МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

В.Л. КОПОРУЛІН, Л.В. МОССАКОВСЬКА

СТЕПЕНЕВІ РЯДИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Затверджено на засіданні Вченої ради академії як навчальний посібник. Протокол № 1 від 30.01.2012

Дніпропетровськ НМетАУ 2012

УДК 517(07)
Копорулін В.Л., Моссаковська Л.В. Степеневі ряди та їх застосування: Навч. посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 88 с.

Викладені основи теорії степеневих рядів. Розглянуті їх застосування до розв’язання диференціальних рівнянь та наближеного обчислення значень функцій і визначених інтегралів. Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв’язанням відповідних прикладів. Пропонуються задачі для самостійного виконання.

Призначений для студентів усіх напрямів.

Іл. 2. Бібліогр.: 37 найм.

Друкується за авторською редакцією

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: О.О. Сдвижкова, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)
В.Г. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ ім. О. Гончара)

З М І С Т

ВСТУП

Степеневі ряди завдяки своїм властивостям і відносній простоті знайшли широке застосування як зручний інструмент теоретичних і прикладних досліджень не тільки практично в усіх розділах математики і фізики, а й в багатьох галузях техніки і природознавства. Вони розглядаються як границя многочленів при прямуванні їх степенів до нескінченності і володіють майже всіма властивостями многочленів з тією різницею, що для багатьох рядів ці властивості виконуються не для всіх значень аргументу, а лише для деякої обмеженої їх множини.

Серед величезної кількості наявної літератури є чимало вдалих з точки зору викладача видань. Проте переважна більшість підручників має суто теоретичну спрямованість і досить складна для не дуже підготовленого читача, а посібники здебільшого являють собою довідники або так звані “розв’язники”, що увійшли до моди останнім часом і орієнтовані в основному не на розвиток мислення, а лише на “натаскування” читача на розв’язування типових прикладів. Компактних і в той же час достатньо інформативних посібників, які б, з одного боку, містили достатній обсяг теоретичних відомостей, а з другого – давали досить повне уявлення про основні прийоми і способи розв’язання різноманітних, а не тільки типових задач, на жаль, дуже мало. Необхідність таких видань останнім часом зростає у зв’язку з постійним скороченням обсягу годин, що відводяться для аудиторних занять у технічних вишах, коли важливою складовою навчання студентів стає їх самостійна робота. Тому автори намагалися створити посібник, який був би адаптований саме до умов навчання студентів технічних спеціальностей. Значна увага приділена практичній складовій, викладення теоретичних положень чергується з розв’язанням численних прикладів, що їх ілюструють. З метою кращого засвоєння матеріалу пропонуються задачі для самостійного розв’язання. Відповіді та список рекомендованої літератури наведені в кінці посібника.

Хоча даний посібник і призначений насамперед для студентів, автори сподіваються, що він буде корисним також викладачам і усім, хто цікавиться цим досить складним розділом аналізу і бажає удосконалити свою математичну підготовку.

1. ДЕЯКІ ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Послідовність дійсних чисел. Границя послідовності

Послідовністю дійсних чисел називається однозначне відображення $\varphi(n) = x_n$ множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел у множину $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Це звичайно записують у вигляді $\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, де числа $x_1, x_2, \ldots$ називаються ***членами*** послідовності, а вираз $x_n = \varphi(n)$ називається ***загальним членом*** послідовності.

Дійсне число a називається ***границею послідовності*** $\{x_n\}$, якщо $\forall \varepsilon > 0$, як завгодно малого, знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, починаючи з якого (тобто при $n \geq N$) усі члени x_n даної послідовності задовольняють нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$.

Послідовність $\{x_n\}$, яка має *скінченну* границю, називається ***збіжною до числа*** a. Символічно це записується у вигляді $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Геометричний зміст збіжної послідовності полягає в тому, що у *будь-якому як завгодно малому проколеному* ε*-околі* точки $x = a$, тобто у інтервалі $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ радіуса ε з видаленим центром a, починаючи з відповідного номера, містяться *усі* члени послідовності, за виключенням хіба що скінченного їх числа.

Послідовність $\{x_n\}$ називається ***збіжною до нескінченності***, якщо для будь-якого, *як завгодно великого* числа $M > 0$ знайдеться такий номер $N = N(M)$, починаючи з якого (тобто при $n \geq N$) усі члени x_n даної послідовності задовольняють нерівності $|x_n| > M$. Символічно це записується у вигляді $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ і з “геометричної” точки зору означає, що *усі* члени послідовності, починаючи з відповідного номера, знаходяться *поза* будь-якого *як завгодно великого інтервалу* з центром у початку координат, за виключенням хіба що скінченного їх числа.

Послідовність, границя якої не є скінченною (*нескінченна* або *взагалі не існує*), називається ***розбіжною***. Прикладом можуть служити послідовності $\{x_n\} = \{e^n\} = e, e^2, e^3, \ldots$, $\{x_n\} = \{(-1)^n + 1\} = 0, 2, 0, 2, \ldots$ або $\{x_n\} = \{\sin n\} = \sin 1, \sin 2, \sin 3, \ldots$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається ***обмеженою***, якщо існує таке дійсне число $M > 0$, що для *усіх* членів послідовності виконується нерівність $|x_n| \le M$. Це означає, що усі члени послідовності розташовані в замкненому крузі радіуса M з центром у початку координат.

Очевидно, що *якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається, то вона обмежена*. Доведено також, що *зі всякої обмеженої послідовності можна вилучити збіжну підпослідовність* ***(теорема Вейєрштрасса)***.

Збіжність послідовності може бути встановлена за наступною теоремою, яку називають ***принципом збіжності Больцано-Коші*** або ***критерієм Коші***.

Теорема 1.1. Для того, щоб послідовність $\{x_n\}$ мала *скінченну границю*, необхідно і достатньо, щоб для кожного числа $\varepsilon > 0$, як завгодно малого, існував такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для усіх $n > N$ й $m > N$ виконувалася нерівність $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

За суттю це означає, що члени послідовності зі зростанням їх номерів необмежено зближуються між собою.

<u>Приклад 1.1.</u> Знайти границю послідовності $x_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n+4}$.

Розв'язання. Обчислимо границю $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n+4} = \{1^\infty\}$ за формулою $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)^{g(n)} = \{1^\infty\} = e^a$, де $a = \lim\limits_{n\to\infty} g(n)\cdot[f(n)-1]$. В даному випадку $f(n) = \dfrac{2n+1}{2n-3}$, $g(n) = 3n+4$, отже, $a = \lim\limits_{n\to\infty}(3n+4)\cdot\left(\dfrac{2n+1}{2n-3} - 1\right) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}(3n+4)\cdot\dfrac{4}{2n-3} = 6$ і остаточно маємо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e^6$.

1.2. Факторіали

Факторіалом числа n (позначається $n!$) називається добуток усіх натуральних чисел від $\mathbf{1}$ до n включно:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (1.1)$$

За означенням вважають $\mathbf{0!=1}$. Таким чином, факторіал, *визначений тільки для цілих невід'ємних чисел,* є *рекурсивною* функцією, тобто такою, що задається *рекурентною формулою*

$$\boldsymbol{n!=\begin{cases}1, & n=0,\\ n\cdot(n-1)!, & n>0.\end{cases}} \qquad \mathbf{(1.2)}$$

Зауваження.

1. Слід чітко розрізняти $\boldsymbol{mn!}$ й $\boldsymbol{(mn)!}$ ($\forall \boldsymbol{m}\in\mathbb{N}$), оскільки

$$\boldsymbol{mn!=m\cdot(\underbrace{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}_{n\ \text{множників}})=m\cdot\prod_{k=1}^{n}k},$$

в той час як

$$\boldsymbol{(mn)!=\underbrace{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(mn-1)\cdot mn}_{m\cdot n\ \text{множників}}=\prod_{k=1}^{mn}k}.$$

2. Факторіал може мати й більш загальний вигляд, а саме,

$$\boldsymbol{[f(n)]!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot[f(n)-2]\cdot[f(n)-1]\cdot f(n)=\prod_{k=1}^{f(n)}k}, \qquad \mathbf{(1.3)}$$

де функція $\boldsymbol{f(n)}$ *приймає тільки цілі невід'ємні значення*. Тоді

$$\boldsymbol{[f(n+1)]!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot[f(n+1)-2]\cdot[f(n+1)-1]\cdot[f(n+1)]=\prod_{k=1}^{f(n+1)}k}.$$

Наприклад, нехай $\boldsymbol{f(n)=4n-3}$, отже,

$$\boldsymbol{[f(n)]!=(4n-3)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(4n-5)\cdot(4n-4)\cdot(4n-3)=\prod_{k=1}^{4n-3}k},$$

$$\boldsymbol{[f(n+1)]!=[4(n+1)-3]!=(4n+1)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(4n-5)\cdot(4n-4)\cdot}$$

$$\boldsymbol{\cdot(4n-3)\cdot(4n-2)\cdot(4n-1)\cdot4n\cdot(4n+1)=\prod_{k=1}^{4n+1}k}.$$

Зазначимо також, що $\boldsymbol{[f(n+1)]!}$ й $\boldsymbol{[f(n)+1]!}$ *– це зовсім різні речі*!

3. Узагальнені факторіали $\boldsymbol{[f(n)]!}$ слід відрізняти від *добутків* вигляду

$$\boldsymbol{f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(n-1)\cdot f(n)=\prod_{k=1}^{n}f(k)},$$

де функція $\boldsymbol{f(n)}$ приймає тільки *цілі невід'ємні* значення. Сусідні множники в таких добутках можуть відрізнятися один від іншого більш ніж на **1**, наприклад,

$$\prod_{k=1}^{n}(4k-3)=1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4k-7)\cdot (4k-3).$$

Факторіал є дуже швидко зростаючою функцією: він зростає швидше за многочлен будь-якого степеня, логарифмічну або показникову (зокрема, експоненціальну) функції. Мають місце співвідношення:

$$\ln n < n \le P_m(n) \le e^n \le n! \le n^n \le (n!)^2, \tag{1.4}$$

де $P_m(n)=\alpha_0 n^m+\alpha_1 n^{m-1}+\alpha_2 n^{m-2}+\ldots+\alpha_{m-1}n+\alpha_m$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $m, P_m(n)\in \mathbb{N}$. Наведені нерівності досить часто використовують у наближених оцінках, а також при обчисленні границь.

Для обчислення факторіалів великих чисел ($n > 69$) застосовують наближену ***формулу Муавра-Стірлінга***

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \tag{1.5}$$

або

$$\ln n! \approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi), \tag{1.6}$$

яка тим точніша, чим більше n. При цьому можна стверджувати, що

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\cdot e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\cdot e^{\frac{1}{12n}}.$$

Також має місце оцінка

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Автором формули (1.5) вважається *Абрахам де Муавр (1667-1754)*, у роботі якого “Miscellanea Analytica” (1730 р.) вперше з’явилася ця формула. Однак в силу багатьох причин вона відома саме як *формула Стірлінга*, хоча *Джеймс Стірлінг (1692-1770)* лише показав, що арифметична константа у формулі Муавра дорівнює $\sqrt{2\pi n}$. Формула Стірлінга часто використовується у наближених обчисленнях. За її допомогою неважко, наприклад, підрахувати, що $100! \approx 9.33\cdot 10^{157}$, $1000! \approx 4.02\cdot 10^{2567}$, $10\,000! \approx 2.85\cdot 10^{35\,659}$. Також цю формулу зручно застосовувати при обчисленні границь, коли треба “позбавитися” від факторіалів.

Окрім звичайного факторіала $\boldsymbol{n!}$ існують багато інших (подвійні, кратні, спадні, зростаючі факторіали, прайморіали, суперфакторіали та ін.). Розглянемо *подвійні факторіали*, які досить часто зустрічаються у обчисленнях.

Подвійним факторіалом числа n (позначається $\boldsymbol{n!!}$) називають добуток усіх натуральних чисел від $\mathbf{1}$ до $\boldsymbol{n}$, які мають *ту ж саму парність, що й* $\boldsymbol{n}$. Наприклад, $\mathbf{11!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11=10\,395}$, $\mathbf{12!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12=46\,080}$. За означенням також вважають $\mathbf{0!!=1}$.

Натуральне число може були лише або парним або непарним, отже,

$$(2k-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2k-3)\cdot (2k-1)=\prod_{i=1}^{k}(2i-1), \tag{1.7}$$

$$(2k)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots\cdot (2k-2)\cdot 2k=\prod_{i=1}^{k}2i=2^k\cdot k!. \tag{1.8}$$

Тоді

$$(2k-1)!!(2k)!!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots\cdot (2k-3)\cdot (2k-2)\cdot (2k-1)\cdot 2k=(2k)!,$$

звідки, з урахуванням (1.8), випливає відоме співвідношення

$$(2k-1)!!=\frac{(2k)!}{2^k\cdot k!}, \tag{1.9}$$

яке зв’язує подвійні і звичайні факторіали.

Як приклад застосування подвійного факторіала наведемо відому ***формулу Валліса***, за якою число $\boldsymbol{\pi}$ обчислюється як границя

$$\pi=2\lim_{k\to\infty}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2k+1}.$$

1.3. Числові ряди

Нехай задано послідовність $\{u_n\}$ дійсних чисел u_n, $n\in\mathbb{N}$.

Числовим рядом називається вираз вигляду

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n. \tag{1.10}$$

Числа $u_1, u_2, \ldots$ називаються ***членами ряду***, причому формула $u_n = f(n)$, за якою можна знайти будь-який член ряду, називається ***загальним членом*** ряду (1.1). Наприклад, загальним членом ряду $\frac{8}{3}+\left(\frac{11}{7}\right)^2+\left(\frac{14}{11}\right)^3+\ldots$ є $u_n=\left(\frac{3n+5}{4n-1}\right)^n$.

Сума S_n перших n членів ряду називається ***n-ю частинною (частковою) сумою*** ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k . \qquad (1.11)$$

Частинні суми ряду (1.10) утворюють числову послідовність $\{S_n\}$. Якщо вона збігається, тобто існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad (1.12)$$

то відповідний ряд називається ***збіжним***, а число S називається ***сумою*** ряду. Тому запис (1.12) еквівалентний запису $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Якщо послідовність $\{S_n\}$ розбігається, тобто границя $\lim_{n\to\infty} S_n$ не є скінченною (*нескінченна* або *взагалі не існує*), то відповідний ряд називається ***розбіжним***.

Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, отриманий з ряду (1.10) відкиданням перших n членів, називається ***n-м залишком*** ряду (1.10). Якщо він збігається, то позначимо його суму r_n, тобто $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. Тоді, оскільки $S = S_n + r_n$, то $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = $ $= S - S = 0$. Це означає, що *n-й залишок збіжного ряду прямує до* 0 *при* $n \to \infty$.

Зауважимо, що для переважної більшості рядів безпосередній аналіз послідовності $\{S_n\}$ не представляється можливим, тому основними задачами в теорії числових рядів є встановлення збіжності або розбіжності даного ряду без обчислення величини його суми та оцінка залежності залишку ряду r_n від номеру n (*швидкість збіжності* ряду).

Завдяки рівності $S = S_n + r_n$ оцінка r_n дає оцінку похибки при заміні суми ряду $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ частинною сумою S_n.

Перефразовуючи критерій Коші збіжності послідовності, отримуємо

Теорема 1.2 ***(критерій Коші збіжності числового ряду)***. Ряд (1.10) збігається тоді і тільки тоді, коли $\forall \varepsilon > 0$, як завгодно малого, знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для усіх $n \geq N(\varepsilon)$ й $p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \varepsilon$.

З критерію Коші безпосередньо випливає

Теорема 1.3 ***(необхідна ознака збіжності)***. Якщо ряд (1.10) збігається, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Обернене твердження у загальному випадку невірне: якщо $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то це не означає, що ряд збігається. Він може і розбігатися. Якщо ж $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд *розбігається* (***достатня умова розбіжності***).

З ***властивостей*** *збіжних числових* рядів (які також доводяться на підставі критерію Коші) відзначимо наступні.

1. Зміна, додавання або відкидання *скінченного* числа членів не змінює збіжності ряду, але змінює його суму.

Звідси випливає, що *якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збігається, то також збігається і будь-який його залишок* $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. Обернене твердження також вірне.

2. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ й $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються і їх суми дорівнюють відповідно S_u і S_v, то для будь-яких сталих чисел λ і μ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$ також збігається і його сума дорівнює $\lambda S_u + \mu S_v$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\mu\lambda\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\lambda S_u+\mu S_v .$$

3. Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ подані у вигляді суми $u_n=v_n+w_n+...+z_n$. Тоді

а) якщо усі ряди $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$, ..., $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ одночасно збігаються, то й ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ також *збігається*;

б) якщо серед рядів $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$, ..., $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ *лише один* розбігається, а усі інші збігаються, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *розбігається*;

в) якщо серед рядів $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$, ..., $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ розбігається більш ніж один, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ може як збігатися, так і розбігатися.

4. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, то будь-яке групування його членів в порядку їх слідування не впливає ані на збіжність ряду, ані на його суму.

Важливе значення має не тільки встановлення самого факту розбіжності або збіжності ряду, а й виявлення, якщо ряд збігається, ***характеру*** цієї збіжності.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|, \qquad \textbf{(1.13)}$$

складений з *модулів* його членів.

Теорема 1.4. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ поготів збігається.

Інакше кажучи, *якщо ряд збігається абсолютно, то він збігається і у звичайному змісті.* Обернене твердження у загальному випадку невірне, тобто зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ ніяк не випливає.

Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбігається, то в цьому випадку говорять, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збігається* ***неабсолютно*** або ***умовно***.

Відзначимо деякі ***властивості*** *абсолютно і умовно збіжних* рядів.

1. Будь-яке переставлення членів *абсолютно збіжного* ряду не змінює ані характер збіжності ряду, ані величину його суми. Збіжні ряди, суми яких не залежать від послідовності членів, іноді називають ***безумовно збіжними***.

2. Якщо ряд збігається *умовно*, то завжди можна так переставити члени цього ряду, що перетворений ряд буде або збігатися, причому до будь-якого наперед заданого числа, або розбігатися (***теорема Рімана***).

3. Якщо кожен з рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ й $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається абсолютно відповідно до U і V, то добуток цих рядів $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right)$ збігається також абсолютно до $U \cdot V$ (***теорема Коші***). В цьому випадку справедлива ***формула множення рядів у формі Коші***:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k+1}\right). \qquad \textbf{(1.14)}$$

Зауваження. Доведено також, що формула Коші залишається справедливою і тоді, коли один з рядів збігається абсолютно, а інший умовно. В цьому випадку ряд-добуток збігається (хоча, можливо, і неабсолютно), а його сума дорівнює добутку сум рядів-множників (***теорема Мертенса***).

Дослідження абсолютної збіжності ряду (з якої випливає його збіжність) грунтується на *ознаках* (достатніх умовах) збіжності так званих ***знакододатних*** рядів, тобто рядів, усі члени яких *невід'ємні*. Будемо позначати такі ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (1.15)$$

де $a_n \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що послідовність $\{S_n\}$ частинних сум знакододатного ряду *не спадає*, отже, для неї збіжність і обмеженість є еквівалентними поняттями.

Розглянемо наступні ***ознаки***.

Теорема 1.5 ***(ознака порівняння)***. Нехай дано два ряди: **(A)** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ й **(B)** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \ge 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Якщо $a_n \ge b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то

а) зі збіжності ряду **A** випливає збіжність ряду **B**;

б) з розбіжності ряду **B** випливає розбіжність ряду **A**.

Зауваження.

1. Ознаку порівняння не можна застосовувати в зворотному порядку, тобто зі збіжності ряду **B** зовсім не випливає збіжність ряду **A**, а з розбіжності ряду **A** ніяк не випливає розбіжність ряду **B**.
2. При практичному застосуванні даної ознаки заданий ряд порівнюється з рядом, про який заздалегідь відомо, збігається він або розбігається (так званий ***ряд-еталон***). Найчастіше з цією метою обираються:

   – ***ряд геометричної прогресії*** $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, який *збігається* при $0 \le q < 1$ і *розбігається* при $q \ge 1$;

   – ***узагальнений гармонічний ряд*** або ***ряд Діріхле*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, який *збігається* при $\alpha > 1$ і *розбігається* при $\alpha \le 1$ (при $\alpha = 1$ маємо ***звичайний гармонічний ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який *розбігається*);

   – ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$, який *збігається* при $p > 1$ і *розбігається* при $p \le 1$;

– ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{e^{an}}$, який *збігається* при $a>0$, $k\in\mathbb{R}$ і розбігається при $a<0$, $k\in\mathbb{R}$.

3. Якщо ряд для порівняння обраний невдало, то ознака виявляється незастосовною.

Приклад 1.2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}<\frac{1}{\sqrt{n\cdot n\cdot n}}=\frac{1}{n^{3/2}}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ збігається як ряд Діріхле при $\alpha=\frac{3}{2}>1$, то за ознакою порівняння заданий ряд також збігається.

Основна трудність при застосуванні цієї ознаки полягає в складанні коректної нерівності, яка б відповідала одному з пунктів ознаки. Тому область застосування ознаки порівняння у звичайному вигляді доволі вузька. Набагато ефективнішою на практиці виявляється "граничний" вигляд цієї ознаки.

Зауваження. Тут і надалі, якщо це не обумовлюється спеціально, під словами "існує границя" будемо розуміти *скінченну або нескінченну* границю.

Теорема 1.6 ***("гранична" ознака порівняння)***. Нехай дано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n\ge 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ й $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, $b_n\ge 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$, причому про ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ заздалегідь відомо, збігається він чи розбігається. Тоді, якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=p,$$

то

а) при $0\le p<\infty$ зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$;

б) при $0<p\le\infty$ з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Наслідок. При $p\ne 0$ або ∞ (*скінченна але відмінна від нуля границя*) обидва ряди одночасно збігаються або розбігаються.

Зауваження.

1. На відміну від попередньої ознаки, де співвідношення між членами обох рядів від початку чітко визначено ($a_n \geq b_n$), але при цьому не оговорюється, який саме з рядів заданий, тут одразу відомо, що заданим є саме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ обраний для порівняння. Співвідношення ж між членами обох рядів встановлюється за допомогою границі $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.
2. Як і попередня, дана ознака буде незастосовною, якщо ряд для порівняння $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ обраний невдало.

<u>Приклад 1.3.</u> Дослідити на збіжність ряди

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}; \qquad \text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}; \qquad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Розв'язання.

а) Для порівняння оберемо звичайний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який, як відомо, розбігається. Тоді за граничною ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln n} \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} = \infty.$$

Отже, на підставі п. б) цієї ознаки, заданий ряд *розбігається.*

б) Для порівняння оберемо один з наведених вище еталонних рядів, саме, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$, який *збігається*, оскільки $p = 2 > 1$. Тоді за граничною ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}}{\frac{1}{n\ln^2 n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$. Оскільки границя нескінченна, то п. б) ознаки не виконується. Це означає, що ряд для порівняння обраний невдало.

Порівняння ж з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ показує, що даний ряд *розбігається* (виконайте самостійно).

в) Спроби порівняння даного ряду з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ або збіжним рядом Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ виявляються невдалими (перевірте!). Тому для порівняння оберемо (збіжний) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta}}$, де $1<\beta<2$. Візьмемо, наприклад, $\beta=3/2$. Тоді за ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Отже, згідно п. а) ознаки заданий ряд *збігається*.

При дослідженні рядів дуже корисною може виявитися ***таблиця еквівалентних нескінченно малих***:

якщо $\alpha(n)\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\sin\alpha(n)\sim\alpha(n),$$

$$\arcsin\alpha(n)\sim\alpha(n),$$

$$tg\,\alpha(n)\sim\alpha(n),$$

$$arctg\,\alpha(n)\sim\alpha(n),$$

$$\ln[1+\alpha(n)]\sim\alpha(n),$$

$$b^{\alpha(n)}-1\sim\ln b\cdot\alpha(n),$$

$$e^{\alpha(n)}-1\sim\alpha(n).$$

<u>Приклад 1.4.</u> Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n^2}\,arctg\frac{1}{n^2}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{n^2}\to 0$ при $n\to\infty$, то на підставі наведеної таблиці, $arctg\frac{1}{n^2}\sim\frac{1}{n^2}$. Тоді $\sqrt[3]{n^2}\,arctg\frac{1}{n^2}\sim\sqrt[3]{n^2}\,\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^{4/3}}$. Це означає, що якщо за ряд для порівняння обрати *збіжний* ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ $(\alpha=\frac{4}{3}>1)$, то за граничною ознакою порівняння отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\,arctg\,\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{4/3}}}=1$.

Тоді за наслідком з цієї ознаки заданий ряд *збігається*.

З ознак порівняння із застосуванням ряду геометричної прогресії можна отримати наступну ознаку.

Теорема 1.7 ***(ознака Д'Аламбера)***. Нехай дано знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$, то при $p<1$ цей ряд *збігається*, а при $p>1$ він *розбігається, причому* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$.

Зауваження.

1. При $p=1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим і ознака Д'Аламбера вважається незастосовною.
2. Якщо розбіжність ряду встановлена за ознакою Д'Аламбера, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, тобто необхідна умова збіжності ряду не виконується.

Приклад 1.5. Дослідити на збіжність ряди

$$\text{а) }\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)};\qquad \text{б) }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}.$$

Розв'язання.

а) Оскільки $a_n=\frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$, то

$$a_{n+1}=\frac{[2(n+1)+1]!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot[(3(n+1)+1]}=\frac{(2n+3)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+4)}=\frac{(2n+1)!!(2n+3)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}$$

і тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+4}=\frac{2}{3}<1$. Отже, за ознакою Д'Аламбера заданий ряд *збігається*.

б) Оскільки $a_n = \frac{n!3^n}{n^n}$, то $a_{n+1} = \frac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!(n+1)3^n \cdot 3}{(n+1)^n (n+1)}$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3 \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{3}{e} > 1$. Таким чином, за ознакою Д'Аламбера заданий ряд *розбігається*.

Теорема 1.8 ***("радикальна" ознака Коші)***. Нехай дано знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$, то при $p < 1$ цей ряд *збігається*, а при $p > 1$ він *розбігається, причому* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Зауваження.

1. При $p = 1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим і "радикальна" ознака Коші вважається незастосовною.
2. Якщо розбіжність ряду встановлена за "радикальною" ознакою Коші, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, тобто необхідна умова збіжності ряду не виконується.
3. На практиці застосування ознаки Д'Аламбера часто простіше, ніж ознаки Коші, особливо коли члени ряду містять факторіали. В той же час область застосування ознаки Коші ширше області застосування ознаки Д'Аламбера, оскільки умови ознаки Коші не потребують порівняння один з одним сусідніх членів послідовності $\{a_n\}$.
4. Доведено, що для послідовності $\{a_n\}$ з додатними членами з існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ випливає існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ і рівність цих границь. Отже, якщо для знакододатного ряду виконується одна з умов ознаки Д'Аламбера, то обов'язково виконується і відповідна умова ознаки Коші. Обернене твердження у загальному випадку невірне. Тому говорять, що "радикальна" ознака Коші "сильніша" за ознаку Д'Аламбера.
5. "Сильнішими" за "радикальну" ознаку Коші є, зокрема, ***ознака Раабе*** (якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = r$, то при $r > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається*, а при $r < 1$ цей ряд *розбігається*) або ***ознака Бертрана*** (якщо

існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]=b$, то при $b>1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається*, а при $b<1$ цей ряд *розбігається*).

Приклад 1.6. Дослідити на збіжність ряди

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} arctg^n \frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}.$$

Розв'язання.

а) Оскільки $a_n=\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2}\left\{1^{\infty}\right\}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty} e^a$, де $a=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}-1\right)=-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+6}=-1$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=$

$=e^{-1}=\frac{1}{e}<1$ і за ознакою Коші заданий ряд *збігається*.

б) Оскільки $a_n=arctg^n\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty} arctg\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}=$

$=arctg\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}>1$. Отже, за ознакою Коші заданий ряд *розбігається*.

Приклад 1.7. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

Розв'язання. За ознакою Д'Аламбера маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{2n+3}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)}=1,$$

отже, ця ознака *незастосовна*. В той же час *за ознакою Раабе*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+6n}{4n^2+10n+6}=\frac{3}{2}>1.$$

Тому заданий ряд *збігається*.

Теорема 1.9 ***(інтегральна ознака Маклорена-Коші)***. Якщо функція $f(x)$ визначена, додатна, неперервна й монотонно спадна для усіх $x \geq N$ та така, що $f(n)=a_n$, $n=N, N+1, N+2, \ldots$, то ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ збігається або розбігається одночасно з невласним інтегралом $\int\limits_{N}^{+\infty} f(x)dx$.

Наслідок. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то залишок цього ряду $r_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ оцінюється з нерівності $\int\limits_{n}^{+\infty} f(x)dx \leq r_n \leq \int\limits_{n-1}^{+\infty} f(x)dx$.

Зауваження. У частинному випадку $N=1$, як це часто зустрічається на практиці.

<u>Приклад 1.8.</u> Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\ldots$.

Розв'язання. Загальний член ряду, як неважко бачити, $a_n=\frac{n}{(n+1)^3}$. За ознакою Д'Аламбера маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{(n+2)^3}}{\frac{n}{(n+1)^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{n(n+2)^3}=1$, отже, на підставі цієї ознаки ніякого висновку про збіжність ряду зробити не можна (ознака незастосовна). До того ж самого результату приводить спроба застосування радикальної ознаки Коші.

Будемо розглядати члени ряду як значення функції $f(x)=\frac{x}{(x+1)^3}$ при значеннях аргументу $x=1, 2, 3, \ldots$. Неважко перевірити, що при $x \geq 1$ функція $f(x)$ додатна, неперервна й монотонно спадна, тобто задовольняє умови інтегральної ознаки. Тому дослідимо на збіжність невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3}dx$. В даному випадку за означенням маємо:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3}dx = \lim_{B\to+\infty}\int_1^{B} \frac{x}{(x+1)^3}dx = \lim_{B\to+\infty}\int_1^{B}\left[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}\right]\Bigg|_1^B = \lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{1}{B+1}+\frac{1}{2(B+1)^2}\right]-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{8}.$$

Отже, інтеграл набуває скінченного значення, тобто збігається. Тому за інтегральною ознакою одночасно з ним збігається і заданий ряд.

Зауваження. Як бачимо з цього приклада, інтегральну ознаку слід вважати сильнішою за ознаки Д'Аламбера і радикальну Коші. Проте на практиці застосування інтегральної ознаки часто викликає труднощі, пов'язані з необхідністю дослідження на збіжність невласного інтеграла. Тому область застосування інтегральної ознаки більш вузька, ніж ознаки Д'Аламбера або радикальної ознаки Коші.

Якщо *довільний* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, який складається як з додатних, так і від'ємних членів (такий ряд звичайно називають ***знакозмінним***) *не збігається абсолютно* і цей результат отриманий на підставі ознаки Д'Аламбера або "радикальної" ознаки Коші, то у подальшому дослідженні немає необхідності, оскільки ряд *розбігається* (див. зауваження до згаданих ознак). Якщо ж вказаний результат встановлений на підставі ознак порівняння або інтегральної ознаки, то подальше дослідження з метою встановлення збіжності знакозмінного ряду (а, отже, і характеру цієї збіжності) або його розбіжності можна виконати за допомогою наступних ознак.

Ознака Абеля. Нехай дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Якщо послідовність $\{a_n\}$ монотонна і обмежена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ також *збігається*.

Ознака Діріхле. Нехай дано ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Якщо послідовність $\{S_n\}$ частинних сум $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ обмежена, а послідовність $\{a_n\}$ монотонно прямує до нуля, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *збігається*.

Дуже значну роль у наближених обчисленнях відіграють ***знакопочережні*** ряди, додатні і від'ємні члени яких строго чергуються. Ці ряди звичайно записують у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n , \qquad (1.15)$$

де $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Знакопочережні ряди є частинним випадком загальних знакозмінних рядів. Їх збіжність встановлюється на підставі наступної ознаки, яка є *наслідком* ознаки Діріхле.

Теорема 1.10 ***(ознака Лейбніца)***. Якщо послідовність додатних чисел $\{a_n\}$ монотонно прямує до нуля, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ збігається.

Це означає, що, хоча б і починаючи з деякого номера N, члени ряду задовольняють умовам: **а)** $a_{n+1} < a_n$ для $n \geq N$; **б)** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Збіжний знакопочережний ряд називають ***рядом Лейбніца***.

Зауваження. Ознака Лейбніца встановлює лише факт збіжності (або розбіжності) знакопочережного ряду. Якщо ряд *збігається*, то *характер* його збіжності встановлюється лише після *додаткового дослідження*: якщо відповідний знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то ряд Лейбніца *збігається абсолютно*, а якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, то ряд Лейбніца *збігається умовно*.

Наслідки.

1. Сума ряду Лейбніца не перевищує за модулем його першого члена, тобто $|S| < a_1$.

2. Залишок ряду Лейбніца $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ має знак свого першого члена $(-1)^n a_{n+1}$ й не перевищує його за модулем, тобто $\operatorname{sgn}(r_n) = (-1)^n$, $|r_n| < a_{n+1}$. ***Зауваження.*** Величина $|r_n|$ виражає значення *абсолютної похибки* при заміні суми S ряду Лейбніца сумою перших n його членів, тобто частинною сумою S_n. Інакше кажучи, $\Delta = |r_n| = |S - S_n| < a_{n+1}$.

Приклад 1.9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3 \cdot 6 \cdot ... \cdot (3n)}{(n+1)!} arctg \frac{1}{2^n}$.

Розв'язання. Дослідимо ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \cdot ... \cdot (3n)}{(n+1)!} arctg \frac{1}{2^n}$ (*). За ознакою Д'Аламбера маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3 \cdot 6 \cdot ... \cdot (3n) \cdot (3n+3)}{(n+2)!} arctg \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{3 \cdot 6 \cdot ... \cdot (3n)}{(n+1)!} arctg \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{3n+3}{n+2} = \frac{3}{2} > 1$$

(тут враховано, що $arctg \frac{1}{2^n} \sim \frac{1}{2^n}$ при $n \to \infty$). Отже, ряд (*) розбігається за ознакою Д'Аламбера. Тому заданий ряд *не збігається абсолютно*. Проте при цьому, на підставі зауваження 2 до ознаки Д'Аламбера можемо зробити висновок, що необхідна умова збіжності ряду (а з нею і умова **б)** ознаки Лейбніца) не виконується. Це означає, що заданий ряд *розбігається*.

Приклад 1.10. Дослідити на збіжність ряди

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}; \quad \text{б)} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln \ln n}.$$

Розв'язання.

а) Дослідимо ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}$ (*). Порівняємо цей ряд зі *збіжним рядом* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, застосувавши граничну ознаку порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}}{\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}=1.$$ Отже, за наслідком зі згаданої ознаки обидва ряди поводяться однаково, тобто ряд (*) збігається. А це означає, що заданий ряд *збігається абсолютно*.

б) Дослідимо ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\ln\ln n}$ **(*)**. Оскільки $\ln n < n$, а $\ln\ln n << n$, то $\frac{1}{\ln\ln n} >> \frac{1}{n}$. Тому за ознакою порівняння ряд (*) розбігається, отже, заданий ряд *не збігається абсолютно* (тут ми врахували, що гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається). Оскільки цей результат отриманий не за ознакою Д'Аламбера або радикальною ознакою Коші, то ми повинні також дослідити ряд на умовну збіжність.

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

а) нерівність $\frac{1}{\ln\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln\ln n}$ виконується $\forall n \geq 4$; б) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\ln n}=0$.

Обидві умови виконуються, отже, за ознакою Лейбніца заданий ряд збігається. А оскільки він не збігається абсолютно, то він *збігається умовно*.

2. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

2.1. Функціональні ряди

Нехай задана послідовність $\{f_n(x)\}$ ($n \in \mathbb{N}$) функцій дійсної змінної, визначених в деякій області D.

Функціональним рядом називається вираз вигляду

$$f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad \textbf{(2.1)}$$

де функції $f_k(x)$ ($k = 1, 2, ...$) називаються ***членами*** функціонального ряду, а вираз $f_n(x) = \varphi(n, x)$ називається ***загальним членом***.

Якщо зафіксувати значення $x = x_0$, то отримаємо *числовий* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, який може збігатися абсолютно чи умовно або розбігатися. Точка $x_0 \in D$ називається ***точкою збіжності (розбіжності)*** ряду (2.1), якщо відповідний числовий ряд збігається (розбігається). При цьому сам ряд (2.1) називається ***збіжним (розбіжним) в точці*** x_0. Сукупність $G \subset D$ усіх точок збіжності називається ***областю збіжності*** ряду (2.1). Збіжність ряду в кожній точці області G називається ***поточковою збіжністю***. Якщо множина G порожня, то ряд (2.1) розбігається в кожній точці області D. Очевидно, що ***областю розбіжності*** ряду (тобто сукупністю усіх точок розбіжності) є множина $D \setminus G$.

Частинні суми $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ ряду (2.1) утворюють функціональну послідовність $\{S_n(x)\}$. *Збіжність ряду (2.1) в області* G означає існування *скінченної* границі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, тобто $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}: \ \forall n > N$ $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Функція $S(x)$ називається ***сумою*** ряду (2.1) в області G. Кожній точці $x \in G$ відповідає певне значення суми $S(x)$ ряду (2.1), отже, *сума ряду є функція, що визначена в області збіжності цього ряду*. В усіх точках $x \notin G$ розбіжності ряду границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ *не є скінченною* (нескінченна або взагалі не існує). Якщо ряд (2.1) збігається в області G і має суму $S(x)$, то пишуть

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x). \qquad (2.2)$$

Зауваження. Відомо, що сума *скінченного* числа неперервних функцій є також функцією неперервною. Сума ж *нескінченної* кількості неперервних функцій (тобто, їх ряд) може виявитися і розривною функцією.

Різниця $r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ називається ***n-м залишком*** збіжного ряду (2.1) в точці x. Очевидно, що в кожній *точці збіжності*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \qquad (2.3)$$

Оскільки $r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$, то (2.3) є ***необхідною і достатньою умовою збіжності*** ряду (2.1) в точці x. Отже, для того, щоб функціональний ряд (2.1) збігався в деякій області, необхідно і достатньо, щоб в кожній точці цієї області виконувалася умова (2.3).

Поняття абсолютної і умовної збіжності, що були введені для числових рядів, мають місце і для функціональних рядів.

Функціональний ряд (2.1) називається ***абсолютно збіжним*** в точці x, якщо в цій точці збігається *числовий* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Множина E всіх точок, у яких ряд абсолютно збігається, називається ***областю*** його ***абсолютної збіжності***. Оскільки з абсолютної збіжності ряду в точці випливає його збіжність, то $E \subset G$.

Функціональний ряд (2.1) називається ***умовно збіжним*** в точці x, якщо він збігається в цій точці, в той час як числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ розбігається.

Зауважимо, що ознаками абсолютної збіжності функціональних рядів в точці є ознаки збіжності відповідних *знакододатних* числових рядів (ознаки Д'Аламбера, радикальний Коші та ін.).

Якщо в точці x ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ збігається, то в цій точці ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається абсолютно. Тому для визначення області абсолютної збіжності необхідно знайти сукупність всіх значень x, при яких відповідні числові ряди

$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ будуть збігатися. Звичайно для цього застосовують ознаку Д'Аламбера або радикальну ознаку Коші. В першому випадку ***інтервал абсолютної збіжності*** ряду (2.1) визначається з нерівності

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|<1, \tag{2.4}$$

а в другому – з нерівності

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}<1. \tag{2.5}$$

Поведінка ряду в межових точках інтервалу абсолютної збіжності, тобто в точках, де $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=1$ або $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=1$, повинна бути досліджена окремо. В цих точках ряд може розбігатися чи збігатися (абсолютно або умовно). Тоді точка включається до складу відповідної області (розбіжності, абсолютної чи умовної збіжності).

Зауваження. Очевидно, що в усіх точках, де $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|>1$ або $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}>1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ розбігається і в цих точках $\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|\neq 0$, а, отже, і $\lim_{n\to\infty} f_n(x)\neq 0$. Це означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ також *розбігається.*

Функціональний ряд (2.1) називається ***рівномірно збіжним*** в області U, якщо послідовність його частинних сум збігається в U *рівномірно*, тобто коли $\forall\varepsilon>0\quad \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n>N \wedge \forall x\in G \quad |S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$. Це означає, що нерівність виконується *одразу в усіх точках* області U, тобто наближення суми $S(x)$ частинними сумами $S_n(x)$ відбувається *рівномірно* в *усій* області. Цим рівномірна збіжність принципово відрізняється від поточкової збіжності: при поточковій збіжності при обраному значенні ε для *кожного* x існує *свій* номер $N(\varepsilon, x)$, в той час як при рівномірній збіжності номер $N(\varepsilon)$ є *загальним* для усіх x.

Якщо ряд збігається в області G, то це зовсім не означає, що він збігається рівномірно.

Теорема 2.1 ***(ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності)***. Якщо усі члени ряду (2.1) в будь-якій точці x області U задовольняють умові $|f_n(x)| \le a_n$ й ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то ряд (2.1) збігається в області U абсолютно і рівномірно.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***мажорантним рядом*** для ряду (2.1) або його ***мажорантою***.

Зауваження.

1. Мажоровність функціонального ряду в області U є достатньою умовою його *рівномірної* збіжності, але вона не є необхідною. Тому ознака Вейєрштрасса є лише *достатньою ознакою* рівномірної збіжності. *Необхідною і достатньою ознакою* є ***критерій Коші***: ряд (2.1) збігається рівномірно в області U тоді і лише тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що для усіх $n \ge N$ й $\forall m \in \mathbb{N}$ одночасно в усіх точках області виконується нерівність $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+m} f_k(x)\right| < \varepsilon$.
2. Мажоровність функціонального ряду в області U є достатньою умовою його *абсолютної* збіжності в цій області. Справді, з оцінки $|r_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \le \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$ випливає нерівність $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| < \varepsilon \quad \forall n \ge N(\varepsilon)$, $\forall x \in U$, тобто залишок ряду прямує до нуля при будь-якому $x \in U$, що й є умовою його абсолютної збіжності в області U.

Рівномірно збіжні ряди мають дуже важливі ***властивості***.

1. **Теорема 2.2** ***(про неперервність суми функціонального ряду).*** Якщо члени ряду (2.1) є *неперервними в області* U функціями й ряд збігається в U рівномірно, то його сума $S(x)$ також *неперервна* в U.
2. **Теорема 2.3** ***(про почленне інтегрування функціонального ряду).*** Якщо члени ряду (2.1) є неперервними в області U функціями й ряд збігається в

U рівномірно до функції $S(x)$, то його можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку $[a, b] \subset U$, який цілком лежить в області U, тобто

$$\int_a^b S(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx. \qquad \textbf{(2.6)}$$

3. **Теорема 2.4** ***(про почленне диференціювання функціонального ряду).*** Якщо члени ряду (2.1) неперервно диференційовні в області U й ряд збігається в U до функції $S(x)$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ збігається в U рівномірно й має суму $\sigma(x)$, то вихідний ряд збігається в U рівномірно, причому

$$S'(x) = \sigma(x). \qquad \textbf{(2.7)}$$

4. Якщо ряд (2.1) рівномірно збігається в області U до функції $S(x)$, а функція $g(x)$ обмежена в U, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g(x) f_n(x)$ рівномірно збігається в U до функції $g(x)S(x)$.

2.2. Поняття степеневого ряду

Частинним випадком функціональних рядів є так звані *степеневі* ряди. Вони відіграють важливу роль не тільки у теоретичних дослідженнях (наприклад, розв'язання диференціальних рівнянь), але й у наближених обчисленнях (за їх допомогою, наприклад, обчислюються значення функцій складної природи і визначених інтегралів).

Степеневим називається функціональний ряд, членами якого є *степеневі* функції *з цілим невід'ємним показником. Спрощений запис* такого ряду має вигляд

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \qquad \textbf{(2.8)}$$

де $x_0, a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – задані *дійсні числа*. Числа $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ називаються ***коефіцієнтами***, число a_0 – ***вільним членом***, а x_0 – ***центром*** степеневого ряду. Домовимося n-м членом ряду вважати член з коефіцієнтом a_n, незважаючи на те, що він стоїть на $(n+1)$-му місці. Тоді вільний член будемо вважати "нульовим" членом ряду.

Лінійна заміна $\xi = x - x_0$ перетворює степеневий ряд (2.8) з центром в точці x_0 на степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ з центром в нулі. Тому властивості степеневих рядів, які не змінюються при лінійному перенесенні, будемо формулювати саме для рядів вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \tag{2.9}$$

що зручніше для запису.

Зауваження. Деякі з коефіцієнтів ряду (2.8) можуть дорівнювати нулю. Розглянемо, наприклад, степеневий ряд (2.9), де

$$a_n = \begin{cases} 1 + n + \sqrt{n}, & \textit{якщо } \sqrt{n} \textit{ ціле}, \\ 0, & \textit{якщо } \sqrt{n} \textit{ не ціле}. \end{cases}$$

Початок ряду має вигляд:

$$1 + 3 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 7 \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^6 + 0 \cdot x^7 + 0 \cdot x^8 + 13 \cdot x^9 + \ldots .$$

Складемо новий ряд, враховуючи тільки члени з ненульовими коефіцієнтами. Його початок буде мати вигляд: $1 + 3 \cdot x + 7 \cdot x^4 + 13 \cdot x^9 + \ldots$. Перепозначивши коефіцієнти, отримаємо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n^2}$, коефіцієнти якого обчислюються за формулою $a_n = n^2 + n + 1$.

Отже, якщо в ряді $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, який складається зі членів як з нульовими, так і з ненульовими коефіцієнтами, залишити *тільки* члени з *ненульовими* коефіцієнтами та *перепозначити* їх, то отримаємо степеневий ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{\varphi(n)}, \tag{2.10}$$

де показник степеня $\varphi(n)$ *монотонно зростає* і приймає тільки *цілі невід'ємні значення*. На відміну від вихідного ряду, де показник степеня n приймає *усі без виключення* цілі значення від 0 до $+\infty$, тут показник степеня $\varphi(n)$ приймає лише *деякі* з цих значень.

В свою чергу, усякий ряд (2.10) може бути поданий у вигляді (2.8), якщо доповнити його членами з відсутніми степенями (й, відповідно, нульовими коефіцієнтами) та перепозначити коефіцієнти наново отриманого ряду.

Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^2 x^{2n} = x^2 + 9x^4 + 25x^6 + 49x^8 + \ldots$, як неважко бачити, приводиться до вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, де

$$a_n = \begin{cases} (n-1)^2, \; \textit{якщо } n = 2k, \\ 0, \; \textit{якщо } n = 2k-1, \; k = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Надалі будемо розглядати ряди, зокрема, вигляду (2.8) та (2.9), що мають виключно ненульові коефіцієнти.

2.3. Збіжність степеневого ряду. Теорема Абеля

Очевидно, усякий степеневий ряд збігається в точці $x = x_0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку. Детальніші відомості про характер збіжності степеневих рядів дає наступна теорема, сформульована і доведена у 1826 р. норвезьким математиком Нільсом Хенриком Абелем (1802-1829).

Теорема 2.5 ***(перша теорема Абеля)***. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається в деякій точці $x = x_1 \neq 0$, то він збігається абсолютно для усіх x, таких, що $|x| < |x_1|$.

Доведення. Оскільки ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ збігається за умовою теореми, то виконується необхідна умова збіжності, а саме, $\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. Отже, послідовність $\{a_n x_1^n\}$ збігається і тому є обмеженою, тобто $|a_n x_1^n| = |a_n| \cdot |x_1|^n \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Звідси маємо $|a_n| \leq \dfrac{M}{|x_1|^n}$.

Оберемо довільну точку $x \neq 0$, яка задовольняє умові $|x| < |x_1|$, тобто лежить всередині інтервалу $|x| < |x_1|$ (рис. 2.1). Розглянемо в цій точці ряд

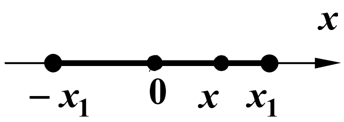

Рис. 2.1

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^{\,n}$. Тоді

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n\right| \cdot \left|x\right|^n \le \frac{M}{\left|x_1\right|^n} \cdot \left|x\right|^n .$$

Позначимо $q = \dfrac{|x|}{|x_1|}$. Очевидно, що $0 < q < 1$. Отже,

$$\left|a_n x^n\right| \le M q^n .$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ збігається як ряд спадної геометричної прогресії, то за ознакою порівняння (теорема 1.5) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$ збігається, отже, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається абсолютно на відрізку $|x| \le q|x_1|$. Оскільки число q може бути взяте *як завгодно близьким до* 1, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається абсолютно *в будь-якій точці* інтервалу $|x| < |x_1|$ і теорема Абеля доведена.

2.4. Наслідки першої теореми Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду

Наслідок 1. Якщо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбігається в точці $x = x_2$, то він розбігається для усіх x таких, що $|x| > |x_2|$.

Дійсно, припустимо, що ряд *збігається* в будь-якій точці x_3, такій, що $|x_3| > |x_2|$ (рис. 2.2). Тоді за теоремою Абеля він збігається всюди в інтервалі $|x| < |x_3|$, в тому числі і в точці x_2, що суперечить умові.

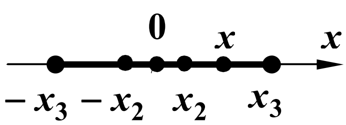

Рис. 2.2

Отже, якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається (абсолютно або умовно) в точці $x = x_1 \neq 0$, то за першою теоремою Абеля він збігається *абсолютно* всюди в інтервалі $|x| < |x_1|$ (рис. 2.1) Якщо ж ряд розбігається в деякій точці x_2, то він розбігається *всюди ззовні* відрізка $|x| \leq |x_2|$ (рис. 2.2).

Наслідок 2. З теореми Абеля випливає, що існує єдиний інтервал $|x| < R$, в кожній точці якого ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається, причому абсолютно. В кожній з точок зовнішності $|x| > R$ інтервалу ряд розбігається, а в точках межі $|x| = R$ він може як збігатися, так і розбігатися. Інтервал $|x| < R$ або $-R < x < R$ називається ***інтервалом збіжності***, а радіус цього інтервалу – число $R > 0$ – ***радіусом збіжності*** степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Отже, ***область збіжності*** *степеневого ряду складається з його інтервалу збіжності й тих межових точок, у яких ряд збігається хоча б навіть і умовно.* Якщо ряд збігається *на всій числовій осі*, то домовилися вважати $R = \infty$ (при цьому говорять, що *інтервал збіжності заповнює всю числову вісь*). Якщо ж ряд збігається тільки в точці $x = 0$, то домовилися вважати $R = 0$ (при цьому говорять, що *інтервал збіжності вироджується в точку*).

Зауваження.

1. З рівності $\left|a_n(-R)^n\right| = \left|a_n R^n\right|$ випливає, що абсолютна збіжність степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на одному з кінців інтервалу збіжності тягне абсолютну збіжність його на іншому кінці цього інтервалу. Отже, область збіжності степеневого ряду може бути півінтервалом тільки тоді, коли на відповідному кінці цей ряд збігається умовно. З цієї ж рівності бачимо, що якщо розбіжність ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на одному з кінців інтервалу збіжності випливає з того, що послідовність $\left\{a_n R^n\right\}$ *не є нескінченно малою*, то й на іншому кінці інтервалу збіжності цей ряд розбігається з тієї ж причини.

2. Для степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ інтервал збіжності є $|x - x_0| < R$ або $x_0 - R < x < x_0 + R$.

2.5. Основні властивості степеневих рядів

Безпосередньо з ознаки Вейєрштрасса, властивостей рівномірно збіжних рядів та першої теореми Абеля випливають наступні властивості степеневих рядів.

1. ***Рівномірна збіжність степеневого ряду (друга теорема Абеля)***. Степеневий ряд збігається не тільки абсолютно, але й *рівномірно* на будь-якому відрізку $[\alpha, \beta]$, що цілком лежить всередині інтервалу збіжності, тобто $-R < \alpha < \beta < R$.

Наслідок (неперервність суми степеневого ряду). Сума степеневого ряду неперервна всередині інтервалу збіжності.

2. ***Арифметичні дії над степеневими рядами.*** Степеневі ряди $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ й $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, що збігаються відповідно в інтервалах $|x| < R_1$ й $|x| < R_2$, завжди мають деякий спільний інтервал збіжності $|x| < r$, $r = \min\{R_1, R_2\}$, всередині якого можна побудувати збіжні ряди $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$ й $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$, причому

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n \quad (\lambda, \mu = const), \tag{2.11}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n. \tag{2.12}$$

3. ***Диференціювання степеневого ряду.*** Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ всередині інтервалу його збіжності можна почленно диференціювати довільне число раз, тобто $\forall x \in (-R, R)$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \quad (k = 1, 2, ...). \tag{2.13}$$

4. ***Інтегрування степеневого ряду.*** Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку $[0, x] \subset (-R, R)$, що цілком лежить всередині інтервалу збіжності, тобто $\forall x \in (-R, R)$

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \int_0^x t^n dt \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{2.14}$$

Зауваження. Усі ряди, отримані в результаті почленного диференціювання або інтегрування мають *той самий* інтервал збіжності, що й вихідний ряд. Однак ряди, отримані в результаті почленного диференціювання, збігаються повільніше, ніж вихідний ряд. Крім того, збіжність або розбіжність ряду в *межових* точках інтервалу $x = \pm R$ при вказаних операціях може й *не зберігатися*.

Можливість складання і множення степеневих рядів, а також їх почленного диференціювання і інтегрування всередині інтервалу збіжності, відносна простота степеневої функції роблять степеневі ряди дуже зручними як в теоретичних, так і в практичних дослідженнях.

2.6. Обчислення інтервалу та радіуса збіжності

Наступна теорема, вперше доведена О.Коші у 1821 р., не тільки знов встановлює існування радіуса збіжності степеневого ряду, але й визначає його величину через коефіцієнти ряду.

Теорема 2.6 ***(теорема Коші-Адамара).*** Нехай дано степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тоді

1) якщо числова послідовність $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ є необмеженою, то ряд розбігається при усіх $x \neq 0$ ($R = 0$);

2) якщо послідовність $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ обмежена й $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = l \neq 0$, то $R = \dfrac{1}{l}$;

3) якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то ряд збігається при усіх $x \in \mathbb{R}$ ($R = \infty$).

Формула

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2.15}$$

де $\overline{\lim}$ означає *верхню границю*, називається ***формулою Коші-Адамара***.

На практиці ж у загальному випадку інтервал збіжності визначається з нерівності (2.4) або з нерівності (2.5), які для степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ мають відповідно вигляд

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| < 1, \tag{2.16}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1. \tag{2.17}$$

Якщо серед коефіцієнтів ряду *немає нульових*, то з цих нерівностей, за умови існування відповідних границь, випливають формули обчислення радіуса збіжності

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{2.18}$$

або

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{2.19}$$

Зауваження.

1. Якщо $R = \infty$, то це означає, що ряд збігається при усіх $x \in \mathbb{R}$.

2. Якщо $R = 0$, то це означає, що ряд збігається тільки в точці $x = 0$.

3. Якщо серед коефіцієнтів ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *є нульові*, то границі $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ й $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ не існують і тому формули (2.18) та (2.19) *незастосовні!* Відповідний ряд *зі всіма ненульовими* коефіцієнтами має вигляд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\varphi(n)}$, де показник степеня $\varphi(n)$ приймає *не усі без виключення* цілі значення від 0 до $+\infty$, а лише *деякі* з них. В цьому випадку *інтервал* збіжності визначається або безпосередньо за ознакою Д'Аламбера, тобто з нерівності

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}}\right| < 1, \qquad (2.20)$$

або безпосередньо за радикальною ознакою Коші, тобто з нерівності

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[\varphi(n)]{\left|a_n x^{\varphi(n)}\right|} < 1. \qquad (2.21)$$

Тоді замість формул (2.18) та (2.19) маємо

$$R = \lim_{n\to\infty}\sqrt[\alpha]{\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}, \quad \alpha = \varphi(n+1) - \varphi(n) \qquad (2.22)$$

або

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[\beta]{|a_n|}}, \quad \beta = \varphi(n). \qquad (2.23)$$

Вибір формули визначається виглядом коефіцієнтів конкретного ряду.

У частинному випадку лінійної функції $\varphi(n) = kn + m$, де $(k \geq 2) \in \mathbb{N}$, а m – *ціле невід'ємне* число (може дорівнювати 0), формула (2.22) набуває вигляду

$$R = \lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}, \qquad (2.24)$$

а формула (2.23) залишається незмінною.

Приклад 2.1. Знайти радіуси та інтервали збіжності степеневих рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n (x+2)^n}{(2n+1)(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^3}(x-1)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n)!}{(3n)!}x^n$.

Розв'язання.

а) Оскільки $|a_n| = \left|\frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)(n+2)}\right| = \frac{3^n}{(2n+1)(n+2)}$, то за формулою (2.18) $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(2n+1)(n+2)}{(2n+3)(n+3)3^n} = 3$, звідки $R = \frac{1}{3}$. Отже, інтервал збіжності даного ряду є $|x+2| < \frac{1}{3}$ або $-\frac{1}{3} < x+2 < \frac{1}{3}$, тобто $-\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}$.

б) Оскільки $|a_n| = \left|\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^3}\right| = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^3}$, то за формулою (2.19) $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2} = e^2$, звідки $R = \frac{1}{e^2}$. Отже, інтервал збіжності даного ряду є $|x-1| < \frac{1}{e^2}$ або $1-\frac{1}{e^2} < x < 1+\frac{1}{e^2}$.

в) Оскільки $|a_n| = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$, то з формули (2.18)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}}{\dfrac{(n+1)![2(n+1)]!}{[3(n+1)]!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} = \frac{27}{4}.$$

Отже, інтервал збіжності даного ряду є $|x| < \frac{27}{4}$.

<u>Приклад 2.2.</u> Знайти радіуси та інтервали збіжності степеневих рядів:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+5)^n}{n^n}; \qquad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}(x-1)^n.$$

Розв'язання.

а) Оскільки $|a_n| = \frac{1}{n^n}$, то з формули (2.19) маємо $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

Це означає, що ряд абсолютно *збігається на усій числовій осі*, а на будь-якому відрізку він збігається рівномірно.

б) З формули (2.18) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n!}{3^n}}{\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}}}=3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)}=0$. Це означає, що ряд *збігається в єдиній точці* $x=1$ (інтервал збіжності вироджується в точку).

Приклад 2.3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}$.

Розв'язання. З формули (2.18) маємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}}{\dfrac{1}{3^{n+3}\sqrt{n+1}\ln(n+1)}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=3$$

(тут ми використали правило Лопіталя).

Отже, ряд збігається в інтервалі $|x|<3$. Дослідимо поведінку ряду в межових точках $x=\pm 3$ цього інтервалу.

В точці $x=-3$ маємо знакопочережний числовий ряд

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}=\dfrac{1}{9}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$. Дослідимо його на абсолютну збіжність, для чого розглянемо знакододатний ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}\right|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$. Порівняємо цей ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. За "граничною" ознакою порівняння (теорема 1.6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n}}=\infty$ (тут ми знов використали правило Лопіталя). Оскільки границя існує і нескінченна, то за пунктом б) згаданої ознаки в точці $x=-3$ ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ розбігається, отже, знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$ не збігається абсолютно. В той же час цей ряд збігається за ознакою Лейбніца, оскільки, як неважко перевірити, обидві умови ознаки виконуються. Тому ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$, а разом з ним і заданий степеневий ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}$, збігаються умовно.

В точці $x=3$ маємо знакододатний ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}=\frac{1}{9}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$, який, як вже з'ясовано, розбігається. Отже, в точці $x=3$ заданий степеневий ряд розбігається.

Таким чином, областю збіжності заданого степеневого ряду є півінтервал $[-3, 3)$, всередині якого ряд збігається абсолютно, на лівому кінці – умовно.

Приклад 2.4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\frac{(2n)!(x+3)^{2n+3}}{(n!)^2}.$$

Розв'язання. Тут показник степеня $\varphi(n)=2n+3$. *Радіус* збіжності визначимо з формули (2.24) при $k=2$:

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+2)(n+1)}{n(n+3)}\right]^n\frac{(n+1)^3}{(n+3)(2n+1)(2n+2)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Отже, ряд збігається в інтервалі $|x+3|<\frac{1}{2}$ або $-\frac{7}{2}<x<-\frac{5}{2}$.

Зауваження. Можна було б обчислити одразу *інтервал* збіжності, скориставшися однією з нерівностей (2.20) або (2.21). В даному випадку зручніше використати перший варіант, оскільки використання нерівності (2.21) значно ускладнене наявністю факторіалів у коефіцієнтах ряду. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}\frac{(2n+2)!(x+3)^{2n+5}}{[(n+1)!]^2}}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n}\frac{(2n)!(x+3)^{2n+3}}{(n!)^2}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{(n+3)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^3}\left|x+3\right|^2 = e\cdot\frac{1}{e}\cdot 4\cdot\left|x+3\right|^2 < 1.$$

Отже, отримуємо інтервал збіжності ряду $\left|x+3\right| < \frac{1}{2}$.

Приклад 2.5. Дослідити збіжність степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^{n^2}}{n^n}$.

Розв'язання. Тут показник степеня $\varphi(n) = n^2$. Інтервал збіжності визначимо, користуючись ознакою Д'Аламбера, тобто з нерівності $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}}\right| < 1$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!\,x^{(n+1)^2}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!\,x^{n^2}}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left|x\right|^{2n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(n+1)} = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left|x\right|^{2n+1} < 1,$$

звідки $\left|x\right| < \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{e} = 1$. Отже, ряд збігається в інтервалі $\left|x\right| < 1$. В межовій точці $x = -1$ маємо знакопочережний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(-1)^{n^2}}{n^n}$. Дослідимо його на абсолютну збіжність, для чого розглянемо знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n!(-1)^{n^2}}{n^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. Цей ряд збігається за ознакою Д'Аламбера, оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(n+1)} = \frac{1}{e} < 1.$$ Тому в точці $x = -1$

знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(-1)^{n^2}}{n^n}$, а разом з ним і заданий степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^{n^2}}{n^n}$, збігаються абсолютно.

В межовій точці $x=1$ висновок аналогічний. Отже, областю збіжності заданого ряда є відрізок $[-1,1]$, всередині і на кінцях якого заданий степеневий ряд збігається абсолютно.

Зазначимо, що якщо скористатися формулою (2.23), то будемо мати $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{n!}{n^n}}}$. Позбавимось від факторіала за *формулою Стірлінга* (1.5):

$$n!\to\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\ \text{ при }\ n\to\infty .$$

Тоді отримаємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{n^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}}{\sqrt[2n^2]{2\pi n}}=1 .$$

Отже, ряд збігається в інтервалі $|x|<1$, що співпадає з раніше отриманим.

Зауваження. Тут ми скористалися очевидним співвідношенням

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^\alpha]{n^\beta}=1\ \ (\alpha>0,\ \beta>0),$$

яке нескладно довести:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^\alpha]{n^\beta}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{\beta}{n^\alpha}}\left\{\infty^0\right\}=e^p,\ \text{де}\ p=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta\ln n}{n^\alpha}=\beta\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\alpha n^{\alpha-1}}=\frac{\beta}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0,$$

отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^\alpha]{n^\beta}=e^0=1$ (використано правило Лопіталя). Зокрема, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

3. РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЙ В СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Раніше було встановлено, що сума усякого збіжного степеневого ряду всередині інтервалу його збіжності є неперервною функцією. В цьому випадку говорять, що степеневий ряд в інтервалі збіжності визначає певну неперервну функцію – суму цього ряду. У зв'язку з цим виникає *задача*: за заданою функцією $f(x)$ знайти такий збіжний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, щоб його сума в області збіжності в точності співпадала з заданою функцією, тобто $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Таке подання називається ***розвиненням функції в степеневий ряд***. Розглядають також розвинення функцій в ряди інших типів, зокрема, тригонометричні (ряди Фур'є).

3.1. Формула Тейлора

Численні застосування диференціального числення в природознавстві і техніці грунтуються на так званих *теоремах про середнє*, найбільш загальною з яких є

Теорема 3.1 ***(теорема Тейлора).*** Функція $f(x)$, диференційовна $(n+1)$ разів на деякому проміжку, що містить точку x_0 всередині себе, може бути подана на цьому проміжку у вигляді

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \tag{3.1}$$

де $T_n(x)$ – *многочлен степеня* n

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \tag{3.2}$$

а $R_n(x)$ – *залишковий член*

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \, dt. \tag{3.3}$$

Формула (3.1) називається ***формулою Тейлора функції*** $f(x)$ ***в околі точки*** x_0 (або ***за степенями різниці*** $x-x_0$). Многочлен $T_n(x)$ називається відповідним ***многочленом Тейлора*** n***-го степеня***, а його коефіцієнти

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

називаються ***коефіцієнтами Тейлора функції*** $f(x)$ ***в точці*** x_0. Отже, залишковий член $R_n(x)$ являє собою похибку при наближеному поданні функції $f(x)$ її многочленом Тейлора $f(x) \approx T_n(x)$.

Крім наведеної форми залишкового члена, яка називається *інтегральною*, існує ще декілька різних його форм, зокрема,

– *форма Коші* $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)^{n+1}$, **(3.4)**

– *форма Лагранжа* $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, **(3.5)**

де $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$, тобто ξ *лежить між* x_0 *й* x (деяке *середнє значення*).

Серед наведених найбільш уживаною є саме *форма Лагранжа*. Отже, ***формула Тейлора функції*** $f(x)$ ***в околі точки*** x_0 ***з залишковим членом в формі Лагранжа*** має вигляд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + ...$$
$$... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad \textbf{(3.6)}$$

Зауваження. Якщо $f(x)$ є *многочленом степеня* n, то в формулі Тейлора (3.1) залишковий член $R_n(x) = 0$, отже, ***формула Тейлора для многочлена*** має вигляд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad \textbf{(3.7)}$$

Зауваження. У частинному випадку $x_0 = 0$ формула Тейлора називається ***формулою Маклорена функції*** $f(x)$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad \textbf{(3.8)}$$

де залишковий член $R_n(x)$ звичайно записують у *формі Лагранжа*

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},\ \xi=\theta x,\ \ 0<\theta<1. \qquad (3.9)$$

Відповідно ***формула Маклорена для многочлена*** має вигляд

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (3.10)$$

3.2. Ряди Тейлора і Маклорена

Якщо функція $f(x)$ має в деякому околі точки x_0 похідні *будь-якого порядку* (оскільки вони є всі, то кожна з них буде диференційовною, а, отже, й неперервною), то ми можемо *написати* (тобто формально скласти) формулу Тейлора для *будь-якого значення* n. Подамо її у вигляді

$$f(x)-T_n(x)=R_n(x),$$

де тепер многочлен Тейлора $T_n(x)$ фактично є n-ою частинною сумою *степеневого ряду*

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...$$

$$...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (3.11)$$

а залишковий член формули Тейлора $R_n(x)$ є *залишковим членом* цього *ряду*.

Степеневий ряд (3.11) називається ***рядом Тейлора функції*** $f(x)$ ***в околі точки*** x_0 (або ***за степенями різниці*** $x-x_0$). У частинному випадку $x_0=0$ цей ряд називається ***рядом Маклорена функції*** $f(x)$:

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (3.12)$$

Зауважимо, що *залишковий член* $R_n(x)$ ряду Тейлора функції $f(x)$, взагалі кажучи, зовсім не обов'язково співпадає з *залишком* $r_n(x)$ цього ряду. *Залишок* ряду Тейлора – це різниця між його *фактичною сумою* $S(x)$ і многочленом Тейлора, а *залишковий член* $R_n(x)$ – це різниця між породжуючою функцією $f(x)$ і многочленом Тейлора. Залишок ряду Тейлора співпадає з залишковим членом ряду Тейлора тільки у випадку, коли $S(x)=f(x)$. Тому *формально складений* ряд Тейлора може або розбігатися, або збігатися, причому зовсім не обов'язково до функції $f(x)$. Отже, насправді маємо *формальне співвідношення*

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{3.13}$$

З'ясуємо умови, за яких формально складений ряд Тейлора буде збігатися, причому саме до функції $f(x)$ (тобто вона буде сумою цього ряду).

Збіжність ряду Тейлора до функції $f(x)$ в точці x означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}T_n(x)=f(x)$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)-T_n(x)]=0$ або $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. Отже, необхідною і достатньою умовою збіжності формально складеного ряду Тейлора до породжуючої його функції, є прямування до нуля залишкового члена формули Тейлора при необмеженому зростанні n:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0. \tag{3.14}$$

Лише при виконанні цієї умови *формальне співвідношення* (3.13) може бути замінено *рівністю*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{3.15}$$

Подання функції деяким рядом називають ***розвиненням*** цієї ***функції в*** даний ***ряд***, отже рівність (3.15) називається ***розвиненням функції $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0*** (або ***за степенями різниці $x-x_0$***). Для того, щоб воно існувало, необхідно і достатньо, щоб функція $f(x)$ була диференційовна будь-яке число раз в деякому непроколеному околі точки x_0 і виконувалася умова (3.14) (вона також називається ***критерієм розвивності функції в степеневий ряд***). Якщо таке розвинення існує, то говорять, що функція $f(x)$ ***подається*** відповідним рядом Тейлора, а сама вона називається ***аналітичною в точці x_0***.

Наступна теорема є теоретичним обгрунтуванням способів розвинення функцій в степеневі ряди.

Теорема 3.2 ***(про єдиність розвинення функції в степеневий ряд).*** Якщо функція $f(x)$ в деякому околі точки x_0 є сумою степеневого ряду

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, тобто $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, то коефіцієнти цього ряду *однозначно* визначаються рівністю $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Отже, *якщо розвинення функції* $f(x)$ *в степеневий ряд в деякому околі точки* x_0 *взагалі можливе, то воно єдине і є розвиненням цієї функції саме у відповідний ряд Тейлора і в ніякий інший.* Інакше кажучи, *знайдене будь-яким способом розвинення функції у степеневий ряд, якщо воно існує, обов'язково є розвиненням цієї функції у відповідний ряд Тейлора.*

Теорема єдиності є теоретичним обгрунтуванням усіх існуючих прийомів і методів розвинення функцій в степеневі ряди. Деякі з них ми розглянемо далі.

3.3. Розвинення функцій в степеневі ряди

З вищенаведеного випливає, що для того, щоб розвинути функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0, необхідно:

1) скласти вирази похідних усіх порядків $f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ та обчислити їх значення $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ в точці x_0;

2) написати формально відповідний ряд Тейлора;

3) скласти вираз залишкового члена $R_n(x)$ формули Тейлора даної функції та знайти сукупність значень x, при яких виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, тобто знайти область, у якій написаний ряд Тейлора збігається саме до функції $f(x)$.

Описана послідовність дій називається ***способом безпосереднього розвинення*** функції в степеневий ряд.

Оскільки дослідження залишкового члена $R_n(x)$ в багатьох випадках є дуже складною задачею, то іноді замість цього користуються наступною ***ознакою розвивності*** функції в степеневий ряд.

Теорема 3.3. Якщо функція $f(x)$ та усі її похідні обмежені на інтервалі $(x_0 - R,\ x_0 + R)$, тобто існує така стала $M > 0$, що для усіх $x \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$ й усіх $n = 0, 1, 2, \ldots$ виконується нерівність $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$, то в кожній точці $x_0 \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$ функція $f(x)$ подається відповідним рядом Тейлора.

В тих же випадках, коли наведеною ознакою користуватися не можна, діють наступним чином: склавши формально ряд Тейлора, спочатку знаходять область його збіжності, а вже потім намагаються довести, що в цій області виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (ясно, що зовні області збіжності залишковий член можна не досліджувати, оскільки там ряд розбігається).

Однак на практиці найчастіше користуються наступним міркуванням: *переважна більшість функцій, що зустрічаються у практичних застосуваннях математичного аналізу, подається відповідним рядом Тейлора в усій області збіжності цього ряду*. Отже, *щоб розвинути функцію в ряд Тейлора в околі деякої точки, необхідно лише написати цей ряд та знайти його область збіжності як звичайного степеневого ряду.*

Зауваження. Можна також скористатися ***основним твердженням***: якщо функція *комплексної* змінної $f(z)$ аналітична в точці $z = a$, $a \in \mathbb{R}$ й $z_0 = x_0 + iy_0$ – найближча до a особлива точка функції $f(z)$, то функція *дійсної* змінної $f(x)$ може бути розвинена в степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, що збігається до $f(x)$ в інтервалі $|x - a| < R$, радіус R якого дорівнює відстані між точками a й z_0.

Це твердження особливо корисне тоді, коли відоме лише *скінченне* число перших членів розвинення, а загальна формула $f^{(n)}(x_0)$ невідома.

<u>Приклад 3.1.</u> Знайти п’ять перших, відмінних від нуля, членів розвинення в ряд Маклорена функції $f(x) = e^x \cos x$ та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв’язання. Фактично задача зводиться до відшукання п’яти перших ненульових коефіцієнтів ряду $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, де $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Обчислимо безпосередньо значення похідних $f^{(n)}(0)$:

$$f^{(0)}(x)=f(x)=e^x\cos x, \qquad a_0=\frac{1}{0!}f^{(0)}(0)=f(0)=1,$$

$$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x), \qquad a_1=\frac{1}{1!}f'(0)=1,$$

$$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)-e^x(\sin x+\cos x)=$$

$$=-2e^x\sin x, \qquad a_2=\frac{1}{2!}f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=-2e^x(\sin x+\cos x), \qquad a_3=\frac{1}{3!}f'''(0)=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3},$$

$$f^{(4)}(x)=-4e^x\cos x, \qquad a_4=\frac{1}{4!}f^{(4)}(0)=-\frac{4}{24}=-\frac{1}{6},$$

$$f^{(5)}(x)=-4e^x(\cos x-\sin x), \qquad a_5=\frac{1}{5!}f^{(5)}(0)=-\frac{4}{120}=-\frac{1}{30}.$$

На підставі теореми єдиності можна стверджувати, що знайдені коефіцієнти дійсно є коефіцієнтами ряду Маклорена $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, який подає задану функцію.

Отже,

$$f(x)=e^x\cos x=1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{30}x^5+\dots .$$

З'ясуємо, для яких значень x знайдене розвинення є справедливим. Оскільки функція $f(z)=e^z\cos z$ аналітична в усій комплексній площині, то знайдене розвинення подає функцію $f(x)=e^x\cos x$ на усій числовій осі $(-\infty<x<+\infty)$.

<u>Приклад 3.2.</u> Розвинути функцію $f(x)=\ln(x+5)$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=3$.

Розв'язання. Обчислимо значення похідних $f^{(n)}(3)$:

$$f^{(0)}(x)=f(x)=\ln(x+5), \qquad f^{(0)}(3)=f(0)=\ln 8,$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+5}, \qquad f'(3)=\frac{1}{8},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(x+5)^2} \qquad f''(3)=-\frac{1}{8^2},$$

$$f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(x+5)^3}, \qquad f'''(3) = \frac{1\cdot 2}{8^3},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+5)^4}, \qquad f^{(4)}(3) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{8^4},$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+5)^n}, \qquad f^{(n)}(3) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{8^n}.$$

Отже, на підставі теореми єдиності, отримуємо розвинення

$$f(x) = \ln(x+5) = \ln 8 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{8^n}.$$

З'ясуємо, при яких значеннях x це розвинення справедливе, тобто знайдемо область збіжності отриманого ряду Тейлора.

За формулою (2.19) $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{8^n}\right|} = \frac{1}{8}$, тобто $R = 8$, звідки інтервал збіжності $|x-3| < 8$ або $-5 < x < 11$. В межовій точці $x = -5$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n 8^n}{8^n} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$, який розбігається; в межовій точці $x = 11$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{8^n}{8^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, який також розбігається. Отже, знайдене розвинення справедливе в інтервалі $-5 < x < 11$.

Зауваження. Особливою точкою функції $f(z) = \ln(z+5)$ є точка $z_0 = -5$, а в точці $a = 3$ $f(z)$ аналітична. Тому розвинення функції $f(x)$ справедливе в інтервалі $|x-3| < R$, де $R = |z_0 - a| = |-5-3| = 8$, тобто в інтервалі $-5 < x < 11$.

Формальне написання ряду Тейлора при *безпосередньому розвиненні* вимагає складання виразів похідних $f^{(k)}(x)$ заданої функції та обчислення їх значень в точці x_0, що технічно може бути доволі складним і громіздким. Тому звичайно цей спосіб застосовують, коли потрібно знайти лише декілька перших членів ряду. Загальний член ряду, що містить формулу $f^{(n)}(x_0)$, вдається знайти тільки для дуже обмеженої кількості функцій з відносно простими похідними. В переважній більшості випадків користуються іншими способами розвинення, що передбачають використання так званих *найпростіших розвинень*, тотожних перетворень заданої функції і різноманітних штучних прийомів. Також досить часто дуже корисним виявляється застосування властивостей степеневих рядів (див. п. 2.5). Наприклад, ще одним способом розвинення в ряд Маклорена функції $f(x) = e^x \cos x$ (див. приклад 3.1) є множення рядів (3.16) й (3.19) безпосередньо або за формулою (2.12). Розглянемо приклади, що ілюструють ці способи.

Найпростішими розвиненнями називають відомі розвинення в ряд Маклорена основних елементарних функцій. Наведемо ***таблицю найпростіших розвинень*** (у дужках вказані області збіжності відповідних рядів):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty), \tag{3.16}$$

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n \qquad (-\infty < x < +\infty), \tag{3.17}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$(-\infty < x < +\infty), \tag{3.18}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$(-\infty < x < +\infty), \tag{3.19}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$(-\infty < x < +\infty), \tag{3.20}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$(-\infty < x < +\infty), \tag{3.21}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$
$$(-1 < x \le 1), \tag{3.22}$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots$$

$$\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)}{n!}x^n$$

$$(-1<x<1\ \textit{якщо}\ \alpha\le-1,\ -1<x\le1\ \textit{якщо}\ -1<\alpha<0,\ -1\le x\le1\ \textit{якщо}\ \alpha\ge0),\quad (3.23)$$

зокрема,

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\quad(-1<x<1),\quad (3.24)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad(-1<x<1),\quad (3.25)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\dots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

$$(-1<x\le1),\quad (3.26)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\dots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

$$(-1<x\le1),\quad (3.27)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\dots=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{n+1}$$

$$(-1\le x\le1),\quad (3.28)$$

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{1}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\dots=1-\frac{x}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{n+1}$$

$$(-1\le x\le1),\quad (3.29)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(-1\le x\le1),\quad (3.30)$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(-1\le x\le1).\quad (3.31)$$

Приклад 3.2. Розвинути функцію $f(z) = x^4 \sin(3x^2)$ в ряд Маклорена та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв'язання. Безпосереднє розвинення приведе до громіздких обчислень. Тому скористаємось відомим розвиненням (3.18) в ряд Маклорена функції $\sin x$, в якому замінимо x на $3x^2$, і отриманий ряд почленно помножимо на x^4:

$$\sin(3x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(3x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n+1}x^{4n+2}}{(2n+1)!},$$

$$f(z) = x^4 \sin(3x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n+1}x^{4n+6}}{(2n+1)!} = 3x^6 - \frac{9}{2}x^{10} + \frac{81}{40}x^{14} - \ldots .$$

Отримане розвинення справедливе на усій числовій осі $(-\infty < x < +\infty)$.

Приклад 3.3. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \dfrac{1}{1+x^5}$ та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв'язання. Замінимо в розвиненні (3.24) x на x^5. Маємо

$$\frac{1}{1+x^5} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x^5)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{5n} = 1 - x^5 + x^{10} - x^{15} + \ldots + (-1)^n x^{5n} + \ldots .$$

Цей ряд подає задану функцію для усіх x таких, що $|x^5| < 1$, тобто $-1 < x < 1$.

Зауваження. На перший погляд може здатися дивним, що функція $f(x) = \dfrac{1}{1+x^5}$, нескінченно диференційовна на *усій числовій прямій*, розвивається в степеневий ряд тільки в інтервалі $-1 < x < 1$. Справа тут в тому, що відповідна функція комплексної змінної $f(z) = \dfrac{1}{1+z^5}$, звуженням якої на дійсну вісь є функція $f(x) = \dfrac{1}{1+x^5}$, має особливі точки, що розташовані на колі $z = 1$. Тому розвинення $f(z) = \dfrac{1}{1+z^5}$ в степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{5n}$ справедливе в крузі $|z| < 1$, звуженням якого на дійсну вісь є саме інтервал $-1 < x < 1$.

В деяких випадках розвинення функції в степеневий ряд можна отримати, просумувавши табличні розвинення або раніше знайдені. При цьому іноді треба тотожно перетворити функцію таким чином, щоб подати її у вигляді зручної комбінації функцій, розвинення яких відомі.

<u>Приклад 3.4.</u> Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$ та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв'язання. Задана функція є правильним раціональним дробом. У відповідності із розкладанням знаменника на множники $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ подамо її у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{2x-5}{x^2-5x+6}=\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},\ \text{ звідки }\ 2x-5=A(x-3)+B(x-2).$$

Невідомі коефіцієнти A і B знайдемо з системи рівнянь $\begin{array}{l|l} x=2 & -1=-A, \\ x=3 & \ \ 1=B. \end{array}$

Отже, $A=B=1$ й $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$. Кожен з отриманих найпростіших дробів після нескладного тотожного перетворення розвинемо в ряд Маклорена за допомогою відомого розвинення (3.25):

$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\quad\left(\left|\frac{x}{2}\right|<1\Rightarrow|x|<2\right),$$

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\quad\left(\left|\frac{x}{3}\right|<1\Rightarrow|z|<3\right).$$

Отже,

$$\frac{2x-5}{x^2-5x+6}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n=-\frac{5}{6}-\frac{13}{36}x-\frac{35}{216}x^2-\dots.$$

За властивістю 2 степеневих рядів (п. 2.5) отримане розвинення справедливе в інтервалі $(-2,2)$, який є спільним інтервалом збіжності обох рядів.

<u>Приклад 3.5.</u> Розвинути в ряд Тейлора в околі точки $x_0=4$ (за степенями різниці $x-4$) функцію $f(x)=\ln(x^2+4x-5)$ та та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв'язання. Перетворимо тотожно задану функцію, виділяючи різницю $x-4$:

$$f(x)=\ln(x^2+4x-5)=\ln[(x-1)(x+5)]=\ln\{[3+(x-4)][9+(x-4)]\}=$$
$$=\ln\left[27\left(1+\frac{x-4}{3}\right)\left(1+\frac{x-4}{9}\right)\right]=\ln 27+\ln\left(1+\frac{x-4}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{x-4}{9}\right).$$

Скористаємось розвиненням (3.22), в якому замінимо x на $\frac{x-4}{3}$ й на $\frac{x-4}{9}$. Отримаємо

$$\ln\left(1+\frac{x-4}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{n3^n}\quad\left(\left|\frac{x-4}{3}\right|<1\Rightarrow|x-4|<3\right),$$
$$\ln\left(1+\frac{x-4}{9}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{n9^n}\quad\left(\left|\frac{x-4}{9}\right|<1\Rightarrow|x-4|<9\right).$$

Отже,

$$f(x)=\ln(x^2+4x-5)=\ln 27+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1+3^n}{n9^n}(x-4)^n=$$
$$=\ln 27+\frac{4}{9}(x-4)-\frac{5}{9^2}(x-4)^2+\frac{28}{3\cdot 9^3}(x-4)^3-\ldots.$$

Отримане розвинення справедливе в інтервалі $|x|<3$, який є спільним інтервалом збіжності рядів $\ln\left(1+\frac{x-4}{3}\right)$ та $\ln\left(1+\frac{x-4}{9}\right)$.

При розвиненні деяких функцій в степеневі ряди дуже корисним виявляється спосіб, що заснований на використанні такої властивості степеневих рядів, як можливість їх почленного диференціювання. Суть цього способа полягає в наступному. Нехай треба знайти розвинення деякої функції $f(x)$ в степеневий ряд. Якщо вдається знайти таку функцію $g(x)$, що $f(x)=a\cdot x^k\cdot g'(x)$, де $k\in\mathbb{Z}$, то, розвинувши функцію $g(x)$ в степеневий ряд і продиференціювавши його почленно, отримаємо розвинення в ряд функції $f(x)$. При цьому отримане розвинення справедливе всюди, де відповідне розвинення було вірним для функції $g(x)$.

<u>Приклад 3.6.</u> Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=\dfrac{1}{(1-x^3)^2}$.

Розв'язання. Оскільки $\dfrac{1}{(1-x^3)^2}=\dfrac{1}{3x^2}\left(\dfrac{1}{1-x^3}\right)'$, то, замінивши у табличному розвиненні (3.25) x на x^3, отримаємо

$$\frac{1}{(1-x^3)^2}=\frac{1}{3x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(x^3)^n\right)'=\frac{1}{3x^2}\sum_{n=1}^{\infty}3n\,x^{3n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{3n-3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^{3n}=$$

$$=1+2x^3+3x^6+\dots.$$

Оскільки при диференціюванні інтервал збіжності степеневого ряду не змінюється, то знайдене розвинення справедливе при усіх x з інтервалу $-1<x<1$.

<u>Приклад 3.7.</u> Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Неважко бачити, що $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{2}(\arcsin^2 x)'$. Скористаємось табличним розвиненням (3.30) і помножимо відповідний ряд безпосередньо сам на себе:

$$\arcsin^2 x=\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\dots\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\dots\right)=$$

$$=x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^6}{5}+\dots+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{3}+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}\cdot\frac{x^6}{3\cdot 3}+\dots+$$

$$+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^6}{5}+\dots=x^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{2}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{x^6}{3}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{n}.$$

Тоді

$$f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}(\arcsin^2 x)'=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{2n\cdot x^{2n-1}}{n}=$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^5+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^7+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot x^{2n+1}.$$

Отже, отримали розвинення $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot x^{2n+1}$, яке справедливе в інтервалі $-1 < x < 1$.

В деяких випадках значно простіше розвинути в степеневий ряд не саму функцію $f(x)$, а її похідну $f'(x)$, після чого почленно проінтегрувати отриманий ряд.

Приклад 3.8. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання. Знайдемо похідну

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

У табличному розвиненні (3.24) замінимо x на x^2 і отримаємо розвинення $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, вірне при $-1 < x < 1$. Проінтегрувавши цей ряд почленно від 0 до x, будемо мати шукане розвинення $f(x) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Оскільки при почленному інтегруванні ряду інтервал його збіжності не змінюється, то знайдене розвинення справедливе при усіх x з інтервалу $-1 < x < 1$.

Почленне інтегрування степеневого ряду широко застосовується при наближеному обчисленні визначених інтегралів, коли знайти первісну в скінченному вигляді не представляється можливим (див. далі в розділі 4). При цьому підінтегральну функцію розвивають в ряд, який потім інтегрують почленно.

Приклад 3.9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \int_0^x \frac{arctg\, t}{t}\, dt$.

Розв'язання. Скористаємось табличним розвиненням (3.31). Маємо

$$f(x) = \int_0^x \frac{arctg\, t}{t}\, dt = \int_0^x \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}\int_0^x t^{2n} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$, то розвинення справедливе в інтервалі $-1 < x < 1$.

На завершення наведемо приклад розвинення функції в степеневий ряд із застосуванням комплексних чисел.

<u>Приклад 3.10.</u> Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = e^x \cos x$.

Розв'язання. У спрощеному вигляді ця задача розглядалася нами раніше (див. приклад 3.1). Тут ми покажемо спосіб її розв'язання, який полягає у застосуванні тотожності

$$e^x \cos x = e^x \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} \right].$$

Отже, на підставі (3.16) маємо $e^{(1\pm i)x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(1 \pm i)^n x^n}{n!}$ і, оскільки за формулою Муавра $(1 \pm i)^n = \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} \pm i \sin\frac{n\pi}{4} \right)$, то шукане розвинення має вигляд

$$e^x \cos x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4} \right)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n!} \cos\frac{n\pi}{4} x^n =$$

$$= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \ldots.$$

За формулою (2.18) $R = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^n \dfrac{\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} \dfrac{\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}{(n+1)!}} = \infty$, тобто отримане розвинення справедливе на усій числовій осі $(-\infty < x < +\infty)$.

4. ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Степеневі ряди застосовуються при розв'язанні різноманітних теоретичних і прикладних задач, зокрема, при відшуканні інтегралів, що "не беруться", розв'язанні нелінійних рівнянь, дослідженні збіжності невласних інтегралів, обчисленні значень функцій та їх похідних. Особливо часто та ефективно степеневі ряди застосовуються для точного і наближеного інтегрування диференціальних рівнянь, як звичайних, так і з частинними похідними. Зважаючи на обмеженість обсягу посібника, тут ми розглянемо лише деякі з цих задач.

4.1. Інтегрування функцій

Іноді при розв'язанні певних задач буває зручно подавати інтеграл у вигляді степеневого ряду. В першу чергу це стосується випадків, коли первісна не виражається у скінченному вигляді (у таких випадках говорять, що інтеграл "не береться"), але підінтегральна функція може бути розвинена в степеневий ряд. Тоді цей ряд інтегрують почленно на деякому проміжку *всередині* області збіжності. Цей проміжок – довільний, якщо інтеграл невизначений, і заданий, якщо інтеграл визначений. В першому випадку після застосування формули Ньютона-Лейбніца отримаємо невизначений інтеграл у вигляді степеневого ряду, а у другому випадку – *точне значення* визначеного інтеграла як суму *числового* ряду.

Зауваження. Якщо проміжок інтегрування у випадку визначеного інтеграла повністю або частково розташований поза області збіжності степеневого ряду, що подає підінтегральну функцію, то застосування цього способу дуже ускладнене, або взагалі неможливе. Наприклад, у випадку інтеграла $\int_1^2 \frac{arctgx^3}{x}dx$ підінтегральну функцію необхідно розвинути в ряд Тейлора в околі точки x_0, такої, щоб $[1, 2] \subset [x_0 - 1, x_0 + 1]$. А це практично неможливо зробити. У випадку ж інтеграла $\int_2^{10} \frac{arctgx^3}{x}dx$ це неможливо навіть теоретично, оскільки довжина проміжку інтегрування перевищує довжину будь-якого інтервалу збіжності $(x_0-1,\ x_0+1)$. В той же час обидва інтеграли існують і дорівнюють відповідно **0.8250659128 ...** й **2.486837762 ...** (результати отримані за допомогою **Mathcad**).

Приклад 4.1. Подати у вигляді степеневого ряду інтеграл $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}\to 0$ при $x\to 0$ (це неважко перевірити). У "табличному" розвиненні (3.22) замінимо x на x^2 і отримане розвинення поділимо почленно на x:

$$\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\ ,$$

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x}=x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{n}\ .$$

Оскільки це розвинення справедливе в області $-1\le x\le 1$, то проінтегруємо отриманий ряд почленно на $[0,x]\subset[-1,1]$, де x – довільне значення з $[-1,0)\bigcup(0,1]$. Тоді будемо мати

$$\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t}dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{n}dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\int_0^x t^{2n-1}dt=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{t^{2n}}{2n}\Bigg|_0^x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n^2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{18}-....$$

Отже, $\int\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx=C+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n^2}=C+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{18}-...$, де C – довільна стала. Знайдене подання справедливе в області $[-1,1]$.

Приклад 4.2. Обчислити інтеграл $\int_0^1\frac{arctgx^3}{x}dx$.

Розв'язання. Користуючись "табличним" розвиненням в ряд Маклорена функції ***arctgx***

$$\mathrm{arctg}\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...\ =\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ \ (-1\le x\le 1),$$

знаходимо, що підінтегральна функція $f(x)=\begin{cases} \dfrac{arctgx^3}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ подається

рядом Маклорена

$$\frac{arctgx^3}{x}=x^2-\frac{x^8}{3}+\frac{x^{14}}{5}-\frac{x^{20}}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{6n+2}}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{6n+2}}{2n+1},$$

який збігається в області $-1 \le x \le 1$.

Інтегруючи цей ряд почленно на $[0,1]$, отримуємо *точне значення* заданого інтеграла як суму числового ряду

$$\int_0^1 \frac{arctgx^3}{x}dx=\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{6n+2}}{2n+1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{6n+2}dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{x^{6n+3}}{6n+3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{25}-\frac{1}{49}+\ldots\right).$$

Значення цього інтеграла, обчислене на комп'ютері за допомогою **Mathcad**, дорівнює **0.3053218647 ...**.

4.2. Розв'язання диференціальних рівнянь

Якщо функція $f(x,y)$ в околі точки (x_0, y_0) є аналітичною, тобто розвивається в ряд за степенями різниць $x-x_0$ й $y-y_0$, то розв'язок рівняння $y'=f(x,y)$ з початковою умовою $y(x_0)=y_0$ теж є аналітичною функцією, тобто розвивається в степеневий ряд в околі точки x_0. Аналогічне твердження справедливе для рівняння

$$y^{(n)}=F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$$

з початковими умовами

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

Розглянемо два способи розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.

4.2.1. Спосіб послідовних диференціювань

Цей спосіб застосовують, коли треба знайти частинний розв'язок $y = y(x)$ рівняння $y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, який задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Цей розв'язок можна шукати у вигляді ряду Тейлора

$$\widetilde{y} = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...$$

Якщо значення y_0, y_0', …, $y_0^{(n-1)}$ відомі, то з рівняння знаходимо

$$y^{(n)}(x_0) = F(x_0, y(x_0), y'(x_0), ..., y^{(n-1)}(x_0)).$$

Диференціюючи потім вихідне рівняння по x, можна знайти будь-яке число похідних $y^{(k)}(x)$, $k > n$. Підставивши знайдені значення $y^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, 2, ..., m$, отримуємо $m+1$ членів ряду, що подає шуканий частинний розв'язок рівняння в околі точки x_0.

<u>Приклад 4.3.</u> Знайти чотири перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку рівняння $y'' = x \sin y'$, який задовольняє початкові умови $y(1) = 0$, $y'(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Будемо шукати частинний розв'язок рівняння у вигляді ряду

$$\widetilde{y} = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + ...$$

За умовою задачі, $y(1) = 0$, $y'(1) = \dfrac{\pi}{2}$. З рівняння $y'' = x \sin y'$ знаходимо, що $y''(1) = 1 \cdot \sin y'(1) = 1 \cdot 1 = 1$. Диференціюючи вихідне рівняння, маємо

$$y''' = \sin y' + xy'' \cos y',$$

звідки отримуємо

$$y'''(1) = \sin y'(1) + 1 \cdot y''(1) \cdot \cos y'(1) = 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 = 1.$$

Диференціюючи рівність $y''' = \sin y' + xy'' \cos y'$, маємо

$$y^{(4)} = y'' \cos y' + y'' \cos y' + xy''' \cos y' - xy'' y''' \sin y',$$

звідки отримуємо

$$y^{(4)}(1) = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$\tilde{y} = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 - \frac{1}{4!}(x-1)^4 + \dots \, .$$

Зауваження. Формулу загального члену ряду знайти вдається далеко не завжди, отже, й дослідити ряд на збіжність теж не вдається. Однак з загальної теорії відомо, що знайдене розвинення справедливе в деякому околі точки x_0. Розглянутий спосіб застосовний також у випадку, коли треба знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, якщо початкові умови розглядати як довільні сталі.

4.2.2. Спосіб невизначених коефіцієнтів

Спосіб невизначених коефіцієнтів застосовують для відшукання у вигляді степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$ загального розв'язку диференціального рівняння або частинного розв'язку такого рівняння з початковими умовами.

Коефіцієнти C_n відшукують за наступною схемою.

1. Послідовно знаходять похідні функції $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$, де C_n поки ще не визначені. Обчислюють відповідні C_n з початкових умов (якщо такі умови задані).
2. Подають усі функції, що входять до рівняння, степеневими рядами за степенями різниці $x - x_0$.
3. Підставляють подання функції $y(x)$, її похідних і усіх інших функцій у вихідне рівняння.
4. Шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях $x - x_0$ в обох частинах отриманого співвідношення, складають систему рівнянь для визначення C_n.

Розв'язок, що отриманий у вигляді степеневого ряду, може бути досліджений на збіжність. Якщо ряд збігається в деякій області, то з самого процесу визначення C_n випливає, що його сума є розв'язком даного рівняння. Зауважимо, що в більшості випадків розв'язок буде подаватися степеневим рядом, сума якого не є елементарною функцією.

Якщо усі коефіцієнти $a_i(x)$ $i=\overline{0,n}$ і права частина $f(x)$ лінійного диференціального рівняння n-го порядку

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

можуть бути розвинені в степеневі ряди в деякому околі $|x-x_0|<R$ точки x_0, причому в цьому околі $a_0(x)\neq 0$, то існує єдиний розв'язок $y=y(x)$ даного рівняння, що задовольняє початкові умови $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, …, $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ і подається степеневим рядом за степенями різниці $x-x_0$, який збігається в інтервалі $|x-x_0|<R$. Зокрема, якщо $a_i(x)$ й $f(x)$ є многочлени, причому $a_0(x)\neq 0$ $\forall x$, то розв'язок рівняння подається степеневим рядом, що збігається на усій числовій осі.

Ми не розглядаємо варіант, коли $a_0(x_0)=0$, оскільки в цьому випадку розв'язок у вигляді *звичайного* степеневого ряду може й не існувати, а пошук інших розв'язків суттєво ускладнюється.

Приклад 4.4. Знайти п'ять перших, відмінних від нуля, членів розвинення в степеневий ряд розв'язку рівняння $(1+x^2)y''+xy'-y=0$, який задовольняє початкові умови $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок рівняння у вигляді ряду

$$y(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+....$$

Знаходимо $y'(x)=C_1+2C_2x+3C_3x^2+...$, $y''(x)=2C_2+2\cdot 3\cdot C_3x+...$.

Враховуючи початкові умови, отримаємо, що $C_0=1$, $C_1=1$, отже,

$$\tilde{y}(x)=1+x+C_2x^2+C_3x^3+....$$

Підставивши $\tilde{y}$ у рівняння, отримуємо співвідношення:

$$(1+x^2)(2C_2+2\cdot 3\cdot C_3x+3\cdot 4\cdot C_4x^2+...)+x(1+2C_2x+3C_3x^2+...)-$$
$$-(1+x+C_2x^2+C_3x^3+...)=0.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах цього співвідношення і складемо систему рівнянь для визначення C_n:

$$
\begin{array}{l|c}
x^0 & 2C_2 - 1 = 0, \\
x & 2\cdot 3\cdot C_3 + 1 - 1 = 0, \\
x^2 & 3\cdot 4\cdot C_4 + 2C_2 + 2C_2 - C_2 = 0, \\
x^3 & 4\cdot 5\cdot C_5 + 2\cdot 3\cdot C_3 + 3C_3 - C_3 = 0, \\
x^4 & 5\cdot 6\cdot C_6 + 3\cdot 4\cdot C_4 + 4C_4 - C_4 = 0,
\end{array}
$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$x^k \Big| (k+1)(k+2)C_{k+2} + (k-1)kC_k + kC_k - C_k = 0,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Розв'язком системи є $C_2 = \dfrac{1}{2}$, $C_3 = 0$, $C_4 = -\dfrac{1}{2\cdot 4}$, $C_5 = 0$, $C_6 = \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}$, ...

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$\widetilde{y}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots .$$

Зауважимо, що знайти цей розв'язок попереднім способом послідовних диференціювань було б значно складніше.

Приклад 4.5. Знайти п'ять перших, відмінних від нуля, членів розвинення в степеневий ряд загального розв'язку попереднього рівняння.

Розв'язання. Після підстановки розв'язку $y(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots$ у рівняння отримуємо співвідношення:

$$(1+x^2)(2C_2 + 2\cdot 3\cdot C_3x + 3\cdot 4\cdot C_4x^2 + \dots) + x(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \dots) -$$
$$- (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots) = 0,$$

отже, система рівнянь для визначення C_n в цьому випадку буде мати вигляд

$$
\begin{array}{l|c}
x^0 & 2C_2 - C_0 = 0, \\
x & 2\cdot 3\cdot C_3 + C_1 - C_1 = 0, \\
x^2 & 3\cdot 4\cdot C_4 + 2C_2 + 2C_2 - C_2 = 0, \\
x^3 & 4\cdot 5\cdot C_5 + 2\cdot 3\cdot C_3 + 3C_3 - C_3 = 0, \\
x^4 & 5\cdot 6\cdot C_6 + 3\cdot 4\cdot C_4 + 4C_4 - C_4 = 0,
\end{array}
$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$x^k \Big| (k+1)(k+2)C_{k+2} + (k-1)kC_k + kC_k - C_k = 0,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ..$$

Розв'язком системи є $C_2 = \frac{C_0}{2}$, $C_3 = 0$, $C_4 = -\frac{1}{2 \cdot 4} C_0$, $C_5 = 0$, $C_6 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} C_0$, ... Отже, шуканий загальний розв'язок має вигляд

$$y(x) = C_0 + C_1 x + \frac{C_0}{2} x^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} C_0 x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} C_0 x^6 + \ldots =$$

$$= C_0 \left(1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \ldots \right) + C_1 x,$$

тобто є лінійною комбінацією двох лінійно незалежних частинних розв’язків

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \ldots \quad \text{й} \quad y_2 = x .$$

4.3. Наближені обчислення значень аналітичних функцій та визначених інтегралів

Значення аналітичних функцій в багатьох випадках можна обчислити з заданою точністю, користуючись розвиненнями цих функцій в ряд Маклорена або ряд Тейлора.

Нехай відоме розвинення функції $f(x)$ в ряд Маклорена

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Тоді для будь-якого числа x_0 з області збіжності цього ряду справедлива наближена рівність

$$f(x_0) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k {x_0}^k ,$$

тобто *наближене* значення $f(x_0)$ визначається значенням деякої *частинної* суми відповідного числового ряду. Мінімальне число n_0 членів ряду, які необхідно утримати для забезпечення заданої точності δ при обчисленні *суми* цього ряду $f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$, встановлюється шляхом оцінки *залишку*

$$r_n(x_0) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k {x_0}^k ,$$

який співпадає зі значенням залишкового члену $R_n(x_0)$ формули Маклорена. Останній, в свою чергу, являє собою похибку, що виникає при заміні функції $f(x)$ її многочленом Маклорена, тобто

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k .$$

Ця оцінка особливо проста, якщо ряд є знакопочережним: $f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n x_0{}^n$. Тоді згідно властивостям рядів Лейбніца похибка обчислень $|r_n(x_0)|$ за модулем не перевищує величини першого з відкинутих членів ряду, тобто

$$|r_n(x_0)| < \left| a_{n+1} x_0{}^{n+1} \right| .$$

Отже, для забезпечення заданої точності необхідно врахувати таке мінімальне число n_0 членів ряду, щоб виконувалася нерівність

$$\left| a_{n_0+1} x_0{}^{n_0+1} \right| \le \varepsilon ,$$

де ε – так звана ***залишкова похибка***.

Зауваження. Величина δ являє собою ***граничну допустиму сумарну похибку*** обчислень. Тому, якщо $\delta = 10^{-m}$ і кінцевий результат повинен містити m вірних десяткових знаків після коми, то задану точність подають у вигляді $\delta = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, де ε_1 – похибка проміжних обчислень, ε_2 – похибка округлення кінцевого результату. Звичайно приймають $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$, $\varepsilon_1 = \frac{\delta}{4}$, $\varepsilon_2 = \frac{\delta}{2}$. Якщо заключне округлення відсутнє, то звичайно приймають $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, $\varepsilon_1 = \frac{\delta}{2}$, $\varepsilon_2 = 0$.

Якщо ж ряд не є знакопочережним (знакододатний або знакозмінний), то задача оцінки залишку ряду стає набагато складнішою і при її розв’язанні застосовують різні прийоми і засоби. Зокрема, для цього застосовують збіжну геометричну прогресію. В окремих випадках також користуються розвиненнями в так звані *ланцюгові дроби*. Для знакододатного ряду, що складається з модулів членів залишку, намагаються знайти легко сумовний ряд з додатними членами, які були б не менше членів вказаного ряду, та оцінюють залишок сумою цього знайденого ряду. Наприклад,

$$\frac{1}{6!\cdot 12}+\frac{1}{7!\cdot 14}+\frac{1}{8!\cdot 16}+\ldots<\frac{1}{6!\cdot 12}\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)<\frac{1}{8640}\cdot 2\,.$$

Зауваження. На практиці для позбавлення похибки безпосередньо самих *обчислень* і забезпечення заданої точності $\delta = 10^{-m}$ кінцевого результату усі проміжні обчислення виконують з *не менше* ніж одним або двома *додатковими* знаками після коми. Інакше кажучи, проміжні результати округлюють в $(m+1)$-му або $(m+2)$-му знаку після коми, а вже остаточний результат округлюють в m-му знаку. При цьому не зовсім строго припускають, що допущені похибки не вплинуть на десяткові знаки m-го розряду кінцевого результату.

Розглянемо на прикладах обчислення функцій різних класів.

<u>Приклад 4.6.</u> Обчислити $e^{2.3}$ з точністю $\delta = 10^{-5}$.

Розв'язання. Скористаємось "табличним" розвиненням

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ , \tag{3.16}$$

яке справедливе при $-\infty < x < +\infty$. Залишковий член цього ряду має вигляд

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1)\,.$$

При великих значеннях $|x|$ цей ряд мало придатний для обчислень, оскільки збігається досить повільно. Тому звичайно діють наступним чином.

Нехай $E(x)$ – ціла частина числа x, а q – його дробова частина $(0<q<1)$, тобто

$$e^x = e^{E(x)}e^q\,.$$

Перший множник $e^{E(x)}$ може бути знайдений за допомогою множення:

$$e^{E(x)} = \underbrace{e\cdot e\cdot\ldots\cdot e}_{E(x)\ \text{разів}},\ \text{якщо}\ E(x)\ge 0 \quad \text{або} \quad e^{E(x)} = \underbrace{\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{e}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{e}}_{-E(x)\ \text{разів}},\ \text{якщо}\ E(x)<0\,,$$

де $e = 2.7\,1828\,1828\,4590\,45\ldots$, $\frac{1}{e} = 0.3678\,7944\,1171\,442\ldots$.

Для обчислення другого множника e^q користуються розвиненням (3.16)

$$e^q = 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^3}{3!} + \ldots + \frac{q^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{n!}\,,$$

яке при $0<q<1$ утворює швидко збіжний ряд, оскільки, як можна показати,

$$0 < r_n(q) < \frac{q^{n+1}}{(n+1)!\,n}.$$

Ця нерівність може бути подана у вигляді

$$0 < r_n(q) < u_n \cdot \frac{q}{n},$$

де $u_n = \frac{q^n}{n!}$ – *останній зі збережених членів*. Шукане ж число n_0 цих членів визначається з нерівності $\frac{q^{n+1}}{(n+1)!\,n} < \varepsilon$, де ε – залишкова похибка.

В нашому прикладі $x_0 = 2.3$, отже, $E(x_0) = 2$, $q = 0.3$, $\delta = 10^{-5}$. Приймемо залишкову похибку $\varepsilon = \frac{\delta}{4} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-5} = 2.5 \cdot 10^{-6}$. Маємо

$n = 0 \quad 1 > \varepsilon$, $n = 1 \quad \frac{0.3^2}{2!} = 0.045 > \varepsilon$, $n = 2 \quad \frac{0.3^3}{3!2} = 0.00225 > \varepsilon$,

$n = 3 \quad \frac{0.3^4}{4!3} = 0.0001125 > \varepsilon$, $n = 4 \quad \frac{0.3^5}{5!4} = 0.000005062 > \varepsilon$,

$n = 5 \quad \frac{0.3^6}{6!5} = 0.000000202 < \varepsilon$.

Таким чином, для забезпечення заданої точності необхідно врахувати $n_0 = 6$ перших членів ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0.3^n}{n!}$. Тоді

$$e^{2.3} \approx e^2 \left(1 + 0.3 + \frac{0.3^2}{2} + \frac{0.3^3}{3!} + \frac{0.3^4}{4!} + \frac{0.3^5}{5!}\right) \cong 7.3890561 \cdot (1 + 0.3 + 0.045 + 0.0045 +$$

$$+ 0.0003375 + 0.0000203) = 7.3890561 \cdot 1.3498578 \cong 9.974175011 \approx 9.97418.$$

Зауважимо, що точне значення $e^{2.3} = 9.974182455\ldots$, отже, в отриманому результаті всі десяткові знаки після коми вірні.

Приклад 4.7. Обчислити $\sqrt[3]{152}$ з точністю $\delta = 10^{-4}$.

Розв'язання. Приймемо залишкову похибку $\varepsilon = \frac{\delta}{4} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-4} = 2.5 \cdot 10^{-5}$ і скористаємось "табличним" розвиненням

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots, \qquad (3.23)$$

у якому покладемо $\alpha=\frac{1}{3}$. Тоді ряд збігається в області $-1\le x\le 1$.

Перетворимо заданий корінь до вигляду

$$\sqrt[3]{152}=\sqrt[3]{125+27}=5\left(1+\frac{27}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$$

і покладемо $x=\frac{27}{125}$. Будемо мати знакопочережний ряд

$$\sqrt[3]{152}=5\left(1+\frac{27}{125}\right)^{\frac{1}{3}}=5\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{125}-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{27}{125}\right)^2+\frac{5}{81}\cdot\left(\frac{27}{125}\right)^3-\frac{10}{243}\left(\frac{27}{125}\right)^4+\ldots\right]=$$

$$=5+\frac{5}{3}\cdot\frac{27}{125}-\frac{5}{9}\cdot\left(\frac{27}{125}\right)^2+\frac{25}{81}\cdot\left(\frac{27}{125}\right)^3-\frac{50}{243}\left(\frac{27}{125}\right)^4+\ldots.$$

Оскільки нерівності $\left|a_{n_0+1}x_0^{\,n_0+1}\right|\le\varepsilon$ задовольняє сьомий член ряду $5\cdot\frac{12320}{3^{12}}\left(\frac{27}{125}\right)^6\cong 0.0000118<0.000025$, то для забезпечення заданої точності треба врахувати $n_0=6$ перших членів:

$$\sqrt[3]{152}\approx 5+\frac{5}{3}\cdot\frac{27}{125}-\frac{5}{9}\cdot\left(\frac{27}{125}\right)^2+\frac{25}{81}\cdot\left(\frac{27}{125}\right)^3-\frac{50}{243}\left(\frac{27}{125}\right)^4+\frac{110}{729}\cdot\left(\frac{27}{125}\right)^5\cong$$

$$\cong 5+0.36-0.02592+0.0031104-0.0004479+0.0000709=5.3368134\approx$$

≈ 5.3368. Зауважимо, що точне значення $\sqrt[3]{152}=5.336803297\ldots$, отже, в отриманому результаті всі десяткові знаки після коми вірні.

Зауваження. При наближеному обчисленні значення $\sqrt[n]{N}=\sqrt[n]{a^n+b}$ $(b>0)$ за формулою

$$\sqrt[n]{a^n+b}=a+\frac{b}{na^{n-1}} \qquad (4.1)$$

похибка за модулем не перевищує $\frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{b^2}{a^{2n-1}}$. Якщо a^n – найближчий точний степінь до числа N, то при наближеному обчисленні значення $\sqrt[n]{N}=\sqrt[n]{a^n+b}$ за формулою

$$\sqrt[n]{N}=\sqrt[n]{a^n+b}=a+\frac{2ab}{2na^n+(n-1)b} \tag{4.2}$$

модуль похибки дорівнює $\frac{n^2-1}{12n^3}\cdot a\cdot\left(\frac{b}{a^n}\right)^3$. Отже, при обчисленні $\sqrt[3]{152}$ за формулою (4.1) при $n=3$, $a=5$, $b=27$ маємо $\sqrt[3]{152}=5+\frac{27}{75}=5.36$, причому похибка за модулем не перевищує $\frac{2}{18}\cdot\frac{729}{3125}=0.02592$; при обчисленні $\sqrt[3]{152}$ за формулою (4.2) при $n=3$, $a=5$, $b=27$ маємо

$$\sqrt[3]{152}=5+\frac{2\cdot 5\cdot 27}{6\cdot 125+2\cdot 27}\approx 5.3358,$$

причому похибка за модулем дорівнює $\frac{8}{12\cdot 27}\cdot 5\cdot\left(\frac{27}{125}\right)^3\approx 0.0012$.

<u>Приклад 4.8.</u> Обчислити $\ln 7.32$ з точністю $\delta=10^{-4}$.

Розв'язання. Приймемо залишкову похибку $\varepsilon=\frac{\delta}{4}=\frac{1}{4}\cdot 10^{-4}=2.5\cdot 10^{-5}$.

"Табличне" розвинення має вигляд

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \tag{3.22}$$

і є справедливим при $-1<x\le 1$, однак при $|x|$, близьких до $\mathbf{1}$, ряд (3.22) збігається вкрай повільно і тому мало придатний для практичних обчислень. Тому застосовують розвинення

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \tag{4.3}$$

вірне при усіх $|x|<1$. Покладемо $\frac{1+x}{1-x}=\frac{N+h}{N}$, звідки $x=\frac{h}{2N+h}$. Тоді з (4.3) отримаємо

$$\ln(N+h)=\ln N+2\left[\frac{h}{2N+h}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5+\ldots\right]=$$

$$=\ln N+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n-1}. \tag{4.4}$$

Цей ряд збігається значно швидше за ряд (3.22). Верхня межа похибки, що виникає при відкиданні членів, оцінюється за допомогою нерівності

$$\boldsymbol{R_n < 2\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+1}}{1-\left(\frac{h}{2N+h}\right)^2} = \alpha}. \tag{4.5}$$

Повинно виконуватися $\boldsymbol{R_n < \varepsilon}$, отже, $\boldsymbol{\alpha \le \varepsilon}$.

У частинному випадку $\boldsymbol{N = h = 1}$ маємо

$$\boldsymbol{\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\ldots\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}}}. \tag{4.6}$$

Оскільки ряд $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}}}$ збігається швидше за геометричну прогресію зі знаменником $\boldsymbol{\frac{1}{9}}$, то утримання кожного наступного члена збільшує точність обчислення $\boldsymbol{\ln 2}$ приблизно на один десятковий знак.

Обчислимо попередньо $\boldsymbol{\ln 2}$ за (4.6). Оскільки в цьому випадку

$$\boldsymbol{R_n < \frac{9}{4(2n+1)3^{2n+1}}},$$

то $\boldsymbol{R_4 < 0.0000508}$, $\boldsymbol{R_5 < 0.0000012}$. Отже, для забезпечення заданої точності необхідно утримати 5 членів ряду:

$$\boldsymbol{\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}\right) \cong 0.6931460 \approx 0.6931}.$$

Обчислимо так само $\boldsymbol{\ln 3}$ й $\boldsymbol{\ln 7}$ за (4.4), поклавши $\boldsymbol{N = 2}$, $\boldsymbol{h = 1}$ і утримуючи як і раніше 5 членів ряду:

$$\boldsymbol{\ln 3 = \ln(2+1) \approx \ln 2 + 2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\frac{1}{7\cdot 5^7}+\frac{1}{9\cdot 5^9}\right] \cong 0.6931460 +}$$

$$\boldsymbol{+0.4054651 = 1.0986111 \approx 1.0986}.$$

$$\boldsymbol{\ln 7 = \ln(6+1) \approx \ln 2 + \ln 3 + 2\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{3\cdot 13^3}+\frac{1}{5\cdot 13^5}+\frac{1}{7\cdot 13^7}+\frac{1}{9\cdot 13^9}\right) \cong}$$

$$\boldsymbol{\cong 0.6931460 + 1.0986111 + 0.1541507 = 1.9459078 \approx 1.9459}$$

(тут $\boldsymbol{\ln 2}$ й $\boldsymbol{\ln 3}$ є *проміжними* результатами і тому обчислені з 7 десятковими знаками після коми).

Тепер обчислимо значення $\boldsymbol{\ln 7.32}$, подавши його у вигляді

$$\ln 7.32 = \ln(7+0.32) \approx \ln 7 + 2\left[\frac{0.32}{14.32} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{0.32}{14.32}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{0.32}{14.32}\right)^5 + \ldots\right].$$

Достатньо утримати лише перший член ряду, оскільки, як неважко перевірити, $R_2 < \varepsilon$. Отже, маємо

$$\ln 7.32 \approx \ln 7 + 2\cdot\frac{0.32}{14.32} \cong 1.9459078 + 0.0446927 = 1.9906005 \approx 1.9906.$$

(точне значення $\ln 7.32 = 1.990610328\ldots$).

Приклад 4.9. Обчислити $\sin 57^\circ$ з точністю $\delta = 10^{-4}$.

Розв'язання. Приймемо залишкову похибку $\varepsilon = \frac{\delta}{4} = \frac{1}{4}\cdot 10^{-4} = 2.5\cdot 10^{-5}$.

На практиці при обчисленні значення $\sin x$ аргумент x за допомогою формул зведення можна перевести у відрізок $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Якщо $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, то $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, а якщо $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$, то $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{2n}}{(2n)!}$. Обидва ряди є знакопочережними, отже, для залишкового члену R_n справедлива оцінка $|R_n| \le |u_{n+1}|$ й $\operatorname{sgn} R_n = \operatorname{sgn} u_{n+1}$, де u_{n+1} – перший з відкинутих членів. Тому процес сумування можна зупинити, як тільки буде виявлено, що $|u_{n+1}| \le \varepsilon$, де ε – задана залишкова похибка.

Оскільки $x = arc\ 57^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot 57 \cong 0.9948377$, причому $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$, то маємо: $u_0 = 1$, $u_1 = -0.1658642$, $u_2 = 0.0045852$, $u_3 = -0.0000507$, $u_4 = 0.0000003$,... . Оскільки $|u_4| < \varepsilon = 0.000025$, то треба утримати 4 перших члени ряду:

$$\sin 57^\circ \approx 1 - 0.1658642 + 0.0045852 - 0.0000507 = 0.8386703 \approx 0.8387$$

(точне значення $\sin 57^\circ = 0.838670567\ldots$).

Відшукання наближених значень визначених інтегралів, первісна яких не виражається у скінченному вигляді, грунтується на тих самих міркуваннях, що й інтегрування функцій та наближені обчислення їх значень (розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд з подальшим почленним його інтегруванням у заданих межах і наближене обчислення суми отриманого числового ряду).

Приклад 4.10. Обчислити $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx$ з точністю $\delta = 10^{-4}$.

Розв'язання. Приймемо залишкову похибку $\varepsilon = \frac{\delta}{4} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-4} = 2.5 \cdot 10^{-5}$ і розвинемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена, для чого у "табличному" розвиненні (3.16) замінимо x на $-x^3$:

$$e^{-x^3} = 1 - x^3 + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} .$$

Отриманий ряд збігається на всій числовій осі, отже, його можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку, зокрема, на відрізку $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Після інтегрування і застосування формули Ньютона-Лейбніца приходимо до знакопочережного числового ряду, який збігається, тобто є рядом Лейбніца:

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} x^{3n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(3n+1)} x^{3n+1} \Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(3n+1)8^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 8} + \frac{1}{2! \cdot 14 \cdot 8^2} - \frac{1}{3! \cdot 20 \cdot 8^3} + \ldots .$$

Для забезпечення необхідної точності обчислення суми цього ряду, яка і є значенням заданого визначеного інтеграла, потрібно утримати таке число членів ряду, щоб виконалася умова $|u_{n+1}| \leq \varepsilon$, де u_{n+1} – перший з відкинутих членів, а ε – задана залишкова похибка.

Оскільки $u_0 = 0.5$, $u_1 = -0.015625$, $u_2 = 0.0005580$, $u_3 = -0.0000163$, ... й $|u_3| < \varepsilon = 0.000025$, то треба утримати 3 перших члени ряду:

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx \approx 0.5 - 0.015625 + 0.0005580 = 0.4849330 \approx 0.4849 .$$

Значення цього інтеграла, обчислене на комп'ютері за допомогою **Mathcad**, дорівнює **0.48491714311364 ...** , тобто в отриманому результаті всі знаки вірні.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Знайти радіуси та інтервали збіжності рядів:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}\,x)^n$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n!}\,x^n$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$. 5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln^4 n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{\frac{n}{3}}x^{2n}}{n!}$. 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^n}{(2n-1)!!}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}x^{2n}}{n!}$. 9. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5^{\frac{n}{2}}\sqrt{4n+1}}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,x^n}{\sqrt{4^n n^2+1}}$. 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{5^n\sqrt[3]{n^2+1}}$. 12. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{x+3}{3}\right)^n$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}(x+2)^n$.

Знайти області збіжності рядів:

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}(x+2)^{2n}$. 15. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\ln n}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n(5^n+1)}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$. 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n-2}$. 19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n(x+1)^{3n}$.

20. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln^2 n}$. 21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$. 22. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,x^n$. 23. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}$. 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n x^n$.

25. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n n\ln 2n}$. 26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^{2n}}{n+1}$. 27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(x+1)^n$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n$. 29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt{n+1}}$. 30. $\sum_{n=1}^{\infty}5^{n^2}(x+2)^{n^2}$.

Написати n перших відмінних від нуля членів розвинення функції $f(x)$ в степеневий ряд з центром в точці x_0:

31. $f(x)=2^{\sqrt{x}},\ x_0=4,\ n=4$. 32. $f(x)=\ln(\sqrt[4]{x}+1),\ x_0=16,\ n=4$.

33. $f(x)=\sin\sqrt[3]{x},\ x_0=-1,\ n=4$. 34. $f(x)=e^{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt[3]{x},\ x_0=-1,\ n=3$.

35. $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$, $n=3$. **36.** $f(x)=\dfrac{1}{arctg\ x}$, $x_0=1$, $n=3$.

Знайти чотири перші ненульові члени розвинення в ряд Маклорена функції $f(x)$ та вказати інтервал, в якому це розвинення справедливе:

37. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$. **38.** $f(x)=\dfrac{1}{5+e^{-x}}$. **39.** $f(x)=\ln\cos x$. **40.** $f(x)=e^{\frac{1}{1-x}}$.

Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Маклорена, застосувавши найпростіші розвинення, та вказати радіус збіжності отриманого ряду:

41. $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{x^3}{3}\right)$. **42.** $f(x)=\sqrt[3]{1-4x}$. **43.** $f(x)=\cos\dfrac{x^3}{3}$.

44. $f(x)=e^{1-2x^3}$. **45.** $f(x)=x^3\arcsin(2x^2)$.

Розвинути в ряд Тейлора в околі точки x_0 функцію $f(x)$ та вказати інтервал збіжності отриманого ряду:

46. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+5}$, $x_0=3$. **47.** $f(x)=e^{x^2-4x+1}$, $x_0=2$.

48. $f(x)=\sin(x^2+4x)$, $x_0=-2$. **49.** $f(x)=\ln(5x+3)$, $x_0=1$.

50. $f(x)=\ln(x^2+6x+12)$, $x_0=-3$.

За допомогою почленного диференціювання і інтегрування степеневого ряду розвинути функцію $f(x)$ в ряд Маклорена та вказати його інтервал збіжності:

51. $f(x)=\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$. **52.** $f(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

53. $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$. **54.** $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

55. $f(x)=\frac{1}{(1-x)^3}$. **56.** $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **57.** $f(x)=arctg\frac{2-2x}{1+4x}$.

58. $f(x)=\int\limits_0^x \frac{\arcsin t^2}{t^2}\,dt$. **59.** $f(x)=\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$. **60.** $f(x)=\int\limits_0^x \ln\frac{2+t}{2-t}\,dt$.

61. $f(x)=\int\limits_0^x t^3e^{-t^2}\,dt$. **62.** $f(x)=\int\limits_0^x \cos\sqrt{t}\,dt$. **63.** $f(x)=\int\limits_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt$.

Перевірити справедливість рівності:

64. $f(x)=\int\limits_1^x \frac{\sin t^2}{t^3}\,dt=C+\ln|x|+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n(2n+1)!}x^{4n} \quad (x\neq 0)$.

65. $f(x)=\int\limits_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt=C-\frac{1}{x}+\ln|x|+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)!}x^{4n}$.

Користуючись розвиненням функції $f(x)$ в степеневий ряд, знайти значення похідної $f^{(n)}(x_0)$ вказаного порядку n:

66. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f^{(10)}(0)$. **67.** $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$, $f^{(6)}(0)$.

68. $f(x)=x^6 arctgx$, $f^{(18)}(0)$. **69.** $f(x)=x^2\cdot\sqrt[4]{1+x}$, $f^{(7)}(0)$.

Обчислити інтеграл (відповідь подати у вигляді числового ряду):

70. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{arctg\,x}{x}\,dx$. **71.** $\int\limits_0^1 \frac{e^x-1}{\sqrt{x^3}}\,dx$. **72.** $\int\limits_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$. **73.** $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

Способом послідовних диференціювань знайти n перших ненульових членів розвинення в степеневий ряд в околі точки x_0 розв'язку задачі Коші:

74. $y'=y^2-x$, $x_0=0$, $y(0)=1$, $n=5$.

75. $y'=y^2+x^3$, $x_0=0$, $y(0)=1$, $n=5$.

76. $y' = x + \frac{1}{y}$, $x_0 = 0$, $y(0) = 1$, $n = 4$.

77. $y' = 2x + \cos y$, $x_0 = 0$, $y(0) = 0$, $n = 4$.

78. $2y' - (x + y)y - e^x = 0$, $x_0 = 0$, $y(0) = 2$, $n = 4$.

79. $y' + y\cos x - 3e^x y^2 - \sin x = 0$, $x_0 = 0$, $y(0) = 1$, $n = 4$.

80. $y'' = y^2 + x^2$, $x_0 = -1$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = \frac{1}{2}$, $n = 6$.

81. $y'' = xyy'$, $x_0 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $n = 5$.

82. $y'' = xy^2 - y'$, $x_0 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $n = 5$.

83. $y'' = xy' - y^2$, $x_0 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $n = 5$.

84. $y'' = y'^2 + xy$, $x_0 = 1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $n = 4$.

85. $y'' = y'^2 + xy$, $x_0 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$, $n = 5$.

86. $y'' = y\cos y' + x$, $x_0 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{\pi}{3}$, $n = 5$.

87. $y'' = e^y \sin y'$, $x_0 = \pi$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$, $n = 5$.

Способом невизначених коефіцієнтів знайти три перші ненульові члени розвинення в ряд Маклорена розв’язку задачі Коші:

88. $y'' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

89. $y'' - xy = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

90. $xy'' + y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

91. $xy'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Способом невизначених коефіцієнтів знайти чотири перші ненульові члени розвинення в ряд Маклорена загального розв’язку диференціального рівняння:

92. $y'' - x^2 y = 0$.

93. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$.

Скільки членів розвинення функції $f(x)$ в ряд Маклорена треба взяти, щоб обчислити за допомогою цього ряду значення функції з точністю $\delta = 10^{-4}$?

94. $\cos 10^\circ$. **95.** $arctg\frac{1}{3}$. **96.** $\sqrt[3]{138}$. **97.** $e^{\frac{1}{4}}$. **98.** $\ln 2e$.

За допомогою відповідного розвинення функції в степеневий ряд обчислити її значення з вказаною точністю.

99. $\cos 18^\circ$, $\delta = 10^{-4}$. **100.** $\sqrt[4]{20}$, $\delta = 10^{-4}$. **101.** $\ln 6$, $\delta = 10^{-4}$.

102. $tg 9^\circ$, $\delta = 10^{-3}$. **103.** $\sqrt[4]{e}$, $\delta = 10^{-3}$. **104.** $\frac{1}{\sqrt[5]{35}}$, $\delta = 10^{-4}$.

105. $\sqrt[3]{500}$, $\delta = 10^{-5}$. **106.** $\sin 10^\circ$, $\delta = 10^{-5}$. **107.** $arctg\frac{\pi}{10}$, $\delta = 10^{-3}$.

108. $\arcsin\frac{1}{3}$, $\delta = 10^{-3}$.

За допомогою розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд обчислити з вказаною точністю значення інтеграла.

109. $\int_0^1 \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$, $\delta = 10^{-3}$. **110.** $\int_0^{2/3} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}}\,dx$, $\delta = 10^{-6}$.

111. $\int_0^1 \sqrt{e^{3x^2}}\,dx$, $\delta = 10^{-2}$. **112.** $\int_0^1 \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, $\delta = 10^{-3}$.

113. $\int_0^{0.3} \cos\frac{x^2}{4}\,dx$, $\delta = 10^{-4}$. **114.** $\int_0^{0.5} x\cos x^3\,dx$, $\delta = 10^{-3}$.

115. $\int_0^1 \sin x^2\,dx$, $\delta = 10^{-3}$. **116.** $\int_0^{3/5} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$, $\delta = 10^{-4}$.

117. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$, $\delta = 10^{-5}$. **118.** $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{x}\,dx$, $\delta = 10^{-3}$.

119. $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx$, $\delta = 10^{-3}$. **120.** $\int_0^{0.5} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx$, $\delta = 10^{-3}$.

В І Д П О В І Д І

1. $R=0, x=0$. **2.** $R=0, x=0$. **3.** $R=\infty, |x|<\infty$. **4.** $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, |x|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

5. $R=1, |x|<1$. **6.** $R=\infty, |x|<\infty$. **7.** $R=2, |x|<2$. **8.** $R=\dfrac{1}{\sqrt{e}}, |x|<\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

9. $R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}, |x|<\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **10.** $R=2, |x|<2$. **11.** $R=\sqrt[3]{5}, |x|<\sqrt[3]{5}$.

12. $R=\dfrac{3}{2}, |x+3|<\dfrac{3}{2}$. **13.** $R=\infty, |x|<\infty$. **14.** $|x+2|\le\dfrac{1}{16}$. **15.** $0\le x<2$.

16. $-10\le x<0$. **17.** $|x-1|\le 4$. **18.** $-1\le x<0$. **19.** $|x+1|<\sqrt[3]{2}$.

20. $[-1,1]$. **21.** $(-\infty,\infty)$. **22.** $x=0$. **23.** $[-1,1)$. **24.** $(-2,2)$. **25.** $[-2,2)$.

26. $(-1,1)$. **27.** $(-2,0)$. **28.** $(-2,2)$. **29.** $(2,4]$. **30.** $-\dfrac{11}{5}<x<-\dfrac{9}{5}$.

31. $$4+\ln 2\cdot(x-4)+\frac{1}{16}\ln 2(2\ln 2-1)(x-1)^2+$$
$$+\frac{4\ln^3 2-6\ln^2 2+3\ln 2}{384}(x-4)^3+\ldots.$$

32. $\ln 3+\dfrac{1}{3\cdot 32}(x-16)-\dfrac{23}{9\cdot 2048}(x-16)^2+\ldots.$

33. $$-\sin 1+\frac{1}{3}\cos 1\cdot(x+1)+\left(\frac{\sin 1}{9}-\frac{2}{9}\cos 1\right)\frac{(x+1)^2}{2}+$$
$$+\frac{\frac{1}{3}\cos 1-\frac{2}{9}\sin 1}{6}(x+1)^3+\ldots.$$

34. $e^{\sqrt{2}}\left[1-\dfrac{x+1}{2}+\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\dfrac{(x+1)^2}{4}+\ldots\right].$

35. $1+\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+\dfrac{5}{24}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^4+\ldots.$

36. $\dfrac{4}{\pi}-\dfrac{8}{\pi^2}(x-1)+\dfrac{4(\pi+4)}{\pi^3}(x-1)^2+\ldots.$ **37.** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^2}x+\dfrac{1}{2^3 3!}x^3+\dfrac{3}{2^3 5!}x^5+\ldots,$

$|x|<\pi$. **38.** $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6^2}x-\dfrac{4}{6^3 2!}x^2+\dfrac{3}{6^3 3!}x^3+\ldots, |x|<\sqrt{\ln^2 5+\pi^2}$.

39. $-\frac{1}{2!}x^2-\frac{2}{4!}x^4-\frac{16}{6!}x^6+\ldots,\ |x|<\frac{\pi}{2}$. **40.** $e\cdot\left(1+x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{13}{3!}x^3+\ldots\right),\ |x|<1$.

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3^n n},\ R=\sqrt[3]{3}$. **42.** $1-\frac{4}{3}x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^n\cdot 2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n n!}x^n,\ R=1$.

43. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n}}{3^{2n}(2n)!},\ R=\infty$. **44.** $e\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^{3n}}{n!},\ R=\infty$.

45. $2\cdot\left(x^5+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot 4^n\cdot\frac{x^{4n+5}}{2n+1}\right),\ R=1$. **46.** $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{4^{n+1}},\quad |x-3|<2$.

47. $e^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n!},\ |x|<\infty$.

48. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[-\frac{\sin 4}{(2n)!}(x+2)^{4n}+\frac{\cos 4}{(2n+1)!}(x+2)^{4n+2}\right],\ |x|<\infty$.

49. $3\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n(x-1)^n}{n\cdot 8^n},\ |x-1|<\frac{8}{5}$.

50. $\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+3)^{2n}}{n\cdot 4^n},\ |x+3|<2$. **51.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{n+2},\ |x|<1$.

52. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\ |x|<1$. **53.** $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n\cdot(n+1)},\ |x|<1$.

54. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1$. **55.** $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n,\ |x|<1$.

56. $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1$.

57. $arctg 2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{2n-1}}{2n-1},\ |x|<\frac{1}{4}$.

58. $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{4n+1}}{(2n+1)(4n+1)},\ |x|<1$.

59. $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{4n+1}}{4n+1},\ |x|<1$. **60.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2},\ |x|<1$.

61. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+4}}{(2n+4)n!}$, $|x|<\infty$. 62. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(2n)!}$, $x>0$.

63. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)n!}$, $|x|<\infty$. 66. -945. 67. 0. 68. 0. 69. $\frac{105}{16}$.

70. $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$. 71. $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)n!}$. 72. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+3}}{(n+2)n!}$. 73. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)n!}$.

74. $\tilde{y}(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{12}x^4+\ldots$. 75. $\tilde{y}(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+x^3+\frac{5}{4}x^4+\ldots$.

76. $\tilde{y}(x)=1+x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4+\ldots$. 77. $\tilde{y}(x)=x+x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots$.

78. $\tilde{y}(x)=2+\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}x^2+\frac{89}{24}x^3+\ldots$. 79. $\tilde{y}(x)=1+2x+7x^2+\frac{61}{3}x^3+\ldots$.

80. $\tilde{y}=2+\frac{1}{2}(x+1)+\frac{5}{2}(x+1)^2+\frac{15}{16}(x+1)^4+\frac{1}{8}(x+1)^5+\frac{1}{3}(x+1)^6+\ldots$.

81. $\tilde{y}(x)=1+x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{2}{4!}x^4+\frac{3}{5!}x^5+\ldots$.

82. $\tilde{y}(x)=2+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{8}x^4+\ldots$.

83. $\tilde{y}(x)=1+2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4+\ldots$.

84. $\tilde{y}=2+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3+\frac{1}{8}(x-1)^4+\ldots$.

85. $\tilde{y}(x)=4-2x-2x^2-2x^3+\frac{19}{6}x^4+\ldots$.

86. $\tilde{y}(x)=1+\frac{\pi}{3}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}+1\right)x^3+\frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x^4+\ldots$.

87. $\tilde{y}=1+\frac{\pi}{2}(x-\pi)+\frac{e}{2}(x-\pi)^2+\frac{e\pi}{12}(x-\pi)^3+\frac{1}{24}\left(\frac{e\pi^2}{4}+e^2-e^3\right)(x-\pi)^4+\ldots$.

88. $\tilde{y}(x)=1-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}x^6+\ldots$.

89. $\tilde{y}(x)=x+\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7+\ldots$.

90. $\tilde{y}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}x^4 + \dots$.

91. $\tilde{y}(x) = 1 - \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2}x^4 + \dots$.

92. $y = C_0\left(1 + \frac{x^4}{3} + \dots\right) + C_1\left(x + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \dots\right)$. **93.** $y = C_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2} \dots\right) + C_1 x$.

94. 2. **95.** 5. **96.** 3. **97.** 5. **98.** 4. **99.** 0.951. **100.** 2.115.

101. 1.7918. **102.** 0.158. **103.** 1.284. **104.** 0.4912. **105.** 7.93700.

106. 0.17364. **107.** 0.304. **108.** 0.340. **109.** 0.446. **110.** 0.662024.

111. 1.73. **112.** 0.878. **113.** 0.3000. **114.** 0.125. **115.** 0.310.

116. 0.6225. **117.** 0.73414. **118.** 0.507. **119.** 2.835. **120.** 0.481.

ЛІТЕРАТУРА

1. Апарина Л.В. Числовые и функциональные ряды. – СПб.: Лань, 2012. – 160 с.
2. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу / Под ред. В.А.Садовничего. – М.: Высш. шк., 2000. – 639 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – СПб.: Лань, 2008. – 736 с.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 608 с.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб. для вузов. Т.3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Дрофа, 2004. – 512 с.
6. Бугров Я.С, Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 304 с.
7. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. Кн. 2. Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы /Под ред. В.А. Садовничего. – М.: Высш. шк., 2000. – 712 с.
8. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – СПб.: Лань, 2002. – 416 с.
9. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн.: ТетраСистемс, 1999. – 640 с.
10. Данилов Ю.М., Журбенко Л.Н., Никонова Г.А., Нуриева С.Н. Математика – М.: ИНФРА-М, 2009. – 496 с.
11. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.
12. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович, В. А. Кудрявцев. – М.: Астрель, 2001. – 656 с.
13. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

14. Журбенко Л.Н., Никонова Г.А., Никонова Н.В., Нуриева С.Н., Дегтярева О.М. Математика в примерах и задачах. – М.: ИНФРА-М, 2009. – 373 с.

15. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Ч. II: – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 464 с.

16. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. – СПб.: Лань, 2008. – 240 с.

17. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. – М.: Дрофа, 2004. – 720 с.

18. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды: Учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 504 с.

19. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / Под ред. С.Н.Федина. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.

20. Ляшко С.И. и др. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Ч. 1. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2001. – 432 с.

21. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 2: Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 224 с.

22. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 335 с.

23. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2007. – 688 с.

24. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с.

25. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. Ч.2. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.

26. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

27. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 3: Учеб. пособие для втузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 576 с.

28. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. – Ростов н/Д.: Феникс, 2006. – 640 с.

29. Соловьев И.А., Шевелев В.В., Червяков А.В., Репин А.Ю. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. – СПб.: Лань, 2007. – 320 с.

30. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика в прикладах та задачах. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с.

31. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 672 с.

32. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – СПб.: Лань, 2009. – 800 с.

33. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов. Т. 2. – СПб.: Политехника, 2003. – 477 с.

34. Чубатюк В.М. Вища математика: Навч. посібник. – К.: ВД "Професіонал", 2006. – 432 с.

35. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. – СПб.: Лань, 2002. – 880 с.

36. Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.

37. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 304 с.

Навчальне видання

Копорулін Володимир Львович
Моссаковська Людмила Володимирівна

СТЕПЕНЕВІ РЯДИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчальний посібник

Тем. план 2012, поз. 102

Підписано до друку 29.10.2012. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 5,18. Умов. друк. арк. 5,11. Тираж 100 пр. Замовлення № 144.

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна,4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ