\ldots, \qquad (6.1)$$

де $c_n \neq 0$, $n \geq 1$.

Номер n *першого відмінного від нуля* коефіцієнта c_n у розвиненні (6.1) називається ***порядком*** або ***кратністю нуля*** z_0. Очевидно, що він співпадає із порядком молодшої відмінної від нуля похідної $f^{(n)}(z_0)$:

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0, \ldots,\ f^{(n-1)}(z_0)=0,\ f^{(n)}(z_0)\neq 0.$$

Якщо $n=1$, то нуль z_0 називається ***простим***.

Розвинення (6.1) можна переписати у вигляді

$$f(z)=(z-z_0)^n\left[c_n + c_{n+1}(z-z_0)+\ldots\right]=(z-z_0)^n\varphi(z), \qquad (6.2)$$

де ряд $\varphi(z)=c_n+c_{n+1}(z-z_0)+\ldots$ збігається в тому ж крузі, що й ряд (6.1). Отже, функція $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0, причому $\varphi(z_0)=c_n \neq 0$. Таким чином, якщо z_0 є нулем порядку n функції $f(z)$, то справедливе співвідношення (6.2). Навпаки, якщо функція $f(z)$ подається у вигляді (6.2), де функція $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0, то має місце співвідношення (6.1), тобто точка z_0 є нулем порядку n функції $f(z)$. Отже, *для того, щоб точка* $z_0 \neq \infty$ *була нулем порядку* n *функції* $f(z)$, *необхідно і достатньо, щоб ця функція* *подавалася у вигляді* $f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$, *де функція* $\varphi(z)$ *аналітична в точці* z_0 *й* $\varphi(z_0)\neq 0$.

2. $z_0=\infty$ (нескінченно віддалена точка).

Функція $f(z)$ називається ***аналітичною у нескінченно віддаленій точці***, якщо вона визначена в околі цієї точки (тобто в області $|z|>R$) і подається збіжним рядом $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}$.

За умовою, $c_0=f(\infty)=0$. Нехай c_n – перший відмінний від нуля коефіцієнт, тобто $c_1=c_2=...=c_{n-1}=0,\ c_n\neq 0$. Тоді

$$f(z)=\frac{1}{z^n}\left(c_n+\frac{c_{n+1}}{z}+\frac{c_{n+2}}{z^2}+...\right),$$

звідки

$$f(z)=z^{-n}\,\psi(z)\quad (n\geq 1,\, n\in\mathbb{N}),$$

де функція $\psi(z)$ аналітична в точці $z=\infty$, причому $\psi(\infty)=c_n\neq 0$. *Ця умова є необхідною і достатньою для того, щоб точка* $z=\infty$ *була нулем порядку* n *функції* $f(z)$.

Наслідками сформульованих тверджень є наступні:

1. Якщо z_0 є нулем порядку n функції $f(z)$ й одночасно нулем порядку m функції $g(z)$, то ця точка є нулем порядку $n+m$ функції $f(z)\cdot g(z)$.
2. Якщо z_0 є нулем порядку n функції $f(z)$, то для функції $g(z)=[f(z)]^m$ $(m\geq 1,\, m\in\mathbb{N})$ ця точка є нулем порядку $n\cdot m$.

Точка z_0 називається ***ізольованим нулем*** функції $f(z)$, якщо знайдеться такий окіл цієї точки, у якому $f(z)$ не має інших нулів, окрім z_0.

Має місце наступна ***теорема про нулі аналітичної функції***.

Теорема 6.1. Нехай функція $f(z)$ аналітична і не дорівнює тотожно 0 в околі свого нуля z_0. Тоді існує деякий окіл точки z_0, у якому $f(z)$ не має інших нулів, окрім z_0.

Таким чином, теорема 6.1 стверджує, *що аналітична функція, яка не дорівнює тотожно нулю, може мати тільки ізольовані нулі.* З цієї теореми випливає *теорема єдиності* теорії аналітичних функцій.

Теорема 6.2 ***(теорема єдиності)***. Якщо функції $f_1(z)$ й $f_2(z)$ аналітичні в області D і їх значення співпадають на деякій послідовності точок $\{\alpha_n\}$, яка збігається до внутрішньої точки $\alpha \in D$, то всюди в області D $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Як випливає з теореми єдиності, диференційовні функції дійсної змінної, які можуть співпадати на частині області визначення, не співпадаючи при цьому тотожно, суттєво відрізняється від диференційовних функцій комплексної змінної. Для тотожного співпадання останніх в *усій* області D достатньо їхнього співпадання лише на, наприклад, невеличкому крузі, що належить D.

З теореми єдиності також випливає, що функція $f(z)$, аналітична в деякій області D і така, що не дорівнює тотожно нулю, не може перетворюватися на нуль ні в якій підобласті D, ні на якій дузі, що лежить в D, ні, навіть, на послідовності точок D, яка збігається до внутрішньої точки цієї області.

Приклад 6.1. Знайти нулі функції $f(z) = (z^3 - 8)^2 e^{z^2}$ і визначити їх порядок.

Розв'язання. Знайдемо корені рівняння $(z^3 - 8)^2 e^{z^2} = 0$. Оскільки $e^{z^2} \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, то $z^3 - 8 = 0$, звідки $z_1 = 2$, $z_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$. Отже, задану функцію можна подати у вигляді $f(z) = (z-2)^2 (z+1-i\sqrt{3})^2 (z+1+i\sqrt{3})^2 e^{z^2}$.

Якщо у співвідношенні (6.2) покласти $z_0 = z_1 = 2$, то тоді, як неважко бачити, $\varphi(z) = (z+1-i\sqrt{3})^2 (z+1+i\sqrt{3})^2 e^{z^2}$. Оскільки $\varphi(z)$ аналітична в точці $z_0 = 2$, причому $\varphi(2) = (3-i\sqrt{3})^2 (3+i\sqrt{3})^2 e^4 = 144e^4 \neq 0$, то за (6.2) $z_0 = 2$ є нулем *другого порядку*. Аналогічно встановлюється, що й інші нулі $z_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$ заданої функції також мають *другий* порядок.

Приклад 6.2. Знайти нулі функції $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ і визначити їх порядок.

Розв'язання. Знайдемо корені рівняння $\sin\frac{1}{z} = 0$: $\frac{1}{z} = k\pi \Rightarrow z_k = \frac{1}{k\pi}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Оскільки $f'\left(\frac{1}{k\pi}\right) = -\left.\frac{\cos\frac{1}{z}}{z^2}\right|_{z_k = \frac{1}{k\pi}} = (-1)^{k+1} k^2 \pi^2 \neq 0$

$(k=\pm 1, \pm 2, ...)$, то у розвиненні (6.1) $n=1$. Це означає, що усі скінченні нулі $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ $(k=\pm 1, \pm 2, ...)$ функції $f(z)$ є *простими*.

Далі, на підставі розвинення (5.24) функцію $f(z)$ можна подати у вигляді

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \dots .$$

Оскільки $c_1 \neq 0$ $(n=1)$, то нескінченно віддалена точка $z=\infty$ також є *простим нулем* функції $f(z)$. Насправді, $\sin\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z}\left(1 - \dfrac{1}{3!\,z^2} + \dfrac{1}{5!\,z^4} - \dots\right) = \dfrac{1}{z}\psi(z)$, де функція $\psi(z) = 1 - \dfrac{1}{3!\,z^2} + \dfrac{1}{5!\,z^4} - \dots$ аналітична в точці $z=\infty$ й $\psi(\infty) = 1 \neq 0$.

Приклад 6.3. Знайти нулі функції $f(z) = (e^{2z} - 1 - 2z)\sin^5 z$ і визначити їх порядок.

Розв'язання. Представимо задану функцію у вигляді добутку двох функцій $f(z) = h(z)\cdot g(z)$, де $h(z) = e^{2z} - 1 - 2z$, $g(z) = \sin^5 z$.

Перший множник $h(z)$ має тільки один нуль $z=0$. Визначимо його порядок. Замість обчислення значень похідних розвинемо $h(z)$ в ряд Маклорена. На підставі (5.22) маємо

$$h(z) = e^{2z} - 1 - 2z = 1 + 2z + \frac{4z^2}{2!} + \frac{8z^3}{3!} + \dots - 1 - 2z = \frac{4z^2}{2!} + \frac{8z^3}{3!} + \dots .$$

Оскільки у отриманому розвиненні *перший ненульовий* коефіцієнт є c_2, то для $h(z)$ $z=0$ є нулем *другого порядку*.

Одночасно $z=0$ є *простим нулем* функції $\sin z$ (в цьому неважко переконатися, враховуючи розвинення (5.24) або на підставі того, що $(\sin z)'\Big|_{z=0} = \cos 0 = 1 \neq 0$). Тому за наслідком 2 для другого множника $g(z)$ $z=0$ є *нулем п'ятого порядку*, а за наслідком 1 *для заданої функції* $z=0$ є нулем $2+5=7$-го порядку.

Аналогічно усі інші нулі $z_k = k\pi$ $(k=\pm 1, \pm 2, ...)$ функції $g(z) = \sin^5 z$ мають *п'ятий порядок*, а оскільки $h(k\pi) = e^{2k\pi} - 1 - 2k\pi \neq 0$ $(k=\pm 1, \pm 2, ...)$, то вони є нулями 5-го порядку також і заданої функції.

6.2. Класифікація ізольованих особливих точок однозначного характеру

Як вже відзначалося раніше (п.3.3) під *аналітичною* ми розуміємо *однозначну* аналітичну функцію*, а особливими точками* функції називаємо точки, в яких вона не є аналітичною.

Скінченна особлива точка $z_0 \neq \infty$ функції $f(z)$ називається ***ізольованою***, якщо існує деякий *проколений* окіл $0 < |z - z_0| < r$ цієї точки (кільце), в якому $f(z)$ всюди аналітична. При цьому у самій точці z_0 функція не аналітична (може бути взагалі не визначена).

Зауваження. Оскільки функція $f(z)$ однозначна в околі точки z_0, то мова йде про *ізольовану особливу точку однозначного характеру*. Існують також особливі точки многозначного характеру, в околах яких функція многозначна, однак такі точки ми тут розглядати не будемо.

Нескінченно віддалена точка $z = \infty$ називається ***ізольованою особливою точкою*** функції $f(z)$, якщо ця функція аналітична в деякій області $r < |z| < \infty$. Це означає, що можна вказати таке значення r, що *ззовні* круга $|z| \leq r$ функція $f(z)$ не має інших особливих точок, які б знаходилися на скінченній відстані від точки $z = 0$.

В залежності від поведінки функції $f(z)$ в околі особливої точки z_0 розрізняють *три типи* таких точок. Ізольована скінченна або нескінченно віддалена особлива точка називається

1) ***усувною особливою точкою***, якщо існує *скінченна* границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$;
2) ***полюсом***, якщо існує *нескінченна* границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;
3) ***істотно особливою точкою***, якщо границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ взагалі *не існує* (ані скінченна, ані нескінченна).

<u>Приклад 6.4.</u> Визначити тип особливої точки $z_0 = 0$ функції $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$.

Розв'язання. Функція $f(z)$ аналітична в усіх точках $z \in \mathbb{C}$, окрім точки $z_0 = 0$, яка є особливою точкою. Оскільки

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...\right)}{z^2} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+...\right) = \frac{1}{4}$$

(границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ існує і скінченна), то $z_0 = 0$ є *усувною* особливою точкою.

Приклад 6.5. Визначити тип особливої точки $z_0 = 1$ функції $f(z) = \dfrac{\sin z}{z-1}$.

Розв'язання. Функція $f(z)$ аналітична в усіх точках $z \in \mathbb{C}$, окрім точки $z_0 = 1$, яка є особливою точкою. Оскільки $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{\sin z}{z-1} = \infty$ (границя існує, але вона нескінченна), то $z_0 = 1$ є *полюсом*.

Приклад 6.6. Визначити тип особливої точки $z_0 = 0$ функції $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$.

Розв'язання. Функція $f(z)$ аналітична в усіх точках $z \in \mathbb{C}$, окрім точки $z_0 = 0$. Розглянемо поведінку функції при $z \to 0$ на дійсній та уявній осях окремо. Нехай $z = x + iy$. Тоді на дійсній осі $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty$, а на уявній осі $\lim\limits_{y\to 0} f(iy) = \lim\limits_{y\to 0} e^{-\frac{1}{y^2}} = 0$. Отже, границя $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z^2}}$ взагалі не існує, ані скінченна, ані нескінченна. Тому точка $z_0 = 0$ є *істотно особливою*.

Зауваження. Так само нескладно довести, що $\lim\limits_{z\to \infty} f(z) = \lim\limits_{z\to \infty} e^{\frac{1}{z^2}} = 1$, тобто в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$ функція $f(z)$ аналітична.

Приклад 6.7. Знайти усі особливі точки функції $f(z) = \dfrac{z^3}{z^2+9}$ і визначити їх тип.

Розв'язання. Функція $f(z)$ аналітична в усіх точках $z \in \mathbb{C}$, окрім точок $z_{1,2} = \pm 3i$. Оскільки $\lim\limits_{z\to \pm 3i} f(z) = \lim\limits_{z\to \pm 3i} \dfrac{z^3}{z^2+9} = \infty$, то обидві ці точки є *полюсами*.

Далі, функція $f(z)$ аналітична в області $|z| > 3$ й $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{z^3}{z^2+9} = \infty$. Тому нескінченно віддалена точка $z_3 = \infty$ є *полюсом* даної функції. Інших особливих точок в розширеній комплексній площині $\overline{C}$ функція $f(z)$ не має.

Зауважимо, що точка $z = \infty$ є істотно особливою для функцій e^z, $\cos z$, $\sin z$.

6.3. Визначення типу особливої точки

6.3.1. Скінченна точка

Якщо точка $z_0 \neq \infty$ є ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, то за теоремою Лорана цю функцію у кільці її аналітичності $0 < |z - z_0| < r$ можна розвинути в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n. \qquad \textbf{(5.42)}$$

Поведінка функції $f(z)$ при $z \to z_0$, що визначає тип особливої точки z_0, залежить від вигляду головної частини $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$ ряду Лорана (5.42) (чому вона й була названа *головною*). Розглянемо можливі випадки.

1. ***Усувна особлива точка***

Теорема 6.3. Для того, щоб особлива точка z_0 була *усувною* особливою точкою функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб ряд Лорана цієї функції в околі точки z_0 взагалі не містив членів з *від'ємними* степенями різниці $z - z_0$.

Це означає, що *головна частина* відповідного ряду Лорана *відсутня*, тобто ряд має вигляд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$ $(0 < |z - z_0| < r)$. Тоді, як неважко бачити, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = C_0$. Отже, вважаючи $f(z_0) = C_0$ незалежно від того, визначена чи не визначена функція $f(z)$ в точці z_0, ми "усуваємо" цю особливу точку (звідки й її назва). Тоді $f(z)$ буде аналітичною в точці z_0, а, отже, і *в усьому крузі* $|z - z_0| < r$, і подається в ньому відповідним рядом Тейлора. Тому часто усувну особливу точку розглядають як правильну й приймають $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C_0$.

Приклад 6.8. Визначити тип особливої точки $z_0 = \pi$ функції $f(z) = \dfrac{1 + \cos z}{z - \pi}$.

Розв'язання. Функція $f(z)$ аналітична в усіх точках $z \in \mathbb{C}$, окрім точки $z_0 = \pi$. Зробимо тотожне перетворення $\cos z = \cos[\pi + (z - \pi)] = -\cos(z - \pi)$ і скористаємось найпростішим розвиненням (5.25) функції $\cos z$, замінивши в ньому z на $z - \pi$:

$$\cos(z - \pi) = 1 - \frac{(z-\pi)^2}{2!} + \frac{(z-\pi)^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-\pi)^{2n}}{(2n)!}.$$

Отже, розвинення заданої функції в ряд Лорана в околі точки $z_0 = \pi$ має вигляд:

$$f(z) = \frac{1+\cos z}{z-\pi} = \frac{1-\cos(z-\pi)}{z-\pi} = \frac{1}{z-\pi}\left[1 - \left(1 - \frac{(z-\pi)^2}{2!} + \frac{(z-\pi)^4}{4!} - \ldots\right)\right] =$$

$$= \frac{z-\pi}{2!} - \frac{(z-\pi)^3}{4!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-\pi)^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Оскільки це розвинення не містить головної частини, то точка $z_0 = \pi$ є *усувною* особливою точкою.

Слід зазначити, що оскільки границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ існує і скінченна, то в деякому проколеному околі усувної особливої точки z_0 функція $f(z)$ *обмежена,* тобто

$$|f(z)| \le M \qquad (0 < |z - z_0| < \rho), \tag{6.3}$$

тому умову $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \ne \infty$ можна замінити умовою (6.3), отже, справедливе наступне твердження: для того, щоб ізольована особлива точка z_0 була *усувною* особливою точкою функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб функція $f(z)$

була обмежена в деякому проколеному околі цієї точки.

2. ***Полюс***

Теорема 6.4. Для того, щоб ізольована особлива точка z_0 була *полюсом* функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб ряд Лорана цієї функції в околі точки z_0 містив лише *скінченне число* ненульових членів з *від'ємними* степенями різниці $z - z_0$.

За суттю це означає, що *головна частина* ряду Лорана функції $f(z)$ в околі точки z_0 містить *лише скінченне число ненульових членів*, тобто ряд Лорана є

$$f(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n , \qquad (6.4)$$

де $C_{-m} \neq 0$. При цьому точка z_0 називається ***полюсом*** m***-го порядку*** функції $f(z)$, а якщо $m = 1$, – то ***простим полюсом***. Отже, *порядок полюса є найбільшим за модулем показником степеня різниці* $z - z_0$ *у знаменниках членів розвинення (6.4).*

<u>Приклад 6.9.</u> Визначити характер особливої точки $z_0 = 0$ функції $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^5}$.

Розв'язання. Функція $f(z)$ аналітична в усіх точках $z \in \mathbb{C}$, окрім точки $z_0 = 0$. Скористаємось відомим розвиненням (5.25) функції $\cos z$ в ряд Маклорена і отримаємо розвинення заданої функції в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$:

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^5} = \frac{1}{z^5}\left[1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right)\right] = \frac{1}{z^5}\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2!\,z^3} - \frac{1}{4!\,z} + \frac{z}{6!} - \ldots .$$

Оскільки це розвинення містить скінченне число членів з від'ємними степенями z, а саме, два члени, то точка $z_0 = 0$ є *полюсом*. Найбільший за модулем показник від'ємного степеня z дорівнює 3, тому порядок полюса $m = 3$.

Розвинення (6.4) також може бути подано у вигляді

$$f(z) = (z - z_0)^{-m}\varphi(z) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n , \tag{6.5}$$

де $\varphi(z)$ – аналітична функція, обмежена в околі точки z_0. Якщо цю функцію довизначити в точці z_0, поклавши $\varphi(z_0) = C_{-m} \neq 0$, то формулу (6.5) можна переписати у вигляді

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6.6}$$

де $\psi(z)$ – функція, аналітична в точці z_0, причому $\psi(z_0) \neq 0$, $m \geq 1$ – ціле число. Отже, *точка* z_0 *є полюсом* m*-го порядку функції* $f(z)$ *тоді і тільки тоді, коли ця функція подається у вигляді (6.6).*

<u>Приклад 6.10.</u> Знайти усі скінченні особливі точки функції $f(z) = \dfrac{e^z + 1}{(z^2 + 1)(z - 2)^2}$ і визначити їх характер.

Розв'язання. Функція $f(z)$ аналітична в усіх точках $z \in \mathbb{C}$, окрім ізольованих особливих точок $z_{1,2} = \pm i$ й $z_3 = 2$.

Подамо функцію $f(z)$ у вигляді (6.6): $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{z - i}$, де функція $\psi(z) = \dfrac{e^z + 1}{(z + i)(z - 2)^2}$ аналітична в околі точки $z_1 = i$, причому $\psi(i) = \dfrac{e^i + 1}{2i(i - 2)^2} = -\dfrac{i}{2} \cdot \dfrac{\cos 1 + i \sin 1 + 1}{3 - 4i} \neq 0$. Отже, точка $z_1 = i$ є *простим полюсом* даної функції. Аналогічно, подавши функцію $f(z)$ у вигляді $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{z + i}$, де $\psi(z) = \dfrac{e^z + 1}{(z - i)(z - 2)^2}$, приходимо до висновку, що для даної функції точка $z_2 = -i$ також є простим полюсом. Подавши $f(z)$ у вигляді $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z - 2)^2}$, де функція $\psi(z) = \dfrac{e^z + 1}{(z^2 + 1)}$ аналітична в околі точки $z_3 = 2$ й $\psi(2) = \dfrac{e^2 + 1}{5} \neq 0$, заключаємо, що точка $z_3 = 2$ є *полюсом другого порядку.*

Між нулями й полюсами аналітичних функцій встановлюється дуже простий зв'язок, а саме: *для того, щоб точка* z_0 *була полюсом* m*-го порядку* *функції* $f(z)$, *необхідно і достатньо, щоб вона була нулем того ж порядку функції* $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

<u>Приклад 6.11.</u> Визначити характер особливої точки $z_0=0$ функції $f(z)=\dfrac{1}{z-\sin z}$.

Розв'язання. Точка $z_0=0$ є полюсом функції $f(z)$, оскільки вона є нулем знаменника. Розглянемо функцію $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}=z-\sin z$ і знайдемо порядок нуля цієї функції за порядком молодшої відмінної від нуля похідної $g^{(n)}(0)$. Маємо: $g(0)=0$, $g'(0)=(1-\cos z)\Big|_{z=0}=0$, $g''(0)=\sin z\Big|_{z=0}=0$, $g'''(0)=\cos z\Big|_{z=0}=1\neq 0$. Отже, $z_0=0$ є нулем третього порядку функції $g(z)$, а значить, *полюсом третього порядку* заданої функції $f(z)$.

Зауваження. Нехай функції $f(z)$ й $g(z)$ аналітичні в точці z_0, причому $g(z)$ не дорівнює тотожно нулю. Тоді:

1) якщо $g(z_0)\neq 0$, то функція $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ аналітична в точці z_0;

2) якщо точка z_0 є нулем порядку m функції $g(z)$, але $f(z_0)\neq 0$, то z_0 є полюсом порядку m функції $\dfrac{f(z)}{g(z)}$;

3) якщо точка z_0 є нулем порядку n функції $f(z)$ й нулем порядку m функції $g(z)$, то при $n<m$ точка z_0 є полюсом порядку $m-n$ функції $\dfrac{f(z)}{g(z)}$, а при $n\geq m$ функція $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ аналітична в точці z_0.

<u>Приклад 6.12.</u> Визначити характер особливої точки $z_0=1$ функції $f(z)=\dfrac{\sin \pi z}{2e^{z-1}-z^2-1}$.

Розв'язання. Задану функцію розглянемо у вигляді $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{\varphi(z)}=$

$= \dfrac{\sin \pi z}{2e^{z-1} - z^2 - 1}$. Неважко бачити, що точка $z_0 = 1$ є простим нулем чисельника $\psi(z) = \sin \pi z$, тобто $n = 1$. Для знаменника $\varphi(z) = 2e^{z-1} - z^2 - 1$ ця точка теж є нулем. Визначимо його порядок за порядком молодшої відмінної від нуля похідної $\varphi^{(n)}(1)$. Маємо: $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(1) = (2e^{z-1} - 2z)\Big|_{z=1} = 0$, $\varphi''(1) = (2e^{z-1} - 2)\Big|_{z=1} = 0$, $\varphi'''(1) = 2e^{z-1}\Big|_{z=1} = 2 \neq 0$. Отже, для знаменника точка $z_0 = 1$ є нулем третього порядку, тобто $m = 3$. Тому для заданої функції $f(z)$ точка $z_0 = 1$ буде *полюсом порядку* $m - n = 3 - 1 = 2$.

Для ***дробово-раціональної*** функції $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, де $P_n(z)$ й $Q_m(z)$ – многочлени степенів n й m відповідно, які *не мають спільних коренів*, нулі знаменника $Q_m(z)$ і тільки ці точки є полюсами. Ніяких інших *скінченних* особливих точок у дробово-раціональної функції немає.

<u>Приклад 6.13.</u> Знайти особливі точки функції $f(z) = \dfrac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - z - 6}$ і визначити їх характер.

Розв'язання. Задану функцію розглянемо у вигляді раціонального дробу $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$. Неважко бачити, що чисельник і знаменник не мають спільних коренів. Тому полюсами заданої функції будуть нулі знаменника. Представимо його у вигляді $Q_m(z) = (z + 2)(z - 3)$. На підставі (6.2) можна зробити висновок, що обидві точки $z_1 = -2$ й $z_2 = 3$ є простими нулями знаменника, а тому вони є *простими полюсами* заданої функції. Той самий результат можна отримати, подаючи функцію $f(z)$ за формулою (6.6) у вигляді $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{z+2} = \dfrac{\dfrac{z^2 - 3z + 2}{z - 3}}{z + 2}$

або у вигляді $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{z-3} = \dfrac{\dfrac{z^2 - 3z + 2}{z + 2}}{z - 3}$.

3. ***Істотно особлива точка***

Теорема 6.5. Для того, щоб ізольована особлива точка z_0 була *істотно особливою точкою* функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб ряд Лорана цієї функції в околі точки z_0 містив *нескінченну кількість* ненульових членів з *від'ємними* степенями різниці $z - z_0$.

Це означає, що в околі точки z_0 *головна частина* відповідного ряду Лорана містить нескінченну кількість членів, тобто має місце розвинення (5.42).

<u>Приклад 6.14.</u> Визначити характер особливої точки $z_0 = -2$ функції $f(z) = (z+2)e^{\frac{1}{z+2}}$.

Розв'язання. Функція $f(z)$ аналітична в усіх точках $z \in \mathbb{C}$, окрім точки $z_0 = -2$. Скористаємось відомим розвиненням (5.22) функції e^z в ряд Маклорена, замінивши в ньому z на $\dfrac{1}{z+2}$:

$$e^{\frac{1}{z+2}} = 1 + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{2!(z+2)^2} + \frac{1}{3!(z+2)^3} + \ldots + \frac{1}{n!(z+2)^n} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(z+2)^n}.$$

Отже, розвинення заданої функції в ряд Лорана в околі точки $z_0 = -2$ має вигляд:

$$f(z) = (z+2)e^{\frac{1}{z+2}} = (z+2)\left(1 + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{2!(z+2)^2} + \frac{1}{3!(z+2)^3} + \ldots\right) =$$

$$= (z+2) + 1 + \frac{1}{2!(z+2)} + \frac{1}{3!(z+2)^2} + \ldots.$$

Оскільки це розвинення містить нескінченну множину членів з від'ємними степенями різниці $z+2$, то точка $z_0 = -2$ є *істотно особливою* точкою заданої функції.

Поведінка аналітичної функції в околі її істотно особливої точки описується теоремою, яку у 1868 р. довів Юліан Сохоцький (1842-1927) і одночасно з ним Феличе Казораті (1835-1890), а лише через 8 років – К.Вейєрштрасс (хоча йому звичайно і віддають першість).

Теорема 6.6 ***(теорема Сохоцького)***. Якщо z_0 – істотно особлива точка функції $f(z)$, то для *будь-якого* комплексного числа A знайдеться послідовність точок $\{z_n\}$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ й $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

Таким чином, теорема Сохоцького стверджує, що в околі істотно особливої точки послідовності значень $\{f(z_n)\}$ аналітичної функції, що відповідають *різним* послідовностям $\{z_n\}$ точок, збіжним до точки z_0, прямують до *різних* границь. Отже, завжди можна вибрати послідовність $\{z_n\}$ таку, щоб відповідна послідовність $\{f(z_n)\}$ збігалася *до будь-якої наперед заданої* границі. Це в свою чергу означає, що в істотно особливій точці *не існує визначеного (скінченного або нескінченного)* граничного значення аналітичної функції. Більш глибоко поведінку аналітичної функції в околі її істотно особливої точки характеризує ***теорема Пікара***: в будь-якому околі істотно особливої точки функція приймає, причому нескінченну кількість разів, будь-яке значення, окрім, можливо, одного (таке значення називається ***винятковим*** для цієї функції).

На завершення відзначимо, що якщо точка z_0 є *істотно особливою* точкою функції $f(z)$, причому $f(z) \neq 0$ у деякому околі точки z_0, то для функції $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ точка z_0 є або *істотно особливою*, або *неізольованою особливою* (так званою *граничною точкою полюсів*).

Розглянуті три випадки повністю вичерпують можливі варіанти поведінки аналітичної функції в околі її ізольованої особливої точки. Ніяких інших випадків бути не може.

6.3.2. Нескінченно віддалена точка

Нагадаємо, що функція $f(z)$ називається *аналітичною у нескінченно віддаленій точці* $z = \infty$, якщо функція $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ аналітична в точці $z = 0$; точка $z = \infty$ називається ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо в деякому околі цієї точки немає інших особливих точок функції $f(z)$.

Як вже було вказано у п.6.1, нескінченно віддалені особливі точки класифікуються так само, як і скінченні.

Оскільки функція $f(z)$ аналітична в околі точки $z = \infty$, тобто у області $|z| > R$ (круговому кільці $R < |z| < \infty$), окрім, можливо, самої точки $z = \infty$, то її в цьому околі можна подати збіжним рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}. \qquad (5.43)$$

Так само, як і для скінченної особливої точки, тут можливі три випадки. Слід тільки враховувати, що *головна і правильна частини* ряду Лорана в околі *нескінченно віддаленої* точки мають вигляди, *протилежні* тим, що вони мають у ряді Лорана в околі *скінченної* точки z_0. Тому відповідні теореми отримують з теорем 6.3 – 6.5 заміною слова "від'ємний" на "додатний", а в теоремі Сохоцького 6.6 – z_0 на ∞. Наприклад, точка $z = \infty$ є істотно особливою для функції $\cos z$, оскільки ряд Лорана в околі $z = \infty$ містить нескінченну кількість ненульових членів з додатними степенями z (отже, головна частина цього ряду містить нескінченну кількість ненульових членів):

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Якщо точка $z = \infty$ є *усувною* особливою точкою функції $f(z)$, то в цьому випадку звичайно говорять, що $f(z)$ *аналітична у нескінченності*, й приймають $f(\infty) = \lim\limits_{z \to \infty} f(z)$.

Приклад 6.15. Визначити характер особливої точки $z = \infty$ функції $f(z) = z\left(e^{\frac{1}{z}} - 1\right)$.

Розв'язання. Скористаємось відомим розвиненням (5.22) функції e^z в ряд Маклорена, замінивши в ньому z на $\frac{1}{z}$:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}.$$

Отже, розвинення заданої функції в ряд Лорана в околі точки $z=\infty$ має вигляд:

$$f(z)=z\left(e^{\frac{1}{z}}-1\right)=z\left[\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right)-1\right]=1+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!z^2}+\ldots.$$

Оскільки це розвинення не містить членів з додатними степенями z (отже, головна частина ряду Лорана відсутня), то точка $z=\infty$ є *усувною* особливою точкою заданої функції. Тому функція $f(z)=z\left(e^{\frac{1}{z}}-1\right)$ аналітична у нескінченності й $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\lim\limits_{z\to\infty}z\left(e^{\frac{1}{z}}-1\right)=\lim\limits_{z\to\infty}z\cdot\frac{1}{z}=1$.

Приклад 6.16. Визначити характер особливої точки $z=\infty$ функції $f(z)=\dfrac{z^6+2z^4+5z+1}{z^2-1}$.

Розв'язання. Дробово-раціональну функцію $f(z)$ подамо у вигляді суми цілої частини й *правильного раціонального дробу*, який *завжди аналітичний в околі нескінченно віддаленої точки*: $f(z)=z^4+3z^2+3+\dfrac{5z+4}{z^2-1}$. Як бачимо, головна частина ряду Лорана функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки є сумою скінченного числа членів z^4+3z^2+3, причому найбільший показник степеня дорівнює 4. Отже, точка $z=\infty$ є *полюсом четвертого порядку* функції $f(z)$.

Точка $z=\infty$ є особливою точкою ***дробово-раціональної*** функції $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, а саме, полюсом порядку $n-m$, якщо $n>m$. Якщо ж $n\le m$, то $z=\infty$ є точкою аналітичності. У наведеному прикладі $P_n(z)=z^6+2z^4+5z+1$, $Q_m(z)=z^2-1$, отже, порядок полюса в точці $z=\infty$ дорівнює $n-m=6-2=4$.

Приклад 6.17. Визначити характер особливої точки $z=\infty$ функції $f(z)=\dfrac{1+z^2}{e^z}$. *Розв'язання.* Точка $z=\infty$ є ізольованою особливою точкою даної функції, оскільки для будь-якого додатного числа R в області $|z|>R$

функція не має інших особливих точок, які б знаходилися на скінченній відстані від точки $z=0$.

Подамо $f(z)$ у вигляді

$$f(z)=(1+z^2)e^{-z}=(1+z^2)\left(1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=1-z+\left(1+\frac{1}{2!}\right)z^2-\left(1+\frac{1}{3!}\right)z^3+\ldots+(-1)^n\left[\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}\right]z^n+\ldots.$$

Неважко бачити, що отримане розвинення $f(z)$ у ряд Лорана в околі точки $z=\infty$ містить нескінченну кількість членів з додатними степенями z. Отже, точка $z=\infty$ є *істотно особливою*.

Таким чином, *як для скінченної, так і для нескінченної* ізольованих особливих точок згадані теореми 6.1 – 6.3 можуть бути об’єднані у наступному вигляді: для того, щоб особлива точка z_0, скінченна або нескінченна, була

– *усувною,*

– *полюсом,*

– *істотно особливою точкою* функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб головна частина ряду Лорана функції $f(z)$ в околі точки z_0 відповідно

– *була відсутня,*

– *містила лише скінченне число ненульових членів,*

– *містила нескінченну кількість ненульових членів.*

6.4. Цілі і мероморфні функції

Якщо функція $f(z)$ аналітична в кожній точці $z\in\mathbb{C}$, то така функція називається ***цілою***. Ряд Тейлора цілої функції $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ збігається при усіх z і, отже, є рядом Лорана функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки.

Якщо нескінченно віддалена точка $z=\infty$ є полюсом порядку m цілої функції $f(z)$, то ця функція є *многочленом* степеня m.

Якщо ціла функція $f(z)$ аналітична в нескінченно віддаленій точці $z=\infty$, то $f(z)=c_0=const$. Якщо ж $z=\infty$ є істотно особливою точкою цілої функції $f(z)$, то ця функція називається ***цілою трансцендентною***. Такими функціями є e^z, $\sin z$, $\cos z$, shz, chz.

Мероморфною називається функція, аналітична на кожній обмеженій множині $G \in \mathbb{C}$ за виключенням, можливо, скінченного числа полюсів.

В усій комплексній площині мероморфна функція може мати і нескінченну кількість полюсів (наприклад, $ctgz$, $\dfrac{1}{\sin z}$, $\dfrac{1}{e^z-1}$). Раціональна функція є мероморфною і має в усій розширеній комплексній площині лише скінченне число полюсів. Можна показати, що усяка мероморфна функція подається у вигляді відношення двох цілих функцій. Справедлива ***теорема Пікара***: мероморфна функція, відмінна від сталої, приймає усі комплексні значення, окрім, можливо, двох. Ті значення, які мероморфна функція не приймає, називаються *винятковими значеннями*. Наприклад, функція tgz має два виняткові значення $\pm i$. Це означає, що $\forall z \;\; tgz \neq \pm i$.

ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 6

Знайти нулі функції і визначити їх порядок:

6.1. $f(z) = z^4 + 4z^2$. **6.2.** $f(z) = z^2 \sin z$. **6.3.** $f(z) = (z^2 - \pi^2)(1 + e^{-z})$.

Знайти порядок нуля $z = z_0$ функції:

6.4. $f(z) = \dfrac{z^3}{1 + z - e^z}$, $z_0 = 0$. **6.5.** $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$, $z_0 = 0$.

6.6. $f(z) = (z^2 + \pi^2)^2(e^{2z} - 1)^4$, $z_0 = \pi i$. **6.7.** $f(z) = (z^2 - \pi^2)^3 \sin^3 z$, $z_0 = \pi$.

Визначити тип особливої точки z_0 функції:

6.8. $f(z) = \dfrac{1}{\cos z - 1 + \dfrac{z^2}{2}}$, $z_0 = 0$. **6.9.** $f(z) = \dfrac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}$, $z_0 = 0$.

6.10. $f(z) = \dfrac{(e^z - 1)^2}{1 - \cos z}$, $z_0 = 0$. **6.11.** $f(z) = \cos\dfrac{1}{z-2}$, $z_0 = 2$.

6.12. Знайти особливі точки функції $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}$ і визначити їх характер. **6.13.** Визначити характер нескінченно віддаленої точки для функцій

а) $f(z) = \dfrac{z^3 - z^2 + z + 6}{z^2}$; б) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^4}$; в) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$.

7. ЛИШКИ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

7.1. Лишок аналітичної функції у скінченній особливій точці

Важливе поняття *лишку* було введено О.Коші у 1814 р. в роботі “Мемуар про визначені інтеграли” і в подальшому застосовувалося ним при розв’язанні численних задач математичного аналізу.

Нехай z_0 – ізольована *скінченна* особлива точка аналітичної функції $f(z)$ (випадок *нескінченно віддаленої* особливої точки буде розглянутий пізніше). Тоді, як відомо, ця функція у проколеному околі точки z_0 (кільці аналітичності) $0<|z-z_0|<r$ може бути єдиним чином розвинута в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n\,, \tag{5.42}$$

де

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}},\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{5.38}$$

γ – довільний *замкнений контур*, що охоплює особливу точку z_0 і цілком належить кільцю аналітичності (у *частинному випадку* γ – *коло* $|z-z_0|<\rho$, де $0<\rho<r$). Зрозуміло, що всередині γ не міститься інших особливих точок, окрім z_0.

Лишком $\underset{z=z_0}{res}\,f(z)$ (від французького “***residu***” – *залишок*) функції $f(z)$ в точці z_0 називається значення інтеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(z)\,dz\,,$$

де γ позначає вказаний вище контур. Нагадаємо, що за умовчанням будь-який замкнений контур вважається *додатно орієнтованим*, тобто таким, що обходиться у *додатному напрямку* (див. п.2.2), коли область, обмежена цим контуром, при обході залишається *зліва*. Отже,

$$\underset{z=z_0}{res}\,f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(z)\,dz\,. \tag{7.1}$$

Приклад 7.1. Обчислити лишок функції $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+1}$ в точці $z_0=i$.

Розв'язання. Точка $z_0=i$ є ізольованою особливою точкою. Оскільки функція e^z аналітична в цій точці й $e^i\neq 0$, то, подавши $f(z)$ у вигляді $f(z)=\dfrac{\frac{e^z}{z+i}}{z-i}$, на підставі формули (6.6) робимо висновок, що точка $z_0=i$ є *простим полюсом*. Тоді за формулою (7.1)

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z)=\operatorname*{res}_{z=i}\frac{e^z}{z^2+1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{e^z}{z^2+1}dz,$$

де контуром γ може бути, наприклад, коло $|z-i|=1$. Інтеграл обчислимо за допомогою інтегральної формули Коші (4.17):

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-i|=1}\frac{e^z}{z^2+1}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-i|=1}\frac{\frac{e^z}{z+i}}{z-i}dz=\left.\frac{e^z}{z+i}\right|_{z=i}=\frac{e^i}{2i}=-\frac{i}{2}e^i.$$

Отже, $\operatorname*{res}_{z=i}\dfrac{e^z}{z^2+1}=-\dfrac{i}{2}e^i=\dfrac{1}{2}(\sin 1-i\cos 1)$.

З формул (5.38) безпосередньо витікає, що $C_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)\,dz$, тому

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=C_{-1}, \tag{7.2}$$

тобто *лишок функції* $f(z)$ *в особливій точці* z_0 *дорівнює коефіцієнту при* (-1)-*му степені у розвиненні* $f(z)$ *в ряд Лорана в околі точки* z_0. Звідси одразу ж випливає, що *в правильній точці або в усувній особливій точці лишок функції завжди дорівнює нулю* (оскільки в цих випадках головна частина ряду Лорана відсутня).

Приклад 7.2. Обчислити лишок функції $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4}$ в точці $z_0=0$.

Розв'язання. Точка $z_0=0$ є ізольованою особливою точкою. Вона є простим нулем чисельника й нулем четвертого порядку знаменника. Тому для заданої функції вона є *полюсом третього порядку*. Скориставшися відомим розвиненням функції $\sin z$ в ряд Маклорена, отримаємо розвинення заданої функції у відповідний ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{z}{5!} - \ldots .$$

Неважко бачити, що $\underset{z=0}{res} f(z) = \underset{z=0}{res} \frac{\sin z}{z^4} = C_{-1} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$.

Приклад 7.3. Обчислити лишок функції $f(z) = \frac{\sin z^4}{z^4}$ в точці $z_0 = 0$.

Розв'язання. Точка $z_0 = 0$ є ізольованою особливою точкою. Оскільки $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z^4}{z^4} = 1$, то $z_0 = 0$ є *усувною* особливою точкою даної функції.

Отже, $\underset{z=0}{res} f(z) = \underset{z=0}{res} \frac{\sin z^4}{z^4} = 0$. Читачу пропонується підтвердити цей результат розвиненням функції в ряд Лорана.

У деяких випадках обчислення контурного інтеграла у формулі (7.1) може бути замінено обчисленням похідної в точках, що лежать *всередині* контура інтегрування.

Нехай точка z_0 є *полюсом* m*-го порядку* функції $f(z)$. Якщо помножити обидві частини її лоранівського розвинення (5.42) на $(z - z_0)^m$, продиференціювати отриману рівність $m-1$ разів і перейти до границі при $z \to z_0$, то одержимо формулу

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)]. \qquad (7.3)$$

Для *простих полюсів* формула (7.3) значно спрощується:

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \lim_{z \to z_0}[(z - z_0) f(z)]. \qquad (7.4)$$

Наприклад, у *простому полюсі* $z_0 = i$ функції $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$ (приклад 7.1)

$$\underset{z=i}{res} \frac{e^z}{z^2+1} = \lim_{z \to i}\left[(z-i)\frac{e^z}{z^2+1}\right] = \lim_{z \to i} \frac{e^z}{z+i} = \frac{e^i}{2i} = \frac{1}{2}(\sin 1 - i \cos 1),$$

а у *полюсі третього порядку* $z_0 = 0$ функції $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ (приклад 7.2)

$$\underset{z=0}{res}\frac{\sin z}{z^4}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3\frac{\sin z}{z^4}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{z}\right)''=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{6}.$$

Нехай в околі *простого* полюса z_0 функція $f(z)$ може бути подана у вигляді частки двох аналітичних в z_0 функцій

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причому $\varphi(z_0)\neq 0$, а $\psi(z_0)=0$ й $\psi'(z_0)\neq 0$ (тобто точка z_0 є нулем *першого* порядку функції $\psi(z)$). Тоді формула (7.4) може бути замінена наступною:

$$\underset{z=z_0}{res}\ f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad \textbf{(7.5)}$$

Наприклад, у *простому полюсі* $z_0=i$ функції $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+1}$ (приклад 7.1)

$$\underset{z=i}{res}\frac{e^z}{z^2+1}=\left.\frac{e^z}{(z^2+1)'}\right|_{z=i}=\frac{e^i}{2i}=\frac{1}{2}(\sin 1-i\cos 1).$$

Якщо z_0 є *істотно особливою точкою*, то для обчислення лишку в цій точці необхідно розвинути функцію у відповідний ряд Лорана і скористатися формулою (7.2).

<u>Приклад 7.4.</u> Обчислити лишок функції $f(z)=z^9 sh\dfrac{1}{z^2}$ в точці $z_0=0$.

Розв'язання. Точка $z_0=0$ є ізольованою особливою точкою. Розвинення заданої функції в ряд Лорана в околі цієї точки має вигляд

$$f(z)=z^9 sh\frac{1}{z^2}=z^9\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!z^6}+\frac{1}{5!z^{10}}+\frac{1}{7!z^{14}}+\ldots\right)=z^7+\frac{z^3}{3!}+\frac{1}{5!z}+\frac{1}{7!z^5}+\ldots,$$

тобто містить нескінченну кількість членів у головній частині, тому $z_0=0$ є *істотно особливою* точкою даної функції. Оскільки коефіцієнт C_{-1} в цьому розвиненні дорівнює $\dfrac{1}{5!}=\dfrac{1}{120}$, то $\underset{z=0}{res}\ f(z)=\underset{z=0}{res}\ z^9 sh\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{120}$.

7.2. Основна теорема про лишки

Застосування теорії лишків ґрунтується на наступній теоремі, доведеній О.Коші у 1825 р.

Теорема 7.1 ***(основна теорема Коші про лишки)***. Нехай функція $f(z)$ неперервна на межі Γ області D і аналітична в цій області всюди, окрім скінченного числа ізольованих особливих точок z_k $(k=\overline{1,\ n})$. Тоді

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z). \qquad (7.6)$$

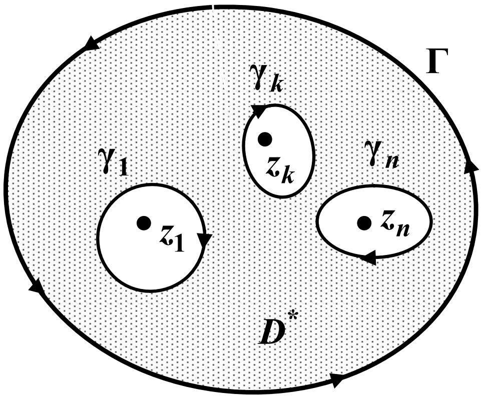

Рис. 7.1

Доведення. Оточимо кожну з особливих точок z_k досить малими замкненими контурами γ_k, такими, щоб усі вони лежали в області D, не перетиналися один з одним і не містили інших особливих точок (рис. 7.1). Оскільки $f(z)$ аналітична в області D^*, повну межу якої складають Γ й сукупність контурів γ_k, й неперервна в замкненій області $\overline{D}^*$, то за теоремою Коші для многозв'язної області (теорема 4.4)

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz = 0.$$

Оскільки *при обчисленні лишку* в точці z_k *додатним* напрямком обходу оточуючого її контура γ_k вважається *протилежний* тому, у якому цей контур обходиться в згаданій теоремі, тобто $\underset{z=z_k}{res}\, f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_k^-} f(z)dz$, то, змінивши напрямки обходу усіх γ_k, отримаємо $\oint_{\Gamma} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k^-} f(z)dz = 0$, звідки й випливає (7.6).

Формула (7.6) має велике практичне значення, оскільки дозволяє замінити безпосереднє обчислення інтеграла $\oint_{\Gamma} f(z)dz$ обчисленням лишків в особливих точках, що значно простіше.

Приклад 7.5. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}dz$.

Розв'язання. В області $|z|<3$ функція $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}$ аналітична всюди, окрім точок $z=-1$ й $z=2$. За теоремою Коші про лишки

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}dz = 2\pi i\left[\underset{z=-1}{res}\, f(z) + \underset{z=2}{res}\, f(z)\right].$$

Точка $z=-1$ є полюсом другого порядку, отже, за формулою (7.3)

$$\underset{z=-1}{res}\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}\right] = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z-2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2} = -\frac{4}{9e}.$$

Точка $z=2$ є *простим полюсом,* отже, за формулою (7.4)

$$\underset{z=2}{res}\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} = \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}\right] = \lim_{z\to 2}\left[\frac{e^z}{(z+1)^2}\right] = \frac{e^2}{9}.$$

Тоді $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}dz = 2\pi i\left(\dfrac{e^2}{9}-\dfrac{4}{9e}\right) = \dfrac{2}{9}\pi\dfrac{e^3-4}{e}i.$

Приклад 7.6. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z-i|=3} \dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$.

Розв'язання. В крузі $|z-i|<3$ підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}$ аналітична всюди, окрім точок $z_1=0$ й $z_2=i$. За основною теоремою Коші про лишки

$$\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz = 2\pi i\left[\underset{z=0}{res}\, f(z) + \underset{z=i}{res}\, f(z)\right].$$

Точка $z=0$ є *усувною* особливою точкою функції $f(z)$, оскільки

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2ze^{z^2}}{3z^2-2iz} = 2\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{z^2}}{3z-2i} = i$ (границя скінченна).

Тому $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=0$.

Точка $z_2=i$ є *простим полюсом* (полюсом першого порядку) функції $f(z)$, оскільки $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}=\infty$. Обчислимо лишок в цій точці:

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}\right]=\frac{e^{-1}-1}{-1}=1-\frac{1}{e}.$$

Отже, $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3}\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz=2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

Зауваження. Лишок функції $f(z)$ *в простому полюсі* $z_2=i$ можна також обчислити за формулою (7.5):

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z)=\left.\frac{\dfrac{e^{z^2}-1}{z^2}}{(z-i)'}\right|_{z=i}=\left.\frac{e^{z^2}-1}{z^2}\right|_{z=i}=1-\frac{1}{e}.$$

<u>Приклад 7.7.</u> Обчислити інтеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{z+1}{z^2+2z-3}dz$.

Розв'язання. В крузі $|z|<4$ підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+2z-3}$ аналітична всюди, окрім точок $z_1=-3$ й $z_2=1$, які є *простими полюсами*. За основною теоремою Коші про лишки

$$\oint\limits_{|z|=4}\frac{z+1}{z^2+2z-3}dz=2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=-3} f(z)+\operatorname*{res}_{z=1} f(z)\right].$$

За формулою (7.5) $\displaystyle\operatorname*{res}_{z=-3} f(z)=\left.\frac{z+1}{(z^2+2z-3)'}\right|_{z=-3}=\left.\frac{z+1}{2z+2}\right|_{z=-3}=\frac{1}{2}$,

$\displaystyle\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=\left.\frac{z+1}{(z^2+2z-3)'}\right|_{z=1}=\left.\frac{z+1}{2z+2}\right|_{z=1}=\frac{1}{2}$. Отже, $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{z+1}{z^2+2z-3}dz=2\pi i$.

7.3. Лишок функції у нескінченно віддаленій точці. Узагальнення основної теореми

Нехай функція $f(z)$ аналітична в проколеному околі $R < |z| < \infty$ точки $z = \infty$. Тоді ця точка для функції $f(z)$ є або ізольованою особливою точкою однозначного характеру, або точкою аналітичності, а функція $f(z)$ в області $R < |z| < \infty$ подається збіжним рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}.$$

Лишком функції $f(z)$ в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$ (***у нескінченності***) називається значення інтеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^-} f(z)\, dz,$$

де $\mathbf{\Gamma}$ – досить великий довільний замкнений контур (наприклад, коло $|z| = R$), який проходиться *за ходом годинникової стрілки*, так що окіл точки $z = \infty$, обмежений *зсередини* цим контуром, залишається *зліва*.

З цього означення безпосередньо випливає, що

$$\mathop{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)\, dz = -C_{-1}, \qquad \textbf{(7.7)}$$

де контур $\mathbf{\Gamma}$ проходиться *проти ходу годинникової стрілки*, а C_{-1} – коефіцієнт при $\frac{1}{z}$ у розвиненні функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки $z = \infty$.

На відміну від лишку у *скінченній усувній* особливій точці або точці аналітичності, який *завжди дорівнює нулю*, лишок у *нескінченно віддаленій усувній* особливій точці або точці аналітичності може виявитися *відмінним від нуля*. Наприклад, функція $f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2}$ в точці $z = \infty$ має усувну особливість, оскільки $\lim_{z \to \infty} f(z) = 1$ і, як завжди, ми вважаємо $f(\infty) = 1$.

Оскільки лоранівське розвинення цієї функції в околі нескінченно віддаленої точки має вигляд $f(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$, то $C_{-1}=1$ і, отже, $\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=-1\neq 0$.

Відомі розвинення в ряд Маклорена функцій e^z, $\sin z$, $\cos z$, shz, chz можна розглядати також як їх розвинення в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки. Оскільки усі ці розвинення містять нескінченну кількість членів з додатними степенями z, то вказані функції мають в точці $z=\infty$ істотну особливість.

Теорема 7.2 ***(про повну суму лишків)***. Якщо функція $f(z)$ аналітична в усій розширеній комплексній площині за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок z_k $(k=\overline{1,\ n+1})$, де $z_{n+1}=\infty$, то сума усіх її лишків, *включно з лишком у нескінченності*, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\underset{z=z_k}{res}\, f(z)=0 \tag{7.8}$$

або

$$\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res}\, f(z)+\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=0\,. \tag{7.9}$$

Зауваження. Тут нескінченно віддалена точка $z=\infty$ є або особливою точкою, або точкою аналітичності.

Доведення. Насправді, нехай *усі скінченні* особливі точки містяться всередині деякого замкненого контура Γ. За основною теоремою про лишки (теорема 7.1)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res}\, f(z)\,.$$

Але ж, зважаючи на (7.7), маємо $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)dz=-\underset{z=\infty}{res}\, f(z)$, звідки й випливає твердження (7.8) теореми.

Наслідок.

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=-\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res}\, f(z) \tag{7.10}$$

або

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = -2\pi i \mathop{res}\limits_{z=\infty} f(z). \qquad \textbf{(7.11)}$$

Отже, основна теорема 7.1 може бути узагальнена наступним чином.

Теорема 7.1′ ***(узагальнена теорема про лишки).*** Нехай функція $f(z)$ аналітична на розширеній комплексній площині всюди, окрім скінченного числа ізольованих особливих точок z_k $(k = \overline{1,\ n+1})$, де $z_{n+1} = \infty$ (може бути й точкою аналітичності), причому усі скінченні особливі точки містяться всередині деякого замкненого контура Γ. Тоді

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathop{res}\limits_{z=z_k} f(z) \qquad \textbf{(7.6)}$$

або

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = -2\pi i \mathop{res}\limits_{z=\infty} f(z). \qquad \textbf{(7.11)}$$

Ця теорема дозволяє суттєво спростити обчислення інтеграла $\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz$ у випадку, коли *ззовні* деякого замкненого контура Γ міститься значно менше скінченних особливих точок, ніж *всередині*, а на самому контурі їх немає. Тоді замість обчислення інтеграла безпосередньо за формулою (7.6) зручніше скористатися наслідком формул (7.6) та (7.9)

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = -2\pi i \left[\sum_{k=1}^{m} \mathop{res}\limits_{z=z_k} f(z) + \mathop{res}\limits_{z=\infty} f(z) \right], \qquad \textbf{(7.12)}$$

де z_k $(k = \overline{1,\ m})$ – ізольовані скінченні особливі точки, що лежать *ззовні* контура Γ.

Зауваження. Якщо функція $f(z)$ *аналітична в точці* $z = \infty$, то

$$\mathop{res}\limits_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \left[z\,[f(\infty) - f(z)] \right]. \qquad \textbf{(7.13)}$$

<u>Приклад 7.8.</u> Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{1+z^{12}}$.

Розв'язання. В області $|z| < 2$ підінтегральна функція $f(z) = \dfrac{1}{1+z^{12}}$ аналітична всюди, окрім особливих точок (простих полюсів) $z_1, z_2, ..., z_{12}$, які є коренями рівняння $1 + z^{12} = 0$. Усі ці точки містяться всередині кола $|z| = 2$, отже, застосування основної теореми про лишки приведе до доволі громіздких обчислень. Тому зручніше використати формулу (7.11).

Розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки має вигляд:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^{12}} = \frac{1}{z^{12}} \frac{1}{1+\frac{1}{z^{12}}} = \frac{1}{z^{12}}\left(1 - \frac{1}{z^{12}} + \frac{1}{z^{24}} - \frac{1}{z^{36}} - ...\right) = \frac{1}{z^{12}} - \frac{1}{z^{24}} + \frac{1}{z^{36}} - ....$$

Бачимо, що $\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -C_{-1} = 0$. Тоді, на підставі (7.10), маємо

$$\oint\limits_{|z|=2} f(z) = -2\pi i \underset{z=\infty}{res} f(z) = 0.$$

Зауваження. Оскільки $f(z)$ аналітична в точці $z = \infty$ й $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, то за формулою (7.13) отримаємо той самий результат:

$$\underset{z\to\infty}{res}\, f(z) = \lim_{z\to\infty}\left[z\left(0 - \frac{1}{1+z^{12}}\right)\right] = \lim_{z\to\infty}\left(-\frac{z}{1+z^{12}}\right) = 0,$$

отже,

$$\oint\limits_{|z|=2} f(z) = -2\pi i \underset{z=\infty}{res} f(z) = 0.$$

<u>Приклад 7.9.</u> Обчислити інтеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+3)^3(z^3+4)^4}\,dz$.

Розв'язання. В області $|z| < 3$ підінтегральна функція $f(z) = \dfrac{z^{17}}{(z^2+3)^3(z^3+4)^4}$ аналітична всюди, окрім п'яти скінченних особливих точок (кратних полюсів), що є кратними нулями знаменника. Як і при розв'язанні попереднього прикладу, скористаємось формулою (7.11).

Розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки має вигляд:

$$f(z)=\frac{z^{17}}{(z^2+3)^3(z^3+4)^4}=\frac{z^{17}}{z^6\left(1+\frac{3}{z^2}\right)^3 z^{12}\left(1+\frac{4}{z^3}\right)^4}=\frac{1}{z}\frac{1}{\left(1+\frac{3}{z^2}\right)^3\left(1+\frac{4}{z^3}\right)^4}.$$

Неважко бачити, що *правильна* частина розвинення починається з члена $\frac{1}{z}$, отже, $\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=-C_{-1}=-1$. Тоді, на підставі (7.11), маємо

$$\oint\limits_{|z|=3} f(z)\,dz=-2\pi i\,\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=2\pi i.$$

За формулою (7.13) маємо той самий результат:

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=\lim_{z\to\infty}\left[z\left(0-\frac{z^{17}}{(z^2+3)^3(z^3+4)^4}\right)\right]=\lim_{z\to\infty}\left(-\frac{z^{18}}{(z^2+3)^3(z^3+4)^4}\right)=-1,$$

отже,

$$\oint\limits_{|z|=3} f(z)\,dz=-2\pi i\,\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=2\pi i.$$

<u>Приклад 7.10.</u> Обчислити інтеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(z-4)(z^2+1)^2(z^3-3)}\,dz$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(z-4)(z^2+1)^2(z^3-3)}$ в області $|z|<2$ аналітична всюди, окрім шести скінченних особливих точок: істотно особливої точки $z_1=1$, трьох простих полюсів $z_2=\sqrt[3]{3}$, $z_{3,4}=-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}(1\pm i\sqrt{3})$ і двох двократних полюсів $z_{5,6}=\pm i$. Особлива точка $z_7=4$ є простим полюсом функції $f(z)$, але вона розташована *ззовні* кола $|z|=2$. У нескінченно віддаленій точці, як неважко бачити, $f(z)$ аналітична.

Безпосереднє застосувати формулу (7.6) дуже складно. Тому скористаємося тією обставиною, що всередині заданого кола міститься значно більше особливих точок, ніж ззовні, і застосуємо формулу (7.12). В нашому випадку

$$\oint\limits_{|z|=2} f(z)\,dz = -2\pi i\left(\underset{z=4}{res}\, f(z) + \underset{z=\infty}{res}\, f(z\right).$$

Обчислимо: $\underset{z=4}{res}\, f(z) = \lim\limits_{z\to 4}\left[(z-4)\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(z-4)(z^2+1)^2(z^3-3)}\right] = \dfrac{e^{\frac{1}{3}}}{17629}$.

Оскільки $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(z-4)(z^2+1)^2(z^3-3)} = 0$, то за формулою (7.13)

$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = \lim\limits_{z\to\infty}\left[z\left(0 - \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(z-4)(z^2+1)^2(z^3-3)}\right)\right] = 0$. Тоді

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(z-4)(z^2+1)^2(z^3-3)}\,dz = -2\pi i\frac{e^{\frac{1}{3}}}{17629} \approx -0{,}5\cdot 10^{-3} i.$$

7.4. Логарифмічний лишок. Підрахунок числа нулів і полюсів аналітичної функції

Нехай функція $f(z)$ аналітична всюди в однозв'язній області D, за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок z_k $(k = 1, 2, ..., M)$, причому *усі* z_k *є полюсами*. Припустимо, що *на межі* Γ області D функція $f(z)$ не має ані нулів, ані особливих точок.

Логарифмічною похідною функції $f(z)$ називається похідна функції $Ln\, f(z)$

$$[Ln\, f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)}. \qquad \textbf{(7.14)}$$

Вона є однозначною аналітичною функцією всюди, за винятком особливих точок і нулів функції $f(z)$.

Логарифмічним лишком функції $f(z)$ ***в точці*** z_0 називається лишок в цій точці логарифмічної похідної $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ функції $f(z)$, тобто $\underset{z=z_0}{res}\dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

За основною теоремою 7.1 *сума логарифмічних лишків функції* $f(z)$ *в області* D дорівнює $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$. Цю величину називають також ***логарифмічним лишком функції*** $f(z)$ ***відносно замкненого контура*** Γ.

Аналіз розвинень логарифмічної похідної $f'(z)\,/\,f(z)$ в ряд Лорана в околі нулів і полюсів функції $f(z)$ приводить до наступного результату.

Теорема 7.3. Нулі і полюси функції $f(z)$ *незалежно* від їх порядку є *простими полюсами* логарифмічної похідної $f'(z)\,/\,f(z)$. У нулі z_0 порядку (кратності) n логарифмічний лишок $\underset{z=z_0}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=n$, а у полюсі z_0 порядку p логарифмічний лишок $\underset{z=z_0}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=-p$.

Наприклад, функція $f(z)=\frac{\sin z}{(z+1)^5}$ має нескінченну кількість простих нулів $z=k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) та один полюс $z=-1$ 5-го порядку. Отже, $\underset{z=k\pi}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=1$ ($k\in\mathbb{Z}$), $\underset{z=-1}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=-5$.

На підставі теореми 7.3 та основної теореми 7.1 Коші про лишки можна підраховувати число нулів і полюсів аналітичних функцій в заданих областях. При цьому *кожен нуль або полюс рахується стільки разів, який його порядок*.

Повним числом N нулів (***повним числом P полюсів***) функції $f(z)$ називається число нулів (полюсів) з урахуванням їх кратності. Отже, якщо n_k – порядок нуля $\tilde{z}_k$ $(k=1,2,...,l)$, а p_k – порядок полюса $\hat{z}_k$ $(k=1,2,...,m)$, то $N=\sum\limits_{k=1}^{l}n_k$, $P=\sum\limits_{k=1}^{m}p_k$. Має місце теорема.

Теорема 7.4 ***(про логарифмічний лишок)***. Нехай функція $f(z)$ аналітична в області D за винятком скінченного числа полюсів, неперервна на її межі Γ й в жодній точці цієї межі не дорівнює нулю. Тоді різниця між повним числом нулів N і повним числом полюсів P функції $f(z)$ в області D дорівнює логарифмічному лишку функції $f(z)$ відносно Γ:

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz. \qquad (7.15)$$

Наслідок. Якщо функція $f(z)$ *аналітична* в області D, то вона не має в цій області особливих точок, отже, $P = 0$ *й повне число нулів* цієї функції *всередині замкненого контура* Γ є

$$N = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Зауваження. Теорема справедлива також й для многозв'язної області.

<u>Приклад 7.11.</u> Знайти логарифмічний лишок функції $f(z) = \dfrac{z}{1+z^3}$ відносно кола $|z| = 2$.

Розв'язання. В крузі $|z| < 2$ задана функція має один простий нуль $\tilde{z}_1 = 0$ й три простих полюси $\hat{z}_1 = -1$, $\hat{z}_{2,3} = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отже, $N = 1\cdot 1 = 1$, $P = 3\cdot 1 = 3$. Тоді за формулою (7.15) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P = 1 - 3 = -2$.

<u>Приклад 7.12.</u> Знайти логарифмічний лишок функції $f(z) = \dfrac{(2-z)^6}{(z^2+1)^2(z-3)}$ відносно кола $|z| = 4$.

Розв'язання. В крузі $|z| < 4$ задана функція має один нуль шостого порядку $\tilde{z}_1 = 2$, два полюси другого порядку $\hat{z}_{1,2} = \pm i$ і один простий полюс $\hat{z}_3 = 3$. Отже, $N = 1\cdot 6 = 6$, $P = 2\cdot 2 + 1\cdot 1 = 5$. Тоді за формулою (7.15)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P = 6 - 5 = 1.$$

Формула (7.15) може бути переписана у вигляді

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma} \arg f(z) = N - P, \qquad (7.16)$$

де $\Delta_{\Gamma} \arg f(z)$ – повний приріст аргументу функції $f(z)$ при *однократному додатному обході контура* Γ. З геометричної ж точки зору величина $\dfrac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma} \arg f(z)$ є *числом обертів* вектора $w = f(z)$ навколо точки $w = 0$ при обході контура $\boldsymbol{C}$, що є образом $\boldsymbol{\Gamma}$ при відображенні $\boldsymbol{w = f(z)}$. На рис. 7.2 це число дорівнює 2. Зауважимо, що відповідний *додатному* обходу $\boldsymbol{\Gamma}$ обхід контура $\boldsymbol{C}$ може бути як додатним, так і від'ємним.

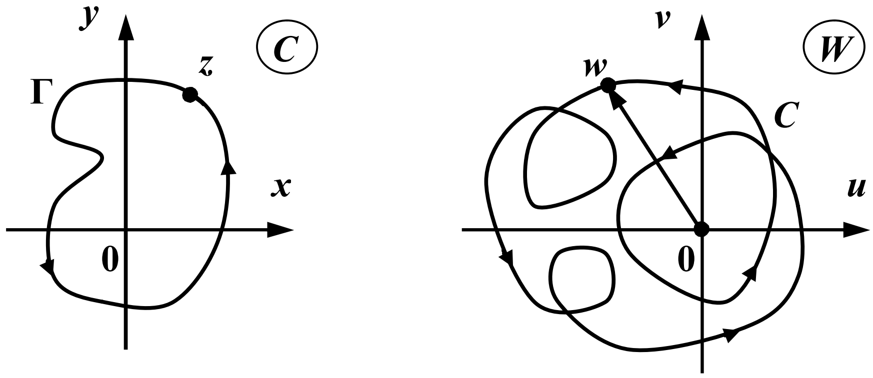

Рис. 7.2

Формула (7.16) отримала назву ***принципу аргументу***. Така інтерпретація часто виявляється корисною при підрахунку повного числа нулів аналітичної функції в заданій області. В багатьох випадках відповідні обчислення можна значно полегшити завдяки наступній теоремі, сформульованій і доведеній у 1862 р. французьким математиком Еженом Руше (1832-1910).

Теорема 7.5 ***(теорема Руше)***. Якщо функції $\boldsymbol{f(z)}$ й $\boldsymbol{g(z)}$ аналітичні в однозв'язній області $\boldsymbol{D}$, обмеженій замкненим контуром $\boldsymbol{\Gamma}$, а на самому контурі неперервні і задовольняють умові $|\boldsymbol{f(z)}| > |\boldsymbol{g(z)}|$, то функції $\boldsymbol{f(z)}$ й $\boldsymbol{f(z)+g(z)}$ в області $\boldsymbol{D}$ *мають однакове повне число нулів.*

<u>Приклад 7.13.</u> Визначити число коренів рівняння $\boldsymbol{5z^7 - 9z^3 + z - 2 = 0}$ всередині круга $|z| < \mathbf{1}$.

Розв'язання. Позначимо $\boldsymbol{f(z) = -9z^3}$, $\quad \boldsymbol{g(z) = 5z^7 + z - 2}$. В точках кола $|z| = \mathbf{1}$ маємо $|\boldsymbol{f(z)}| = |-\mathbf{9}z^3| = \mathbf{9}$, $|\boldsymbol{g(z)}| = |\mathbf{5}z^7 + z - \mathbf{2}| \le |\mathbf{5}z^7| + |z| + |-\mathbf{2}| = \mathbf{8}$. Отже, на колі $|z| = \mathbf{1}$ виконується умова $|\boldsymbol{f(z)}| > |\boldsymbol{g(z)}|$. Тому за теоремою Руше функція $\boldsymbol{f(z) + g(z) = 5z^7 - 9z^3 + z - 2}$ має всередині круга $|z| < \mathbf{1}$ стільки ж нулів, скільки й функція $\boldsymbol{f(z) = -9z^3}$. А оскільки $\boldsymbol{f(z)}$ має в цьому крузі **3** нулі ($\boldsymbol{z = 0}$ є нулем **3**-го порядку), то й вихідне рівняння має всередині круга $|z| < \mathbf{1}$ рівно **3** корені.

Зауваження. Теорема Руше є підставою одного з багатьох способів доведення вже згаданої у п. 2.4 ***основної теореми алгебри***: многочлен n-го степеня

$$R(z)=r_0z^n+r_1z^{n-1}+...+r_{n-1}z+r_n \quad (r_0\neq 0)$$

має в комплексній площині рівно n (скінченних) коренів, якщо кожен корінь рахувати стільки разів, яка його кратність.

Підрахунок числа нулів аналітичних функцій в заданих областях є дуже важливим для теорії коливань в механічних і електричних системах.

7.5. Застосування лишків до обчислення деяких інтегралів від функцій дійсної змінної

За допомогою лишків можна обчислювати інтеграли від функцій не тільки комплексної, але й *дійсної* змінної. Тут ми розглянемо лише деякі типи таких інтегралів. Більш докладні відомості можна знайти, наприклад, у [27].

7.5.1. Інтеграли вигляду $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)dx$

Тут $R(\cos x,\sin x)$ – *раціональна* функція від $\cos x$, $\sin x$.

Замінимо змінну за формулою $z=e^{ix}$. Тоді

$$\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})=\frac{z^2-1}{2iz},\quad \cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})=\frac{z^2+1}{2z},$$

$dz=e^{ix}idx=zidx$, звідки $dx=\dfrac{dz}{iz}$. При змінюванні x від 0 до 2π точка z пробігає коло $|z|=1$ у додатному напрямку. Тому отримуємо

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)dx=\oint\limits_{|z|=1} R_1(z)dz,$$

де $R_1(z)$ – *дробово-раціональна* функція $R_1(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, де $P_n(z)$ й $Q_m(z)$ – многочлени степенів n й m відповідно. Тоді за основною теоремою 7.1 Коші про лишки

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \oint_{|z|=1} R_1(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, R_1(z), \qquad (7.17)$$

де $z_1, z_2, ..., z_n$ – усі полюси функції $R_1(z)$, що лежать *всередині* круга $|z| < 1$.

Приклад 7.14. Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{5 - 3\cos x}$.

Розв'язання. Зробимо рекомендовану заміну змінної $z = e^{ix}$ у підінтегральному виразі:

$$\frac{\cos 2x dx}{5 - 3\cos x} = \frac{(2\cos^2 x - 1)dx}{5 - 3\cos x} = \frac{\left[2\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2 - 1\right]\frac{dz}{iz}}{5 - 3\frac{z^2+1}{2z}} = \frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{\frac{10z - 3z^2 - 3}{2z}}\frac{dz}{iz} =$$

$$= i\frac{z^4+1}{z^2(3z^2 - 10z + 3)}dz.$$ Отже, $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{5 - 3\cos x} = i\oint_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2(3z^2 - 10z + 3)}dz .$$

Підінтегральна функція $R_1(z) = \frac{z^4+1}{z^2(3z^2 - 10z + 3)} = \frac{z^4+1}{3z^2(z-3)\left(z - \frac{1}{3}\right)}$ має три особливі точки: полюс другого порядку $z_1 = 0$ і два прості полюси $z_2 = 3$ й $z_3 = \frac{1}{3}$, з яких полюс z_2 лежить *поза кругом* $|z| < 1$. Обчислимо лишки в точках z_1 й z_3:

$$\underset{z=0}{res}\, R_1(z) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 \frac{z^4+1}{z^2(3z^2 - 10z + 3)}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^4+1}{3z^2 - 10z + 3}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left[\frac{4z^3(3z^2 - 10z + 3) - (z^4+1)(6z - 10)}{(3z^2 - 10z + 3)^2}\right] = \frac{10}{9},$$

$$\underset{z=\frac{1}{3}}{res}\, R_1(z) = \lim_{z\to \frac{1}{3}}\left[\left(z - \frac{1}{3}\right)\frac{z^4+1}{3z^2(z-3)\left(z - \frac{1}{3}\right)}\right] = \lim_{z\to \frac{1}{3}}\left[\frac{z^4+1}{3z^2(z-3)}\right] = -\frac{41}{36}.$$

Тоді за формулою (7.17) маємо

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{5-3\cos x} = i \oint_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2(3z^2-10z+3)} dz = i \cdot 2\pi i \cdot \left(\frac{10}{9} - \frac{41}{36} \right) = \frac{\pi}{18} .$$

Розглянемо далі обчислення за допомогою лишків деяких типів *невласних* інтегралів від функцій дійсної змінної. Зауважимо, що при цьому *первісно передбачається збіжність* усіх інтегралів, що обчислюються (ознаки збіжності наведені у звичайних курсах математичного аналізу).

7.5.2. Інтеграли вигляду $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Будемо розглядати такі інтеграли ***у змісті головного значення***, тобто визначати їх рівністю

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx . \qquad \textbf{(7.18)}$$

Якщо існує скінченна границя у (7.18), то її називають ***головним значенням*** (за Коші) невласного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ і позначають символом $v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ (від початкових букв слів *"valeur principale"*, що в перекладі с французького означає *"головне значення"*). В цьому випадку говорять, що *інтеграл* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *існує* або *збігається у змісті головного значення*.

Зауваження. З існування (збіжності) невласного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ у *звичайному змісті*, тобто з існування й скінченності *обох* границь *окремо* у рівності

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{a} f(x)dx + \lim_{B\to\infty} \int\limits_{a}^{B} f(x)dx \qquad (\forall a),$$

випливає його існування (збіжність) й у змісті головного значення. *Обернене твердження*, взагалі кажучи, *невірне*. Наприклад, $v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin x\,dx=0$, оскільки функція $\sin x$ *непарна*: $\lim\limits_{P\to+\infty}\int\limits_{-P}^{P}\sin x\,dx=-\lim\limits_{P\to+\infty}\cos P+\lim\limits_{P\to+\infty}\cos(-P)=0$. Але при цьому *обидва інтеграли* $\int\limits_{-\infty}^{a}\sin x\,dx$ й $\int\limits_{a}^{\infty}\sin x\,dx$ *не існують* (розбігаються), оскільки границі

$$\lim_{B\to\infty}\int\limits_{a}^{B}\sin x\,dx=\lim_{B\to\infty}\int\limits_{a}^{B}\sin x\,dx=\lim_{B\to\infty}(-\cos x)\Big|_{a}^{B}=\cos a-\lim_{B\to\infty}\cos B$$

й

$$\lim_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{a}\sin x\,dx=\lim_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{a}\sin x\,dx=\lim_{A\to-\infty}(-\cos x)\Big|_{A}^{a}=\lim_{A\to-\infty}\cos A-\cos a$$

взагалі не існують.

До інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ *безпосередньо* застосувати теорему про лишки *не можна*, оскільки контур інтегрування є нескінченною незамкненою кривою.

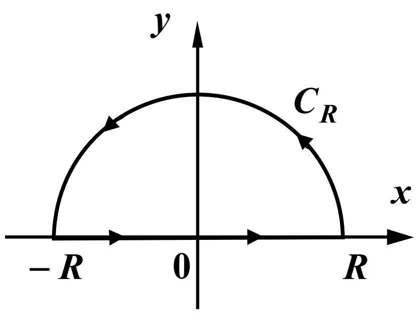

Рис. 7.3

Введемо допоміжний замкнений контур Γ_R, який складається з відрізку дійсної осі $[-R,R]$ $(R>0)$ й півкола C_R $\left(|z|=R,\ 0\le\arg z\le\pi\right)$, розташованого у верхній півплощині (рис. 7.3). Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 7.6. Нехай функція $f(z)$ аналітична в *верхній півплощині* $\operatorname{Im} z>0$ за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок $z_1,z_2,...,z_n$ й неперервна аж до дійсної осі. Тоді, якщо

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{C_R}f(z)\,dz=0, \tag{7.19}$$

де $C_R = \{\,|z| = R,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$, то невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ існує *у змісті головного значення* за Коші й

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z), \qquad (7.20)$$

де лишки беруться по всіх особливих точках функції $f(z)$, що лежать у верхній півплощині.

Зауваження. Існування невласного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ тут можна гарантувати *лише* у змісті *головного значення* за Коші.

Наслідок 1. Теорема залишається справедливою також *для нижньої півплощини* $\mathrm{Im}\, z < 0$. В цьому випадку за відповідних умов

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z). \qquad (7.21)$$

Тут лишки беруться по всіх полюсах функції $f(z)$, розташованих у *нижній півплощині*. Знак "–" з'являється внаслідок того, що контур Γ_R в цьому випадку обходиться *за ходом годинникової стрі*лки, тобто у *від'ємному напрям*ку.

Наслідок 2. Якщо $f(x)$ – ***дробово-раціональна функція*** $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ й $Q_m(x)$ – многочлени степенів n й m відповідно, то при $m \geq n+2$ умова (7.19) виконується, причому невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ збігається *у звичайному змісті*. Тому знак $v.p.$ у формулі (7.20) опускається, і вона набуває вигляду

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z). \qquad (7.22)$$

Тут лишки беруться по всіх полюсах функції $f(z)$, розташованих у *верхній півплощині*. Знак $v.p.$ опускається також у формулі (7.21). Якщо при цьому функція $f(x)$ – *парна*, то

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi i\sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} f(z). \qquad (7.23)$$

Приклад 7.15. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Розв'язання. Введемо функцію $f(z)=\frac{1}{z^2+2z+2}$, яка на дійсній осі, тобто при $z=x$, співпадає з підінтегральною функцією $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$.

Функція $f(z)$ є дробово-раціональною і задовольняє умови наслідку 2 з теореми 7.6. Вона аналітична в верхній півплощині за винятком *одного простого* полюса в точці $z_1=-1+i$. Тоді за формулою (7.22)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = 2\pi i \underset{z=-2+i}{res}\left[\frac{1}{z^2+2z+2}\right].$$

Обчислимо лишок:

$$\underset{z=-2+i}{res}\left[\frac{1}{z^2+2z+2}\right] = \lim_{z\to -2+i}\left[(z+2-i)\frac{1}{z^2+2z+2}\right] = \lim_{z\to -2+i}\left[\frac{1}{z+2+i}\right] = -\frac{i}{2}.$$

Отже, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = 2\pi i\left(-\frac{i}{2}\right)=\pi$. ***Зауваження.*** Той самий результат ми б отримали, обчисливши цей нескладний інтеграл безпосередньо за означенням: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to\infty}}\int_{A}^{B}\frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to\infty}} arctg(x+1)\Big|_{A}^{B} =$

$= arctg(\infty)-arctg(-\infty)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$. Тому цей приклад наведений з суто демонстраційною метою.

Приклад 7.16. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$.

Розв'язання. Введемо функцію $f(z)=\frac{z}{(z^2+4z+13)^2}$, яка на дійсній осі, тобто при $z=x$, співпадає з підінтегральною функцією $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+4x+13)^2}$.

Функція $f(z)$ є дробово-раціональною і задовольняє умови наслідку 2 з теореми 7.6. Вона аналітична в верхній півплощині за винятком *одного* полюса *другого порядку* в точці $z_1=-2+3i$. Тоді за формулою (7.22)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-2+3i}\left[\frac{z}{(z^2+4z+13)^2}\right].$$

Обчислимо лишок за формулою (7.3) при $m=2$:

$$\operatorname*{res}_{z=-2+3i}\left[\frac{z}{(z^2+4z+13)^2}\right]=\lim_{z\to-2+3i}\frac{d}{dz}\left[(z+2-3i)^2\frac{z}{(z^2+4z+13)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to-2+3i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+2+3i)^2}\right]=\lim_{z\to-2+3i}\left[\frac{-z+2+3i}{(z+2+3i)^3}\right]=\frac{i}{54}.$$

Отже, $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}=2\pi i\cdot\frac{i}{54}=-\frac{\pi}{27}$. Безосереднє обчислення цього інтеграла, як і в попередньому прикладі, також можливе, але воно вже не є кращим способом, оскільки пов'язане з досить громіздкими викладками.

Приклад 7.17. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Розв'язання. Введемо функцію $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$, яка на дійсній осі, тобто при $z=x$, співпадає з підінтегральною функцією $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$.

Функція $f(z)$ є дробово-раціональною і задовольняє умови наслідку 2 з теореми 7.6. Вона аналітична в *верхній* півплощині за винятком *одного* полюса *третього порядку* в точці $z_1=i$. Тоді за формулою (7.22) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}=2\pi i\operatorname*{res}_{z=i}\left[\frac{1}{(z^2+1)^3}\right]$. Обчислимо лишок за формулою (7.3) при

$m=3$: $$\operatorname*{res}_{z=i}\left[\frac{1}{(z^2+1)^3}\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3\frac{1}{(z^2+1)^3}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z+i)^3}\right]=$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[\frac{12}{(z+i)^5}\right] = -\frac{3}{16}i.$$

Отже, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i\left(-\frac{3}{16}i\right) = \frac{3}{8}\pi$ і, оскільки функція $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$ *парна*, то $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3}{16}\pi$.

7.5.3. Інтеграли вигляду $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx$

Обчислення інтегралів цього класу грунтується на використанні *леми Жордана.*

Теорема 7.7 ***(лема Жордана)***. Нехай функція $g(z)$ аналітична в *верхній півплощині* $\operatorname{Im} z > 0$ за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок й прямує в цій півплощині до нуля, тобто $\lim\limits_{|z|\to\infty} g(z) = 0$. Тоді при $\alpha > 0$

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{C_R} e^{i\alpha z} g(z)\,dz = 0, \qquad (7.24)$$

де C_R – дуга півкола $|z| = R$ у верхній півплощині $(\operatorname{Im} z \ge 0)$.

Зауваження 1. Якщо $\alpha < 0$, а функція $g(z)$ задовольняє умови леми Жордана у *нижній* півплощині $\operatorname{Im} z < 0$, то формула (7.24) справедлива, якщо C_R є дугою півкола $|z| = R$ у нижній півплощині $(\operatorname{Im} z \le 0)$. Аналогічні твердження мають місце й при $\alpha = \pm ip$ $(p > 0)$ для півкола, розташованого відповідно у *правій* $(\operatorname{Re} z \ge 0)$ або *лівій* $(\operatorname{Re} z \le 0)$ півплощині. Зокрема, при інтегруванні у *правій* півплощині формула (7.24) набуває вигляду

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{C_R} e^{-pz} g(z)\,dz = 0, \qquad (7.25)$$

де C_R – дуга півкола $|z| = R$ у правій півплощині $(\operatorname{Re} z \ge 0)$.

Зауваження 2. Лема Жордана залишається справедливою і тоді, коли функція $g(z)$ задовольняє сформульовані вище умови в області $\operatorname{Im} z > r_0$, а інтегрування виконується по дузі півкола $|z - ir_0| = R$ в області $\operatorname{Im} z \geq r_0$ (тут r_0 – фіксоване число, яке може бути як додатним, так і від'ємним).

Теорема 7.8. Нехай функція $g(z)$ задовольняє умови леми Жордана і *не має особливих точок на дійсній осі*. Тоді невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} g(x)dx$ збігається *у змісті головного значення* й

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} g(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}[e^{i\alpha z} g(z)], \tag{7.26}$$

де лишки беруться по усіх ізольованих особливих точках $z_1, z_2, ..., z_n$ функції $g(z)$ у *верхній* півплощині.

Наслідок. Якщо $g(x)$ – ***дробово-раціональна функція*** $g(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ й $Q_m(x)$ – многочлени степенів n й m відповідно, то при $m \geq n+1$ функція $g(z)$ задовольняє умови теореми, причому невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} g(x)dx$ збігається *у звичайному змісті*. Тому знак $v.p.$ у формулі (7.26) опускається, і вона набуває вигляду

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} g(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}[e^{i\alpha z} g(z)]. \tag{7.27}$$

(тут лишки беруться по всіх полюсах функції $e^{i\alpha z} g(z)$, розташованих у *верхній півплощині*). При цьому, оскільки за формулою Ейлера має місце співвідношення

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} g(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\alpha x \cdot g(x)\,dx + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\alpha x \cdot g(x)\,dx, \tag{7.28}$$

обидва невласні інтеграли $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\alpha x \cdot g(x)\,dx$ й $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\alpha x \cdot g(x)\,dx$ також збігаються у звичайному змісті. Отже, відокремлюючи дійсну і уявну частини в формулі (7.27), отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \alpha x \cdot g(x)\, dx = 2\pi \,\mathrm{Re}\left\{ i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} [e^{i\alpha z} g(z)] \right\} = -2\pi \,\mathrm{Im}\left\{ \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} [e^{i\alpha z} g(z)] \right\}, \quad (7.29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \alpha x \cdot g(x)\, dx = 2\pi \,\mathrm{Im}\left\{ i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} [e^{i\alpha z} g(z)] \right\} = 2\pi \,\mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} [e^{i\alpha z} g(z)] \right\}. \quad (7.30)$$

Тоді

– якщо функція $g(x)$ – *парна*, то

$$\int_{0}^{\infty} \cos \alpha x \cdot g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \alpha x \cdot g(x)\, dx = \pi \,\mathrm{Re}\left\{ i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} [e^{i\alpha z} g(z)] \right\} =$$

$$= -\pi \,\mathrm{Im}\left\{ \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} [e^{i\alpha z} g(z)] \right\}; \quad (7.31)$$

– якщо функція $g(x)$ – *непарна*, то

$$\int_{0}^{\infty} \sin \alpha x \cdot g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \alpha x \cdot g(x)\, dx = \pi \,\mathrm{Im}\left\{ i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} [e^{i\alpha z} g(z)] \right\} =$$

$$= \pi \,\mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} [e^{i\alpha z} g(z)] \right\}. \quad (7.32)$$

<u>Приклад 7.18.</u> Обчислити інтеграл $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$.

Розв'язання. Введемо функцію $f(z) = \dfrac{e^{2iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$. Якщо $z = x$, то $\mathrm{Re}\, f(z)$ співпадає з підінтегральною функцією $\varphi(x) = \dfrac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Функція $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ задовольняє умови леми Жордана, оскільки вона аналітична в верхній півплощині за винятком *двох простих* полюсів $z_1 = i$, $z_2 = 2i$ й $\lim\limits_{|z| \to \infty} g(z) = 0$. Тоді, оскільки $g(x)$ *є дробово-раціональною* функцією, то справедлива формула (7.27), яка відповідно до даного випадку має вигляд

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=2\pi i\left\{\underset{z=i}{res}\left[\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right]+\underset{z=2i}{res}\left[\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right]\right\}.$$

Обчислимо лишки:

$$\underset{z=i}{res}\left[\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right]=\lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right]=\lim_{z\to i}\left[\frac{e^{2iz}}{(z+i)(z^2+4)}\right]=-\frac{i}{6e^2},$$

$$\underset{z=2i}{res}\left[\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right]=\lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right]=\lim_{z\to 2i}\left[\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)(z+2i)}\right]=$$

$$=\frac{i}{12e^4}.$$

Отже, $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=2\pi i\left(-\frac{i}{6e^2}+\frac{i}{12e^4}\right)=\frac{\pi}{6}e^{-4}(2e^2-1)$.

Оскільки функція $g(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$ – *парна* і задовольняє умови наслідку з теореми 7.8, то за формулою (7.31) отримуємо

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\frac{\pi}{12}e^{-4}(2e^2-1).$$

Зауваження. Оскільки інтеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$ дорівнює *дійсному* числу $\dfrac{\pi}{6}e^{-4}(2e^2-1)$, то зі співвідношення (7.28) випливає, що *в даному випадку* $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\frac{\pi}{6}e^{-4}(2e^2-1)$, $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=0$.

Приклад 7.19. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^3\sin 3x}{(x^2+1)^2}dx$.

Розв’язання. Введемо функцію $f(z)=\dfrac{z^3e^{3iz}}{(z^2+1)^2}$. Якщо $z=x$, то $\operatorname{Im} f(z)$

співпадає з підінтегральною функцією $\varphi(x)=\dfrac{x^3\sin 3x}{(x^2+1)^2}$.

Функція $g(z)=\dfrac{z^3}{(z^2+1)^2}$ задовольняє умови леми Жордана, оскільки вона аналітична в верхній півплощині за винятком *одного* полюса *другого порядку* $z_1=i$ й $\lim\limits_{|z|\to\infty} g(z)=0$. Тоді, оскільки $g(x)$ *є дробово-раціональною* функцією, то справедлива формула (7.27), яка відповідно до даного випадку має вигляд

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3e^{3ix}}{(x^2+1)^2}dx=2\pi i\,\underset{z=i}{res}\left[\frac{z^3e^{3iz}}{(z^2+1)^2}\right].$$

Обчислимо лишок за формулою (7.3) при $m=2$:

$$\underset{z=i}{res}\left[\frac{z^3e^{3iz}}{(z^2+1)^2}\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{z^3e^{3iz}}{(z^2+1)^2}\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^3e^{3iz}}{(z+i)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{3iz^4-2z^3+3iz^2}{(z+i)^3}e^{3iz}=-\frac{1}{4}e^{-3}.$$

Отже, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3e^{3ix}}{(x^2+1)^2}dx=2\pi i\left(-\frac{1}{4}e^{-3}\right)=-i\frac{\pi}{2}e^{-3}$.

Функція $g(x)=\dfrac{x^3}{(x^2+1)^2}$ – *непарна* і задовольняє умови наслідку з теореми 7.8, тому за формулою (7.32) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^3\sin 3x}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{\pi}{4}e^{-3}$.

Зауваження. Оскільки інтеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3e^{3ix}}{(x^2+1)^2}dx$ дорівнює *чисто уявному* числу $-i\dfrac{\pi}{2}e^{-3}$, то зі співвідношення (7.28) випливає, що *в даному випадку*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\cos 3x}{(x^2+1)^2}dx=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin 3x}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{\pi}{2}e^{-3}.$$

Приклад 7.20. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx$.

Розв'язання. Введемо функцію $f(z)=\frac{(z-1)e^{iz}}{(z^2+9)^2}$. Якщо $z=x$, то $\mathrm{Im}\, f(z)$ співпадає з підінтегральною функцією $\varphi(x)=\frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}$.

Функція $g(z)=\frac{z-1}{(z^2+9)^2}$ задовольняє умови леми Жордана, оскільки аналітична в верхній півплощині за винятком *одного* полюса *другого порядку* $z_1=3i$ й $\lim\limits_{|z|\to\infty} g(z)=0$. Тоді, оскільки $g(x)$ є дробово-раціональною функцією, то справедлива формула (7.27), яка відповідно до даного випадку має вигляд $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{(x^2+9)^2}dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=3i}\left[\frac{(z-1)e^{iz}}{(z^2+9)^2}\right]$. Обчислимо лишок за формулою (7.3) при

$$m=2: \quad \operatorname*{res}_{z=3i}\left[\frac{(z-1)e^{iz}}{(z^2+9)^2}\right] = \lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left[(z-3i)^2\frac{(z-1)e^{iz}}{(z^2+9)^2}\right] = \lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)e^{iz}}{(z+3i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 3i}\frac{iz^2-iz-4z+5+3i}{(z+3i)^3}e^{iz} = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{27}i\right)e^{-3}.$$

Отже, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{(x^2+9)^2}dx = 2\pi i\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{27}i\right)e^{-3} = 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{27}+\frac{1}{12}i\right)e^{-3}$.

Зі співвідношення (7.28) випливає, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos x}{(x^2+9)^2}dx = \mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{(x^2+9)^2}dx = -2\pi\cdot\frac{1}{27}e^{-3},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx = \mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{(x^2+9)^2}dx = 2\pi\cdot\frac{1}{12}e^{-3}.$$

Зауваження. Застосування формул (7.29) й (7.30) приводить до тих самих результатів.

ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 7

Знайти лишки функції в її особливих точках:

7.1. $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$. **7.2.** $f(z)=z^3\sin\dfrac{1}{z^2}$. **7.3.** $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$.

Обчислити інтеграл:

7.4. $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z^3(z+1)}dz$. **7.5.** $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z\sin z}{(z-1)^5}dz$. **7.6.** $\oint\limits_{|z|=1/2}z^2\sin\dfrac{1}{z}dz$. **7.7.** $\oint\limits_{|z|=2}e^{\frac{z}{z-1}}dz$.

Обчислити інтеграл із застосуванням лишку у нескінченно віддаленій точці:

7.8. $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{e^z}{z-1}\,dz$. **7.9.** $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z^9}{z^{10}-1}\,dz$.

Знайти логарифмічний лишок функції відносно кола:

7.10. $f(z)=\dfrac{chz}{e^{iz}-1}$, $|z|=8$. **7.11.** $f(z)=\dfrac{(z^2+2)^4(z+4)^5}{(z-1)^3(z^3+3)^2}$, $|z|=5$.

Визначити число коренів рівняння всередині круга:

7.12. $z^4-3z^3-1=0$, $|z|<2$. **7.13.** $z^8-6z^6-z^3+2=0$, $|z|<1$.

Обчислити інтеграл:

7.14. $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\sin^2 x dx}{3+2\cos x}$. **7.15.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$. **7.16.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^4dx}{(x^2+4)^4}$.

7.17. $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{x\sin x\,dx}{x^4+x^2+1}$. **7.18.** $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos 3x dx}{x^2+4}$. **7.19.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos x dx}{x^2+9}$.

В І Д П О В І Д І

До розділу 1

1.1. 8. **1.2.** i. **1.3.** $\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i$. **1.4.** $-2+\frac{3}{2}i$. **1.5.** $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$
$=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}$. **1.6.** $\frac{3}{2}-2i$. **1.7.** $1-i$. **1.8.** а) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right)+\right.$
$\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right)\right]$ $(k=0,1,2,3)$; б) $\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)\right.$
$(k=0,1,2,3)$; в) $\sqrt[10]{8}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{20}+k\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{20}+k\frac{2\pi}{5}\right)\right]$ $(k=0,1,2,3,4)$.
1.9. $\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$. **1.10.** $-2+i$, $-3+i$. **1.11.** $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3}\right)\right]$
$(k=0,1,2)$. **1.12.** $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ $(k=0,1,2)$,
$\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ $(k=0,1,2)$.

До розділу 2

2.1. Гіпербола $xy=1$. **2.2.** Коло $x^2+(y+1)^2=1$. **2.3.** Еліпс $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$.
2.4. Коло $(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$. **2.5.** Пряма $x+y-16=0$. **2.6.** Частина прямої $x+2y+7=0$, $x\geq\frac{1}{2}$, $y\leq-\frac{15}{4}$. **2.7.** Еліпс $\frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{9}=1$.
2.8. Гіпербола $y^2-\frac{x^2}{9}=1$. **2.9.** Права вітка параболи $y=x^2$, що проходиться від точки $z=0$ до нескінченності. **2.10.** Зовнішність параболи $y=\frac{x^2}{4}-1$.

2.11. Внутрішність гіперболи $xy = -\frac{1}{2}$. **2.12.** Кільцева область між еліпсами $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ й $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$, включаючи самі еліпси. **2.13.** Внутрішність кільця, обмеженого колами $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ й $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$. **2.14.** $w = \frac{1+i}{2}$. **2.15.** $w = -\frac{5+12i}{13}$. **2.16.** $w = -\frac{i}{2}$. **2.17.** $u = 2x^2 - 2y^2 + y$, $v = 4xy + x$. **2.18.** $u = -2xy - x$, $v = 2 - y + x^2 - y^2$. **2.19.** $u = -y - \frac{y}{x^2+y^2}$, $v = -x + \frac{x}{x^2+y^2}$. **2.20.** $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy - 1$. **2.21.** $f(z) = (1+i)\bar{z}$.

2.22. $f(z) = z + \frac{1}{z}$. **2.23.** $f(z) = \frac{4\bar{z}}{\bar{z}^2 - z^2}$. **2.24.** Промінь, який іде по від'ємній частині дійсної осі з точки $w = -\frac{1}{4}$ в точку $w = \infty$. **2.25.** Піввісь $u = 0$, $v \geq 0$. **2.26.** Промінь, що іде по бісектрисі III координатного кута з ∞ в 0. **2.27.** $w = 2x - 1 + i2y$. **2.28.** $w = x^2 - y^2 + x + i(2x+1)y$.

2.29. $w = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$. **2.30.** $w = e^{1-x}\cos y - ie^{1-x}\sin y$.

2.31. $w = \sin x \cdot ch(1-y) - i\cos x \cdot sh(1-y)$.

2.32. $w = shx \cdot \cos(y+2) + i\,chx \cdot \sin(y+2)$.

2.33. $w = \frac{\sin x \cos x}{ch^2 y - \sin^2 x} + i\frac{shy\,chy}{ch^2 y - \sin^2 x}$.

2.34. $w = 3^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos\frac{y}{x^2+y^2} - i3^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin\frac{y}{x^2+y^2}$.

2.35. $ch1 \cdot \cos 1 - i\,sh1 \cdot \sin 1$. **2.36.** $\cos 1$. **2.37.** $-sh2 \cdot \cos 1 + i\,ch2 \cdot \sin 1$.

2.38. $(2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **2.39.** $\frac{\pi}{2}i$. **2.40.** $\left(2k + \frac{1}{4}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **2.41.** $i\,cth\pi$.

2.42. 0. **2.43.** $2k\pi - i\ln(\sqrt{2} - 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **2.44.** $k\pi + \frac{i}{2}\ln 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.45. $e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$, $k\in\mathbb{Z}$. **2.46.** $z_k=(2k+1)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$. **2.47.** $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$.

2.48. $z_k=(2k+1)\pi\pm i\ln 2$, $k\in\mathbb{Z}$. **2.49.** $\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **2.50.** $z=1-i$.

2.51. $z=-e+i$. **2.52.** 1. **2.53.** ∞. **2.54.** $-2i$. **2.55.** i.

До розділу 3

3.1. а) ні; б) так; в) ні; г) так. **3.2.** а) $2e^{2z}$; б) $\frac{1}{3}\cos\frac{z}{3}$; в) chz; г) $\frac{1}{z}$; д) не аналітична; е) shz. **3.4.** а) так; б) ні; в) так; г) ні. **3.5.** а) так; б) ні; в) так; г) ні. **3.6.** а) $f(z)=z^3+Ci$; б) $f(z)=\frac{z^2}{2}+C$; в) $f(z)=-iz^2+3+Ci$; г) $f(z)=2e^z+C$. **3.7.** а) $f(z)=\frac{1}{z}$; б) $f(z)=\ln z$; в) $f(z)=(1+2i)z^3+i$; г) $f(z)=2shz-z^2$. **3.8.** а) 4, $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{1}{e}$, $-\frac{\pi}{2}$; в) 1, 0; г) $3\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)$, $\pi-arctg\frac{4\pi}{\pi^2-4}$. **3.9.** а) уся площина; б) уся площина, окрім точки $z=2$;

в) уся площина, окрім точки $z=0$;

г) уся площина, окрім точок $z_k=1-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$.

До розділу 4

4.1. а) $2(i-1)$; б) $-2+\frac{4}{3}i$; в) -2. **4.2.** $-\frac{8}{3}$. **4.3.** $i(e^{\pi}+1)$.

4.4. $\frac{9}{4}-i\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **4.5.** $i\frac{\pi}{6}$. **4.6.** $\cos\frac{1}{4}ch\frac{1}{2}-\cos\frac{9}{4}ch\frac{3}{2}+i\left(\sin\frac{9}{4}sh\frac{3}{2}-\sin\frac{1}{4}sh\frac{1}{2}\right)$.

4.7. $\cos 1-\sin 1-\frac{i}{e}$. **4.8.** $1-\cos 1+i(\sin 1-1)$. **4.9.** $-\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^2}{4}+3\ln^2 2\right)+i\frac{\pi}{8}\ln 2$.

4.10. 0. **4.11.** $-1-i\,sh1$. **4.12.** $\frac{\pi}{e}$. **4.13.** $i\frac{\pi}{2}$. **4.14.** $\pi\,sh1$. **4.15.** 0. **4.16.** $-\frac{\pi i}{45}$.

4.17. $-\frac{\pi^2}{2}i$. **4.18.** $-\frac{\pi(\pi+2)\sqrt{2}}{8}i$. **4.19.** $-\frac{\pi}{27}i$. **4.20.** $\pi^3 i$. **4.21.** 0.

4.22. а) $2\pi i$; б) $\pi i(2-e)$; в) $-\pi e i$. **4.23.** а) $\frac{3\pi}{8}i$; б) $-\frac{3\pi}{8}i$. **4.24.** $\pi(2e-5)i$.

До розділу 5

5.1. 0. **5.2.** $\frac{1}{3}$. **5.3.** Не існує. **5.4.** Розбігається. **5.5.** Збігається.

5.6. Збігається. **5.7.** Збігається. **5.9.** $\sqrt{2}$. **5.10.** ∞. **5.11.** e^3. **5.12.** e. **5.13.** $\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$.

5.14. e. **5.15.** $\sqrt[3]{\frac{16}{3}}$. **5.16.** $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n z^{4n+1}}{(2n-1)!}$, $|z|<\infty$. **5.17.** $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n z^{3n+5}}{n}$, $|z|<\frac{1}{2}$.

5.18. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(-1)^n 2^{n+1}\right]z^n$, $|z|<\frac{1}{2}$. **5.19.** $3-\frac{z}{27}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{n!3^{4n-1}}z^n$,

$|z|<27$. **5.20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n}z^n$, $|z|<\frac{1}{2}$. **5.21.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}z+\frac{1}{3!2^3}z^3+\frac{3}{5!2^3}z^5+\ldots$,

$|z|<\pi$. **5.22.** $\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}z-\frac{4}{2!6^3}z^2+\frac{3}{3!6^3}z^3+\ldots$, $|z|<\sqrt{\ln^2 5+\pi^2}$.

5.23. $-\frac{1}{2!}z^2-\frac{2}{4!}z^4-\frac{16}{6!}z^6+\ldots$, $|z|<\frac{\pi}{2}$. **5.24.** $e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\ldots\right)$, $|z|<1$.

5.25. $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^{2n}}{4^{n+1}}$, $|z-3|<2$. **5.26.** $e^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{2n}}{n!}$, $|z|<\infty$.

5.27. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[-\frac{\sin 4}{(2n)!}(z+2)^{4n}+\frac{\cos 4}{(2n+1)!}(z+2)^{4n+2}\right]$, $|z|<\infty$.

5.28. $3\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n(z-1)^n}{n8^n}$, $|z-1|<\frac{8}{5}$.

5.29. $\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z+3)^{2n}}{n4^n}$, $|z+3|<2$.

5.30. $|z+2i|>3$. **5.31.** $|z-2-i|>\dfrac{1}{2}$. **5.32.** $0<|z-2+i|<1$. **5.33.** $2<|z|<4$.

5.34. $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{z^n}-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$. **5.35.** $-\dfrac{1}{9}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+4}{z^n}+\dfrac{1}{9}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$.

5.36. $\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{2n}}-\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^{2n}$. **5.37.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n z^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}z^n$.

5.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{z^n}+\dfrac{3}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}z^n$. **5.39.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n z^n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n$.

5.40. $\dfrac{2}{z+2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+3)(z+2)^n$. **5.41.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{n-1}}{(z+4)^n}+\dfrac{3}{5}+8\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{5^{n+1}}(z+4)^n$.

До розділу 6

6.1. $z=0$ – другого порядку, $z=\pm 2i$ – прості.
6.2. $z=0$ – третього порядку, $z_n=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ – прості.
6.3. $z=\pm\pi i$ – другого порядку, $z=(2n+1)\pi i$ $(n=1,\pm 2,\pm 3,...)$ – прості.
6.4. 1. **6.5.** 4. **6.6.** 6. **6.7.** 6. **6.8.** Полюс четвертого порядку.
6.9. Полюс простий. **6.10.** Усувна особлива точка. **6.11.** Істотно особлива точка. **6.12.** $z=0$ – полюс четвертого порядку, $z=-1$ – простий полюс.
6.13. а) простий полюс; б) усувна особлива точка; в) істотно особлива точка.

До розділу 7

7.1. $-\dfrac{17}{54e}$ в точці $z=-1$; $\dfrac{e^3}{27}$ в точці $z=2$. **7.2.** 0 в точці $z=0$. **7.3.** $-\dfrac{1}{e}$ в точці $z=1$. **7.4.** $\left(1-\dfrac{2}{e}\right)\pi i$. **7.5.** $\dfrac{\sin 1-4\cos 1}{12}\pi i$. **7.6.** $-\dfrac{\pi i}{3}$. **7.7.** $2\pi i e$.

7.8. $2\pi i e$. **7.9.** $2\pi i$. **7.10.** 3. **7.11.** 4. **7.12.** 3. **7.13.** 6. **7.14.** $\dfrac{\pi}{2}(3-\sqrt{5})$.

7.15. $\dfrac{\pi}{12}$. **7.16.** $\dfrac{\pi}{128}$. **7.17.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\dfrac{1}{2}$. **7.18.** $\dfrac{\pi}{4}e^{-6}$. **7.19.** $\dfrac{\pi}{3}e^{-3}$.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1967. – 780 с.

2. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968. – 416 с.

3. Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Т. 4: Функции комплексного переменного: теория и практика. – М.: Едиториал УРСС, 2001. – 352 с.

4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 608 с.

5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб. для вузов. Т.3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Дрофа, 2004. – 512 с.

6. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 312 с.

7. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн.: ТетраСистемс, 1999. – 640 с.

8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.2: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.

9. Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1991. – 448 с.

10. Евграфов М.А., Бежанов К.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Сборник задач по теории аналитических функций / Под ред. М.А. Евграфова. – М.: Наука, 1972. – 416 с.

11. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.

12. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие для ун-тов. – СПб.: Лань, 2002. – 749 с.

13. Леонтьева Т. А. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М: Научный мир. 2004. – 216 с.

14. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / Под ред. С.Н.Федина. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.

15. Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного (с элементами операционного исчисления): Учеб. для вузов. – СПб.: Лань, 2002. – 304 с.

16. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 520 с.

17. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. Ч.2. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.

18. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2001. – 445 с.

19. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

20. Половинкин Е.С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие. – М.: МФТИ 1999. – 256 с.

21. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

22. Радыгин В. М., Голубева О. В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. – М.: Высш. школа, 1983. – 160 с.

23. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / Под ред. А.И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.

24. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. Учебное пособие для втузов / Под ред. Г.И. Кручковича. – М.: Высшая школа, 1970. – 512 с.

25. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 3: Учеб. пособие для втузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 576 с.

26. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной: Учеб. для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 336 с.

27. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного: Учеб. для вузов. – М.: Наука, 1989. – 480 с.

28. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. III. Ч.2. – М.: Наука, 1974. – 672 с.

29. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения. – М.: Высшая школа, 1988. – 167 с.

30. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика в прикладах та задачах. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с.

31. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов. Т. 2. – СПб.: Политехника, 2003. – 477 с.

32. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.I. – М.: Наука, 1985. – 336 с.

33. Шабунин М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / М.И. Шабунин, Е.С. Половинкин, М.И. Карлов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 362 с.

34. Шведенко С. В. Начала анализа функций комплексной переменной. – М.: МИФИ, 2008. – 356 с.

35. Эйдерман В.Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

Навчальне видання

Павленко Анатолій Васильович
Кагадій Лариса Петрівна
Копорулін Володимир Львович

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Тем. план 2012, поз. 97

Підписано до друку 29.10.2012. Формат 60х84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 11,06. Умов. друк. арк. 10,92. Тираж 100 пр. Замовлення №143.

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна,4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ