МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

РОБОЧА ПРОГРАМА,

методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Спеціальні розділи математики» для студентів напряму 6.050702 - електромеханіка

Затверджено
на засіданні Вченої ради
академії
Протокол № 15 від 27.12.10

Дніпропетровськ НМетАУ 2011

УДК 517(07)

Робоча програма, методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Спеціальні розділи математики» для студентів напряму 6.050702 – електромеханіка / Укл.: В.Л.Копорулін, Л.В.Моссаковська, П.Г.Хорошманенко. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2011. – 80 с.

Наведена робоча програма дисципліни «Спеціальні розділи математики», список рекомендованої літератури, основні теоретичні відомості та методичні вказівки до вивчення кожного з розділів програми, варіанти контрольних завдань.

Призначена для студентів напряму 6.050702 - електромеханіка заочної форми навчання.

Укладачі: В.Л.Копорулін, канд. техн. наук, доц.
Л.В.Моссаковська, ст. викл.
П.Г.Хорошманенко, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент Коноваленков В.С., канд. техн. наук, доц. (НМетАУ)

Підписано до друку 10.10.2011. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 4,70. Умов. друк. арк. 4,65. Тираж 100 пр. Замовлення № 151.

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ- 5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

ЗМІСТ

Спеціальні розділи вищої математики, до яких, зокрема, належать теорія функцій комплексної змінної, операційне числення, теорія ймовірностей, є однією з найважливіших складових теоретичних основ електротехніки. Їх вивчення вкрай важливе для фундаментальної фахової підготовки сучасного інженера-електрика.

Лекції і практичні заняття, які проводяться для студентів заочної форми навчання, мають переважно оглядовий характер. Їх мета – створити уяву щодо загальної схеми побудови даного розділу математики, ознайомити з основними теоретичними відомостями і методами розв'язання типових задач. Головною ж формою навчання студента-заочника є самостійна робота. Вивчення теоретичних положень доцільно супроводжувати самостійним розв'язанням відповідних задач і лише після вироблення достатніх практичних навичок приступати до виконання завдань контрольної роботи. Необхідні консультації протягом навчального семестру надаються викладачами академії згідно із затвердженим розкладом.

Дані методичні вказівки призначені насамперед для студентів-електромеханіків, але також можуть бути корисними усім, хто вивчає спеціальні розділи математики. Література, розділ 2 і додатки підготовлені В.Л.Копоруліним, П.Г.Хорошманенко написав робочу програму і розділ 1, розділ 3 написаний спільно В.Л.Копоруліним і Л.В.Моссаковською.

РОБОЧА ПРОГРАМА
дисципліни «Спеціальні розділи математики»

1. Теорія функцій комплексної змінної

1.1. *Диференціювання та інтегрування функцій комплексної змінної*

Поняття функції комплексної змінної. Границя , неперервність, диференційовність. Умови Коші-Рімана. Обчислення похідних. Інтегрування функції комплексної змінної. Інтеграли Коші та типу Коші.

1.2. *Ряди аналітичних функцій*

Ряди аналітичних функцій, їх властивості. Розвинення функцій в ряди Тейлора і Лорана.

1.3. *Лишки функцій*

Класифікація ізольованих особливих точок. Лишки функцій. Основна теорема про лишки. Обчислення інтегралів за допомогою лишків.

2. Операційне числення

2.1. *Перетворення Лапласа*

Перетворення Лапласа. Оригінал та зображення. Зображення деяких функцій.

2.2. *Властивості перетворення Лапласа*

Властивості перетворення Лапласа: лінійність, подібність, зсунення, загаювання. Згортка функцій. Зображення похідних.

2.3. *Розв'язання диференціальних рівнянь*

Розв'язання диференціальних рівнянь та систем за допомогою перетворення Лапласа.

3. Теорія ймовірностей

3.1. *Визначення ймовірності*

Подія, види випадкових подій. Класичне та статистичне визначення ймовірності. Геометрична ймовірність.

3.2. *Теореми теорії ймовірностей*

Теореми складання та множення ймовірностей. Формула повної ймовірності. Ймовірність гіпотез (формули Байєса).

3.3. *Повторення випробувань*

Повторення випробувань. Формула Бернуллі. Локальна і інтегральна теореми Лапласа. Формула Пуассона.

3.4. *Випадкові величини*

Випадкові величини. Закони розподілу, числові характеристики випадкових величин.

Розподіл годин за навчальним планом			
Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота	**Усього**
24	8	148	**180**
Контрольних робот: 1			
Підсумковий контроль: екзамен			

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1967. – 780 с.

2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 405с.

5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 479 с.

6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – Ч.2. – 416 с.

7. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

9. Мартыненко В.С. Операционное исчисление. – Киев.: Высшая школа, 1973. – 267 с.

10. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2-х ч. – К.: Техніка, 2000. – Ч.2. – 792 с.

11. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

12. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1974. – 320 с.

13. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. Учебное пособие для втузов / Под ред. Г.И.Кручковича. – М.: Высшая школа, 1970. – 512 с.

14. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы / Под ред. А.В.Ефимова. – М.: Наука, 1984. – 608 с.

15. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Болгов В.А., Ефимов А.В., Каракулин А.Ф. и др..; под ред. А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 368 с.

16. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов / Под ред. А.В.Ефимова. – М.: Наука, 1990. – 428 с.

1. ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

ДОВІДКОВІ ВІДОМОСТІ

Комплексні числа та дії над ними

Комплексним числом z зветься пара (a,b) дійсних чисел. Перша компонента a цієї пари називається ***дійсною частиною*** комплексного числа, а друга компонента b – ***уявною частиною*** (або коефіцієнтом при уявній частині) і позначаються: $a = \mathrm{Re}\, z$, $b = \mathrm{Im}\, z$.

Якщо $b = 0$, то $z = (a,0)$ є дійсним числом. При $a = 0$ $z = (0,b)$ – уявне число.

Комплексне число може бути подане у вигляді

$$z = a + bi,$$

де i – уявна одиниця, що визначається рівністю $i^2 = -1$ (***алгебраїчна форма*** запису комплексного числа)

Комплексне число $\bar{z} = a - bi$ називається ***спряженим*** до комплексного числа z.

Два комплексних числа $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ називаються ***рівними***, якщо $a_1 = a_2$ та $b_1 = b_2$.

Сума або різниця двох комплексних чисел є комплексне число.

$$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i, \qquad z_2 = a_2 + b_2 \cdot i,$$
$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) \cdot i.$$

Добуток комплексних чисел є комплексне число.

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = \left(a_1 a_2 - b_1 b_2\right) + \left(a_1 b_2 + a_2 b_1\right) i.$$

Добуток спряжених чисел – завжди число дійсне.

$$z \cdot \bar{z} = \left(a + b \cdot i\right)\left(a - b \cdot i\right) = a^2 + b^2 + ab \cdot i - ab \cdot i = a^2 + b^2.$$

Ділення комплексних чисел здійснюється за правилом:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{\left(a_1 + ib_1\right)\left(a_2 - ib_2\right)}{\left(a_2 + ib_2\right)\left(a_2 - ib_2\right)} =$$
$$= \frac{\left(a_1 a_2 + b_1 b_2\right) + \left(a_2 b_1 - a_1 b_2\right) i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{\left(a_1 a_2 + b_1 b_2\right)}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{\left(a_2 b_1 - a_1 b_2\right)}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Геометричне зображення комплексного числа.

Вісь ***Ox*** – дійсна вісь, вісь ***Oy*** – уявна вісь. Відповідно, числа, що лежать на осі ***Ox*** – дійсні, на осі ***Oy*** – уявні (рис.1.1).

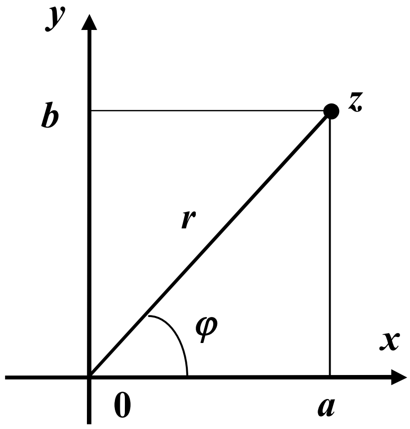

Рис. 1.1

Якщо визначимо

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi,$$

маємо ***тригонометричну форму*** запису комплексного числа:

$$z = r[\cos\varphi + i\sin\varphi], \qquad \text{де}$$

$$tg\varphi = \frac{b}{a}, \quad \varphi = arctg\frac{b}{a},$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Кут φ беремо таким, при якому $\sin\varphi$ має знак, однаковий з b:

$$\sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Добуток комплексних чисел у тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$
$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Ділення комплексних чисел у тригонометричній формі:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Піднесення числа z до n-го степеня:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Добування кореня n-го степеня з числа z:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\quad (k=0,\pm 1,\ldots).$$

Комплексне число також може бути подане у ***показниковій формі***

$$z=r\cdot e^{i\varphi}\ .$$

Дії над комплексними числами в показниковій формі:

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1},\qquad z_2=r_2e^{i\varphi_2},$$

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$z^n=r^ne^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{(\varphi+2\pi k)}{n}}.$$

Функції комплексної змінної. Похідна функції комплексної змінної

Якщо кожному комплексному числу $z = x + iy$ з області D відповідає певне комплексне число $w = u + iv$ з області G, то w називається ***функцією комплексної змінної z.***

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\quad w=u+iv,$$

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),\quad z=x+iy,$$

тобто дійсна частина u функції w і коефіцієнт v при уявній одиниці є функціями двох дійсних змінних x і y:

$$u(x,y)=Re\,f(z),$$

$$v(x,y)=Im\,f(z).$$

Якщо кожній змінній z відповідає одне значення w, то функція називається ***однозначною***, а якщо декілька значень, то ***многозначною***. Область D – це область визначення, а область G – область зміни функції.

Однозначна функція $w = f(z)$ має границю A при $z \to c$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що якщо $|z - c| < \delta$, то виконується нерівність $|f(z) - A| < \varepsilon$, де A також комплексне число, що називається границею функції комплексної змінної $f(z)$:

$$\lim_{z\to c} f(z) = A.$$

Якщо позначимо $c = x_0 + iy_0$; $A = U_0 + iV_0$, то

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(z) = U_0 + iV_0.$$

Функція $w = f(z)$ називається ***неперервною***, якщо при $z \to z_0$ виконується рівність:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Якщо функція неперервна в кожній точці області D, то вона є неперервною в усій області D.

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ y\to y_0}} [u(x,y) + iv(x,y)] = U(x_0, y_0) + iV(x_0, y_0).$$

Основні властивості границь функції комплексної змінної співпадають з властивостями границь функції дійсної змінної.

Область D, яка обмежена замкненою самонепересічною лінією, називається ***однозв'язною***. Якщо область D обмежена двома або більше замкненими непересічними лініями, то вона називається ***многозв'язною*** (відповідно двозв'язною, тризв'язною і т.д).

Для функцій комплексної змінної мають місце формули:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i},$$

$$shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$

$$sh(zi) = i\sin z, \quad ch(zi) = i\cos z,$$

$$Lnz = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...),$$

$$Arc\sin z = -iLn(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

$$Arc\cos z = -iLn(z + \sqrt{z_2 - 1}),$$

$$Arctgz = -\frac{i}{2} Ln\frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Нехай функція $f(z)$ визначена у деякому околі точки z. Тоді границя

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = w' = f'(z),$$

якщо вона існує, називається ***похідною від функції f(z) по комплексній змінній z.***

Функція, що має в кожній точці z похідну, називається ***диференційовною*** у цих точках.

Функція, що є однозначною і диференційовною у кожній точці області D, називається ***аналітичною функцією*** в області D.

<u>Теорема 1.1</u>. Якщо функція $w = u(x,y) + iv(x,y)$ – аналітична, то виконуються рівності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad - \quad \textbf{\textit{умови Коші-Рімана.}} \qquad \textbf{(1.1)}$$

Умови Коші-Рімана – це *необхідна умова диференційовності* функції. Якщо функція диференційовна, то виконується умова (1.1). Зворотне ствердження (достатнє) буде мати місце, якщо існують частинні похідні $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$ і вони неперервні.

Якщо виконується умова (1.1), то функція є диференційовною.

<u>Теорема 1.2.</u> Якщо функція $w = f(z)$ є диференційовною, то похідну можна подати в одній з рівнозначних форм:

$$w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} \ . \qquad \textbf{(1.2)}$$

Похідні елементарних функцій комплексних змінних, а також їх властивості мають такий же вигляд, як і для функцій дійсних змінних.

Якщо функція $w = f(z)$ аналітична в області D, то ця функція має неперервні похідні будь-якого порядку в цій області.

Інтеграли від функції комплексної змінної

Якщо $w = u(x,y) + iv\,(x,y)$, то інтеграл від функції комплексної змінної по кривій L обчислюється за формулою:

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy$$

і зводиться до двох криволінійних інтегралів дійсної змінної.

Якщо крива L кусково-гладка, то використовується формула

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{L_n} f(z)\,dz.$$

Якщо ***f*(*z*)** – аналітична функція в однозв'язній області ***D***, то криволінійний інтеграл від функції комплексної змінної не залежить від шляху інтегрування, а тільки визначається значенням початкової і кінцевої точок, і має місце ***формула Ньютона-Лейбніца***

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dZ = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)\ ,$$

де ***F*(*z*)** – *первісна* функції ***f*(*z*)**.

<u>Теорема 1.3 (Коші).</u> Для всякої аналітичної функції ***w* = *f*(*z*)** у деякій однозв'язній області інтеграл, узятий по будь-якому замкненому контуру **γ**, дорівнює 0:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Нехай задана аналітична функція ***W*** в області ***D***. Область ***D*** обмежена замкненим контуром γ_0 і в цій області знаходиться ***n*** непересічних контурів. Така область називається ***(n+1)-зв'язною*** областю і має місце формула :

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)dz$$

(***теорема Коші для складеного контуру***).

Зауваження 1. Позитивним напрямком обходу контуру беремо такий, при якому область залишається ліворуч. Зміна напрямку обходу контуру тягне зміну знака інтеграла:

$$\int_L f(z)dz = -\int_{L^{-1}} f(z)dz.$$

Зауваження 2. Так як визначення первісної та формула Ньютона-Лейбніца для функції дійсної змінної і аналітичної функції комплексної змінної співпадають, то інтеграли елементарних функцій комплексної змінної обчислюються за допомогою тих же формул і правил, що і для дійсної змінної.

Інтегральна формула Коші

Теорема 1.4. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній замкненій області D, то значення функції в будь-якій внутрішній точці $z = a$ цієї області обчислюється за формулою

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz,$$

де C – межовий контур області D.

Ця формула називається ***інтегральною формулою Коші***. Вона дозволяє обчислювати значення аналітичної функції у *внутрішній* точці області за її значеннями на кусково-гладкому контурі, що належить області аналітичності функції й охоплює точку. Якщо ж точка a лежить *поза* контуром C, то $\dfrac{f(z)}{z-a}$ є аналітичною функцією і інтеграл Коші дорівнює $\mathbf{0}$.

Теорема 1.5. Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і на її межі C, то одержимо формулу для обчислення похідної аналітичної функції будь-якого порядку

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,$$

якщо точка a лежить *усередині* контуру C.

Степеневі ряди. Ряди Тейлора і Маклорена

Теорема 1.6. Якщо функція $f(z)$ аналітична всередині кола радіуса R, то ця функція може бути розвинена в степеневий ряд за формулою:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad \textbf{(1.3)}$$

або

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots$$

Формула (1.3) називається ***розвиненням функції $f(z)$ в ряд Тейлора в околі точки z_0.***

Якщо $z_0 = 0$, то одержимо окремий випадок ряду Тейлора - ***ряд Маклорена***:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \ .$$

Розвинення деяких елементарних функцій в ряд Маклорена

$$\textbf{1. } e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} ,$$

$$a^z = e^{z \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} z^n ,$$

$$\textbf{2. } \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

$$\textbf{3. } \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} ,$$

$$\textbf{4. } shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} ,$$

$$\textbf{5. } chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\left(\textit{збігаються при} \ \ |z| < +\infty \right); \qquad \textbf{(1.4)}$$

$$\textbf{6. } \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} ,$$

$$\textbf{7. } (1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1)}{n!} z^n ,$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n ,$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n ,$$

$$6.\ arctgz = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + ... + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1},$$

$$7.\ \arcsin z = z + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7} + ... = z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\,z^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}$$

$$\left(\textit{збігаються при } |z| < 1\right).$$

Інші елементарні функції розкладаються у ряд аналогічно, як і відповідні функції дійсної змінної.

Нулі аналітичної функції

Нехай задана функція $w = f(z)$. Якщо $f(z_0) = 0$, то z_0 – нуль аналітичної функції. Нехай також

$$f(z) = C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + ... + C_n(z - z_0)^n + ...$$

Якщо $C_0 = C_1 = ... C_{n-1} = 0$, то $f(z) = C_n(z - z_0)^n + ...$.

В цьому випадку z_0 – це нуль n-ної кратності.

Правильні й особливі точки

Точка z_0 називається ***правильною точкою*** для функції $f(z)$, якщо існує окіл цієї точки, у якому існує степеневий ряд, що збігається до функції $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n.$$

Якщо функція може бути розвинена в такий степеневий ряд *усередині* околу т. z_0, то ця функція аналітична *у всіх* точках цього околу.

Якщо точка z_0 не є правильною, то це – ***особлива точка***.

Точка z_0 називається ***ізольованою особливою точкою***, якщо в деякому околі цієї точки функція $f(z)$ диференційовна і визначена в будь-якій точці цього околу, за винятком, можливо, самої точки z_0.

Розглянемо три типи ізольованої особливої точки:

1) Якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, то точка z_0 називається ***усувною особливою точкою***.

2) Якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, то точка називається ***полюсом***.

3) Якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не існує, то точка називається ***істотно особливою точкою***.

Ряд Лорана. Лишки функції

Нехай заданий ряд має вигляд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

де C_n – комплексні числа, а z – комплексна змінна.

Такий ряд зветься ***рядом Лорана***. Тут n може приймати як позитивні, так і негативні значення.

Коефіцієнт C_n обчислюється за формулою:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

де C_ρ - замкнений контур радіуса ρ: $\rho = |z - z_0|$.

Коефіцієнт C_{-1}, що обчислюється за формулою

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z) dz,$$

називається ***лишком функції*** $f(z)$ відносно точки z_0:

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z) dz.$$

Якщо z_0 – простий полюс функції $f(z)$, то для такої точки ряд Лорана має вигляд

$$f(z) = C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + .. + C_n(z - z_0)^n + \ldots + C_{-1}/(z - z_0),$$

і лишок функції у цій точці обчислюється наступним чином:

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Якщо точка z_0 – полюс кратності m, тоді розклад у ряд Лорана функції $f(z)$ в околі цієї точки набуває вигляду:

$$f(z) = C_0 + C_1(z - z_0) + \ldots + C_n(z - z_0)^n + \frac{C_{-1}}{z - z_0} +$$
$$+ \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m}.$$

Тоді маємо:

$$\operatorname{Re}s[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[f(z) \cdot (z - z_0)^m \right].$$

Якщо в області D, обмеженій контуром C, задана аналітична функція $f(z)$, за винятком скінченного числа ізольованих точок, то маємо можливість обчислити інтеграл за допомогою формули:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re}s[f(z), z_i].$$

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИВЧЕННЯ РОЗДІЛУ

Література: [1] гл. I, [2] гл. 3,4, [6] гл. VII, [8] гл. I, [10] гл. 3, § 2, [11] гл. I, II, IV-VII, [12] гл. 1-5, [13] гл. III, [15] гл. 11.

<u>Приклад 1.1.</u> Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за умовами: $v(x, y) = e^x \cos y, \quad f(0) = 1 + i$.

Розв'язання. Відомо, що функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ будуть дійсною і уявною частинами деякої аналітичної функції $f(z) = u + iv$ тоді і тільки тоді, коли вони обидві є *спряженими гармонійними* функціями, тобто такими, що задовольняють умовам Коші-Рімана (1.1) і *рівнянню Лапласа*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \qquad \textbf{(1.5)}$$

Тому спочатку перевіримо, чи справді задана функція v є гармонійною. Для цього знайдемо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -e^x \cos y.$$

Неважко бачити, що функція v задовольняє рівнянню (1.5), тобто вона є гармонійною і тому *може* бути уявною частиною аналітичної функції.

Відомо також, що для усякої функції u (або v), гармонійної в деякій однозв'язній області, можна знайти з точністю до сталого доданка спряжену з нею гармонійну функцію v (або u), тобто відновити аналітичну функцію $f(z) = u + iv$. Покажемо один зі способів такого відновлення.

З умов Коші-Рімана маємо: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -e^x \sin y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cos y$.

Проінтегруємо по x першу рівність: $u = \int \left(-e^x \sin y\right) dx = -e^x \sin y + C(y)$, де $C(y)$ – невідома поки що функція.

Підставимо знайдену функцію u у другу рівність і отримаємо рівняння

$$-e^x \cos y + C'(y) = -e^x \cos y,$$

з якого знаходимо $C'(y) = 0$. Отже, $C(y) = C^*$, де C^* - довільна стала.

Таким чином, $f(z) = u + iv$, тобто $f(z) = -e^x \sin y + C^* + i \cdot e^x \cos y$. З умови $f(0) = 1 + i$ випливає, що $0 + C^* + i = 1 + i$, звідки $C^* = 1$.

Остаточно маємо:

$$f(z) = -e^x \sin y + 1 + i \cdot e^x \cos y = 1 + i \cdot e^x (\cos y + i \sin y) = 1 + ie^z.$$

<u>Приклад 1.2.</u> Обчислити інтеграл від функції $f(z) = 3 - i + 2z$ по параболі $y = x^2$, яка з'єднує точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 + i$.

Розв'язання. Оскільки $z = x + iy$, то $f(z) = 3 + 2x + i \cdot (2y - 1)$. Таким чином, $u(x, y) = 3 + 2x, \quad v(x, y) = 2y - 1$. За умовою задачі $y = x^2$, тоді $dy = 2xdx$. При $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$ будемо мати

$$\int\limits_L (3 - i + 2z)dz = \int udx - vdy + i\int\limits_L vdx + udy =$$

$$= \int\limits_0^1 (3 + 2x)dx - \int\limits_0^1 (2y - 1)dy + i\left(\int\limits_0^1 \left(2x^2 - 1\right)dx + \int\limits_0^1 (3 + 2x)2xdx\right) =$$

$$= \left(3x + x^2 - y^2 + y\right)\Big|_0^1 + i\left(2\frac{x^3}{3} - x + 3x^2 + 4\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 4 - \frac{4}{3}i.$$

Приклад 1.3. Розвинути функцію $f(z)=\dfrac{1}{4-3z}$ в ряд Тейлора в околі точки $z=2$.

Розв'язання. Перетворимо функцію наступним чином:

$$f(z)=\frac{1}{4-3(2+z-2)}=\frac{1}{-2-3(z-2)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3}{2}(z-2)}.$$

Скористаємось розвиненням функції $\dfrac{1}{1+z}$ в ряд Маклорена (див. розвинення (1.4)) $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+...+(-1)^n z^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, у якому формально замінимо z на $\dfrac{3}{2}(z-2)$. Отримаємо:

$f(z)=\dfrac{1}{4-3z}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{3}{2}(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{2^{n+1}}(z-2)^n$. Цей ряд збігається, якщо $\left|\dfrac{3}{2}(z-2)\right|<1$ або $|z-2|<\dfrac{2}{3}$, тобто радіус збіжності ряда $R=\dfrac{2}{3}$.

Приклад 1.4. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin 2z}{(z-\pi/4)}dz$.

Розв'язання. $f(z)=\sin 2z;\quad a=\dfrac{\pi}{4},\quad a\in|z|=2;$

$$\int_{|z|=2}\frac{\sin 2z}{z-\pi/4}dz=2\pi i\ f(a)=2\pi i\cdot\sin\frac{\pi}{2}=2\pi i=2\pi i.$$

Приклад 1.5. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z}{(z-0{,}5)^3}dz$.

Розв'язання. $f^{(n)}(a)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,$

$f(z)=e^z;\quad a=0{,}5\quad n=2;,\quad f''(z)=e^z.$

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-0{,}5)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{2\pi i}{2}\cdot(e^{0{,}5}) = \sqrt{e}\,\pi i.$$

Приклад 1.6. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz$ за допомогою лишків.

Розв'язання. В області $|z|\le 4$ підінтегральна функція аналітична всюди, окрім точок $z=0$ й $z=-1$. За теоремою Коші про лишки запишемо

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}\, f(0) + \mathrm{Res}\, f(-1)\right].$$

Точка $z=0$ є усувною особливою точкою, оскільки

$\lim\limits_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z} \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{z+1} = 1$. Тому $\mathrm{Res}\, f(0) = 0$.

Точка $z=-1$ є полюсом першого порядку, тому

$$\mathrm{Res}\, f(-1) = \lim\limits_{z\to -1} \frac{e^z-1}{z(z+1)}(z+1) = \lim\limits_{z\to -1} \frac{e^z-1}{z} = \frac{e^{-1}-1}{-1} = 1-e^{-1}.$$

Отже, $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz = 2\pi i\left(1-e^{-1}\right)$.

2. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

ДОВІДКОВІ ВІДОМОСТІ

Функція $f(t)$ називається ***оригіналом***, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

2. $f(t)$ – кусково-неперервна при $t \geq 0$, тобто вона неперервна або має точки розриву 1-го роду, причому на кожному скінченному проміжку осі t таких точок тільки скінченна множина; $f(0) = f(+0)$.

3. Існують такі числа $M > 0$ *й* $s > 0$, що для усіх $t > 0$ виконується нерівність $|f(t)| < M \cdot e^{st}$, тобто при зростанні t функція $f(t)$ може зростати не швидше деякої експоненціальної функції e^{st}. Число $s_0 \geq 0$, таке, що подана нерівність виконується при $s > s_0$ і не виконується при $s < s_0$, називається ***показником зростання*** функції $f(t)$.

Зображенням за Лапласом (далі просто ***зображення***) оригінала $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, така, що визначається інтегральним перетворенням

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \,, \tag{2.1}$$

яке називається ***перетворенням*** *або* ***оператором Лапласа****.*

Основні властивості перетворення Лапласа:

1. ***Лінійність***

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(p). \tag{2.2}$$

2. ***Подібність***

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (\forall \alpha > 0). \tag{2.3}$$

3. ***Зсунення***

$$e^{-\alpha t} f(t) \to F(p + \alpha) \quad (\forall \alpha). \tag{2.4}$$

4. ***Загаювання***

$$f(t-t_0)\to e^{-t_0 p}F(p) \quad (\forall t_0>0). \tag{2.5}$$

5. ***Диференціювання оригіналу***

$$f(t)\to F(p),$$

$$f'(t)\to pF(p)-f(0),$$

$$f''(t)\to p^2F(p)-p\,f(0)-f'(0),$$

$$f'''(t)\to p^3F(p)-p^2f(0)-p\,f'(0)-f''(0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(t)\to p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n}p^{n-k}f^{(k-1)}(0), \tag{2.6}$$

$$\text{де} \quad f^{(i)}(0)=\lim_{t\to 0+0}f^{(i)}(t) \quad (i=0,1,\dots,n-1).$$

6. ***Інтегрування оригіналу***

$$\int_0^t f(\tau)d\tau\to\frac{F(p)}{p}. \tag{2.7}$$

7. ***Диференціювання зображення***

$$F(p)\leftarrow f(t),$$

$$F'(p)\leftarrow -t\cdot f(t),$$

$$F''(p)\leftarrow t^2f(t),$$

$$F'''(p)\leftarrow -t^3f(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F^{(n)}(p)\leftarrow(-1)^nt^nf(t). \tag{2.8}$$

8. ***Інтегрування зображення***

$$\int_p^{\infty}F(q)dq\leftarrow\frac{f(t)}{t}. \tag{2.9}$$

9. ***Множення зображень (теорема Бореля)***

$$f(t)*g(t)\to F(p)\cdot G(p), \tag{2.10}$$

де $f*g=g*f=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$ ***- згортка оригіналів.***

Таблиця деяких основних зображень наведена у додатку 2 (більш докладні таблиці можна знайти у відповідній літературі).

Обернене перетворення Лапласа (теорема обернення). Якщо функція $f(t)$ - оригінал з показником зростання s_0 й $F(p)$ - її зображення, то у будь-якій точці неперервності $f(t)$ виражається через $F(p)$ за формулою

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp, \qquad (2.11)$$

де інтеграл береться по будь-якій прямій $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і розуміється як *головне значення*

$$\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{s-iR}^{s+iR} e^{pt}F(p)\,dp .$$

У точках розриву $\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp = \frac{1}{2}\left[f(t-0)+f(t+0)\right]$.

Формула (2.11) називається ***формулою обернення Рімана-Мелліна*** і визначає *обернене перетворення Лапласа.*

Теорема обернення має ***наслідки***, які формулюються у вигляді наступних теорем.

Перша теорема розкладання. Якщо функція $F(p)$ аналітична в нескінченно віддаленій точці, $F(\infty)=0$ і в деякому околі цієї точки її розвинення в ряд за степенями $1/p$ має вигляд

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}},$$

то функція $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\frac{t^n}{n!}$ є оригіналом, що відповідає зображенню $F(p)$.

Друга теорема розкладання. Якщо зображення $F(p)$ є однозначною функцією й має лише скінченне число полюсів $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$, що лежать у скінченній частині площини, то відповідний оригінал $f(t)$ дорівнює сумі лишків функції $e^{pt}F(p)$, що обчислені в *усіх* полюсах p_k функції $F(p)$, тобто

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} res\left\{e^{pt}F(p)\right\}. \qquad (2.12)$$

Особливе значення для практики має обернене перетворення дробово-раціональних функцій, тобто функцій вигляду $F(p)=\dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, де $P_m(p)$ й $Q_n(p)$ – многочлени степенів m й n відповідно $(n>m)$, p_1, p_2, …, p_r – корені многочлена $Q_n(p)$ з кратностями $l_1, l_2, \ldots, l_r$, де $l_1+l_2+\ldots+l_r=n$.

Застосування формули для обчислення лишку функції $\varphi(z)$ у полюсі z_0 порядку n

$$res\varphi(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left\{(z-z_0)^n\varphi(z)\right\}$$

перетворює (2.12) до вигляду

$$f(t)=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{(l_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{l_k-1}}{dp^{l_k-1}}\left\{(p-p_k)^{l_k}e^{pt}F(p)\right\}, \qquad \textbf{(2.13)}$$

де підсумовування виконується по *усіх* полюсах p_k зображення $F(p)$, тобто по *усіх* нулях многочлена $Q_n(p)$.

Якщо *усі* полюси p_k *прості*, то формула (2.13) спрощується:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{r}\lim_{p\to p_k}\left\{(p-p_k)\,e^{pt}F(p)\right\}. \qquad \textbf{(2.14)}$$

Якщо *усі коефіцієнти* многочленів $P_m(p)$ й $Q_n(p)$ – *дійсні числа*, то у правій частині (2.13) корисно об'єднати доданки, що відносяться до взаємно спряжених комплексних коренів: сума кожної пари таких членів дорівнює подвоєній дійсній частині кожного з них.

У *частинному випадку*, коли *усі* корені p_1, p_2, …, p_n многочлена $Q_n(p)$ *прості*, на підставі формули для обчислення лишку відносно полюса першого порядку отримаємо

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}\,e^{p_k t}. \qquad \textbf{(2.15)}$$

На практиці при відшуканні оригіналу не дуже складного дробово-раціонального зображення (особливо, якщо корені знаменника прості) досить розкласти заданий дріб у суму найпростіших раціональних дробів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів, відшукати оригінали, що відповідають кожному з них (за таблицею, із застосуванням тотожних перетворень) і на підставі теореми лінійності записати шуканий оригінал.

Розв’язання задачі Коші для звичайного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(t), \tag{2.16}$$

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_0',\ \ldots,\ \ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}\ , \tag{2.17}$$

де коефіцієнти рівняння $a_1, a_2, ..., a_n$ й початкові дані $x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ – задані числа, $f(t)$ – задана функція (оригінал), $x = x(t)$ – невідома функція, операційним методом полягає у наступному:

1. Переходять від функцій $x(t)$ й $f(t)$ до відповідних оригіналів $X(p)$ й $F(p)$, причому до $X(p)$ – цілковито формально, а до $F(p)$ – у відповідності з фактичним виразом $f(t)$.
2. Застосовують теорему про диференціювання оригіналу і теорему лінійності, завдяки чому переходять від *диференціального* рівняння (2.16) до *лінійного алгебраїчного* рівняння
$$L(p)\cdot X(p)+Q(p)=F(p), \tag{2.18}$$
яке називається *зображуючим* або *операторним* рівнянням. Тут
$L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n$ - так званий *характеристичний многочлен* рівняння (2.16), а $Q(p)$ - деякий многочлен степеня $n-1$, коефіцієнти якого залежать від початкових даних.
3. Розв’язують рівняння (2.18) відносно $X(p)$:
$$X(p)=\frac{F(p)-Q(p)}{L(p)}. \tag{2.19}$$
4. Від знайденого зображення $X(p)$ будь-яким способом здійснюють зворотний перехід до оригіналу $x(t)$, який і буде розв’язком задачі Коші.

Зауваження. При *нульових* початкових умовах, тобто при $x_0=x_0'=\ldots=x_0^{(n-1)}=0$ многочлен $Q(p)$ тотожно дорівнює нулю і рівняння (2.18) набуває вигляду

$$L(p)\cdot X(p)=F(p),$$

звідки

$$X(p)=\frac{F(p)}{L(p)}. \tag{2.20}$$

Функція $Z(p)=\dfrac{1}{L(p)}$ називається ***передавальною функцією***. Отже, $X(p)=Z(p)\cdot F(p)$. Якщо $F(p)$ розуміти як *зображення збурення* (вхідного сигналу), а $X(p)$ – як *зображення відгуку (реакції)* системи на це збурення, то зображення відгуку виходить з зображення збурення шляхом простого множення на передавальну функцію. Це особливо зручно, коли реакція деякої системи є вхідним сигналом для іншої системи і т.д.

Розв'язання систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами операційним методом принципово не відрізняється від розв'язання одного рівняння. Відміна полягає лише в тому, що замість одного операторного рівняння отримаємо систему таких рівнянь. Кожне з них буде лінійним алгебраїчним відносно зображень оригіналів, що утворюють розв'язок задачі, тому ці зображення у багатьох випадках доцільно знаходити за формулами Крамера.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИВЧЕННЯ РОЗДІЛУ

Література: [1] гл. VIII, [2] гл. 4.4, [6] гл.VIII, [7] гл. 1-3, [8] гл. VI, [9] гл. I-IV, [10] гл. 2, [12] гл. 8, § 1, 3, [13] гл. VI, [15] гл. 13.

<u>Приклад 2.1.</u> Знайти зображення функції $f(t)=\begin{cases}0, & t<3,\\ h, & 3\le t<5,\\ 0, & t\ge 5.\end{cases}$ (рис.2.1)

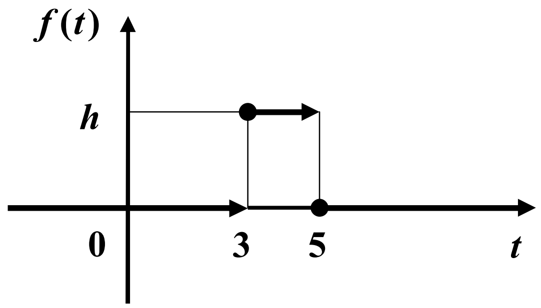

Рис. 2.1

Розв'язання. Задана функція може бути зображена у вигляді

$$f(t)=h\cdot\eta(t-3)-h\cdot\eta(t-5)=h[\eta(t-3)-\eta(t-5)].$$

Тоді за властивістю лінійності (2.2) і теоремою загаювання (2.5) маємо

$$f(t) \to h\left(e^{-3t}\frac{1}{p} - e^{-5t}\frac{1}{p}\right) = h\frac{e^{-3t}}{p}\left(1 - e^{-2t}\right).$$

Приклад 2.2. Знайти зображення інтеграла $\int\limits_0^t (u - \cos u)du$.

Розв'язання. Оскільки $f(t) = t - \cos t$ є оригіналом і $t - \cos t \to \frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2+1}$, то за теоремою про інтегрування оригіналу (2.7)

$$\int\limits_0^t (u - \cos u)du \to \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2+1}\right) = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Приклад 2.3. Знайти зображення функцій $t^n\left(n \in N\right)$, $t\sin at$, $t\cos at$.

Розв'язання. Оскільки $1 \to \frac{1}{p}$, то за (2.8) маємо $-t \cdot 1 \to -\frac{1}{p^2}$. Далі знаходимо $-t^2 \to \left(\frac{1}{p^2}\right)'_p = -\frac{2}{p^3}$, тобто $t^2 \to \frac{2!}{p^3}$. Продовжуючи диференціювання, отримаємо

$$t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Оскільки $\sin at \to \frac{a}{p^2 + a^2}$, то $\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)'_p \to -t\sin at$,

тобто $-\frac{2ap}{\left(p^2+a^2\right)^2} \leftarrow -t\sin at$, звідки $t\sin at \to \frac{2ap}{\left(p^2+a^2\right)^2}$.

Приклад 2.4. Знайти зображення функцій $f(t) = \frac{\sin at}{t}$ й $\int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{t\to 0+0}\dfrac{\sin at}{t}=a$ (скінченна границя), то $f(t)=\dfrac{\sin at}{t}$ є оригіналом. Маючи на увазі співвідношення $\sin at \to \dfrac{a}{p^2+a^2}$, на підставі теореми про інтегрування зображення (2.9) маємо

$$\frac{\sin at}{t}\to\int_p^\infty\frac{a}{q^2+a^2}dq=a\cdot\frac{1}{a}\cdot\lim_{B\to\infty} arctg\frac{q}{a}\bigg|_p^B=\frac{\pi}{2}-arctg\frac{p}{a}.$$

Приклад 2.5. Знайти оригінал, що відповідає зображенню $F(p)=\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}$.

Розв'язання. Оскільки $F(p)=\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)}\cdot\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)}$ й

$\dfrac{1}{p^2+a^2}\leftarrow\dfrac{1}{a}\cdot\sin at$, то за теоремою Бореля (2.10)

$$F(p)\leftarrow\int_0^t\frac{1}{a}\cdot\sin a\tau\cdot\frac{1}{a}\cdot\sin a(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2a^2}\cdot\int_0^t\left(\cos a(2\tau-t)-\cos at\right)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{2a}\cdot\sin a(2\tau-t)\bigg|_0^t-\cos at\cdot\tau\bigg|_0^t\right)=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\sin at-t\cos at\right)=$$

$=\dfrac{1}{2a^3}\left(\sin at-a\,t\cdot\cos at\right)$, тобто $\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}\leftarrow\dfrac{1}{2a^3}\left(\sin at-a\,t\cdot\cos at\right)$.

Приклад 2.6. Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p)=\frac{p+1}{(p-1)(p+3)}.$$

*Розв'язання***.** Розглянемо два способи.

*Перший спосіб***.** Розкладемо дріб $\dfrac{p+1}{(p-1)(p+3)}$ у суму найпростіших дробів:

$$F(p)=\frac{p+1}{(p-1)(p+3)}=\frac{1}{2(p-1)}+\frac{1}{2(p+3)}.$$

За таблицею оригіналів і зображень на підставі теореми лінійності знаходимо:

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

Другий спосіб. У заданому дробу $P_m(p)=p+1,\quad Q_n(p)=(p-1)(p+3)$. Оскільки обидва корені знаменника $p_1=1$ й $p_2=-3$ прості, то за формулою (2.14), таблицею оригіналів та зображень і теоремою лінійності маємо:

$$f(t)=\lim_{p\to 1}\left((p-1)\frac{e^{pt}(p+1)}{(p-1)(p+3)}\right)+\lim_{p\to -3}\left((p+3)\frac{e^{pt}(p+1)}{(p-1)(p+3)}\right)=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

В той же час, оскільки $Q_n'(p)=2(p+1)$, то за формулою (2.15) маємо той самий результат:

$$f(t)=\frac{p+1}{2(p+1)}e^{pt}\bigg|_{p=1}+\frac{p+1}{2(p+1)}e^{pt}\bigg|_{p=-3}=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

Приклад 2.7. Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}.$$

*Розв'язання***.** Розкладемо дріб $\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}$ у суму найпростіших дробів:

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}=-\frac{1}{2(p+1)^3}-\frac{1}{4(p+1)^2}-\frac{1}{8(p+1)}+\frac{1}{8(p-1)}.$$

За таблицею оригіналів і зображень на підставі теореми лінійності знаходимо:

$$f(t)=-\frac{1}{4}t^2e^{-t}-\frac{1}{4}t\,e^{-t}-\frac{1}{8}e^{-t}+\frac{1}{8}e^{t}.$$

Приклад 2.8. Знайти розв'язок диференціального рівняння $x''+4x'+4x=e^{-2t}(\cos t+2\sin t)$, що задовольняє початковим умовам $x(0)=-1$, $x'(0)=1$.

Розв'язання. Нехай $x(t)\to X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу (2.6), з урахуванням початкових умов маємо $x'(t)\to pX(p)+1$, $x''(t)\to p^2X(p)+p-1$. За таблицею оригіналів і зображень і теоремою лінійності $\cos t + 2\sin t \to \frac{p}{p^2+1} + 2\cdot\frac{1}{p^2+1} = \frac{p+2}{p^2+1}$. За теоремою зсунення (2.4) $e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) \to \frac{p+4}{(p+2)^2+1}$. Підставивши усі отримані вирази до заданого рівняння, отримаємо операторне рівняння (2.18) у вигляді $p^2X(p) + p - 1 + 4pX(p) + 4 + 4X(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2+1}$ або, після перетворень, $(p^2+4p+4)X(p) + p + 3 = \frac{p+4}{(p+2)^2+1}$. Знайдемо звідси зображення розв'язку: $X(p) = -\frac{p^3+7p^2+16p+11}{\left[(p+2)^2+1\right](p+2)^2}$. Розклавши дріб у суму найпростіших дробів, отримаємо:

$$X(p) = -\frac{p+4}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2} = -\frac{p+2}{(p+2)^2+1} - 2\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2}.$$

Оскільки $\frac{p}{p^2+1} \leftarrow \cos t$, $\frac{1}{p^2+1} \leftarrow \sin t$, $\frac{1}{p^2} \leftarrow t$, то за теоремами зсунення і лінійності остаточно маємо розв'язок задачі Коші у вигляді $\tilde{x}(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t)$.

<u>Приклад 2.9.</u> Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} - x - 2y + 9t = 0 \\ \dot{y} - 2x - y = 4e^t \end{cases}, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 2.$$

Розв'язання. Позначимо $x(t) \to X(p)$, $y(t) \to Y(p)$. Оскільки $t \to \frac{1}{p^2}$, $e^t \to \frac{1}{p-1}$, то з урахуванням початкових умов за теоремою про диференціювання оригіналу (2.6) і теоремою лінійності отримаємо наступну систему операторних рівнянь відносно зображень $X(p)$ й $Y(p)$:

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 2Y(p) = 1 - \frac{9}{p^2} \\ -2X(p) + (p-1)Y(p) = 2 + \frac{4}{p-1} \end{cases}.$$

Знайдемо $X(p)$ й $Y(p)$ за формулами Крамера: $X(p)=\frac{\Delta_X}{\Delta}$, $Y(p)=\frac{\Delta_Y}{\Delta}$,

де $$\Delta=\begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix}=p^2-2p-3=(p-3)(p+1),$$

$$\Delta_X=\begin{vmatrix} \frac{p^2-9}{p^2} & -2 \\ \frac{2p+2}{p-1} & p-1 \end{vmatrix}=\frac{p^4+2p^3-4p^2+18p-9}{p^2(p-1)},$$

$$\Delta_Y=\begin{vmatrix} p-1 & \frac{p^2-9}{p^2} \\ -2 & \frac{2p+2}{p-1} \end{vmatrix}=\frac{2p^3+4p^2-18}{p^2}.$$

Отже, $X(p)=\frac{p^4+2p^3-4p^2+18p-9}{p^2(p-1)(p-3)(p+1)}$, $Y(p)=\frac{2p^3+4p^2-18}{p^2(p-3)(p+1)}$.

Розкладемо зображення у суму найпростіших дробів, користуючись другою теоремою розкладання:

$$X(p)=\frac{5}{p}-\frac{3}{p^2}-\frac{2}{p-1}+\frac{2}{p-3}-\frac{4}{p+1},\quad Y(p)=-\frac{4}{p}+\frac{6}{p^2}+\frac{2}{p-3}+\frac{4}{p+1}.$$

Відновимо оригінали, застосувавши таблицю і теорему лінійності. Отже, розв'язок задачі має вигляд:

$$x(t)=5-3t-2e^t+2e^{3t}-4e^{-t},\quad y(t)=-4+6t+2e^{3t}+4e^{-t}.$$

3. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ДОВІДКОВІ ВІДОМОСТІ

Елементи комбінаторики

Комбінаторика – це розділ елементарної математики, у якому вивчаються так звані ***комбінації***, тобто об’єднання елементів скінченних множин. Розрізняють три типи комбінацій: *переставлення, розміщення і сполучення*.

Переставленнями називаються упорядковані множини, що складаються з одних і тих самих елементів, але відрізняються їх порядком. Число P_n переставлень з n елементів обчислюється за формулою

$$P_n = n!$$

Якщо серед n елементів є однакові, тобто такі, що повторюються $k_1, k_2, ..., k_m$ разів, то число ***переставлень з повтореннями*** обчислюється за формулою

$$\overline{P}_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_m!},$$

де $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$.

Розміщеннями з n по k називаються упорядковані підмножини з k елементів множини, що складається з n елементів. Вони відрізняються одна від одної або самими елементами, або їх порядком. Число A_n^k розміщень з n по k обчислюється за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Якщо серед n елементів є такі, що повторюються , то число ***розміщень з повтореннями*** обчислюється за формулою

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Сполученнями з n по k називаються довільні, тобто неупорядковані, підмножини з k елементів множини, що складається з n елементів. Вони відрізняються одна від одної лише елементами, що їх утворюють. Число C_n^k сполучень з n по k обчислюється за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Якщо елементи можуть повторюватись, то число ***сполучень з повтореннями*** обчислюється за формулою

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Загальні правила комбінаторики.

1. Якщо деяку дію A можна здійснити m способами, а дію B можна здійснити n *іншими* способами, то *одну* з дій A ***або*** B можна здійснити $m+n$ способами.
2. Якщо деяку дію A можна здійснити m способами, а дію B можна здійснити n способами (незалежно від B), то *обидві* дії A ***й*** B можна здійснити $m \cdot n$ способами.

I. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

Основні означення

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності масових випадкових явищ (подій).

Спробою або ***випробуванням*** *(дослідом, експериментом)* в теорії ймовірностей називається створення певної сукупності умов, причому це може бути здійснено необмежене число разів.

Подією називається явище, яке може здійснюватись або не здійснюватись у даному випробуванні.

Вірогідною називається подія U, яка у даному випробуванні неодмінно відбудеться.

Неможливою називається подія V, яка у даному випробуванні напевно не може відбутися.

Випадковою називається подія, яка у даному випробуванні може відбутися або не відбутися.

Несумісними називаються події, поява однієї з яких в даному випробуванні виключає можливість появи іншої. Декілька подій називаються ***парами несумісними***, якщо кожні дві з них несумісні.

Сумісними називаються події, поява однієї з яких в даному випробуванні *не виключає* можливість появи іншої.

Говорять, що декілька подій в даному випробуванні утворюють ***повну групу***, якщо внаслідок випробування обов'язково має з'явитися *хоча б одна* з них. У частинному випадку, коли ці події *парами несумісні*, внаслідок випробування з'явиться *одна і тільки одна* з них. Такі події називають ***єдино можливими*** в даному випробуванні. Таким чином, *усі* єдино можливі події даного випробування, тобто усі можливі його наслідки, утворюють повну групу парами несумісних подій.

Протилежними називають дві події, що утворюють повну групу. Вони є єдино можливими, а тому несумісні. Подія, протилежна події $\boldsymbol{A}$, позначається $\overline{\boldsymbol{A}}$. Її поява означає, що подія $\boldsymbol{A}$ не відбулася.

Рівноможливими називаються події, якщо у даному випробуванні поява однієї з них не більш можлива, ніж поява іншої.

Незалежними називаються події, ступінь можливості появи однієї з яких в даному випробуванні не залежить від того, відбулася інша подія чи ні. Декілька подій називаються ***парами незалежними***, якщо кожні дві з них незалежні. Декілька подій називаються ***незалежними у сукупності***, якщо кожна з подій і будь-яка комбінація решти з них (не обов'язково усіх) є події незалежні.

Залежними називаються події, ступінь можливості появи однієї з яких в даному випробуванні залежить від того, відбулася інша подія чи ні.

Сумою $\boldsymbol{A+B}$ подій $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ називається подія, яка полягає у настанні *хоча б однієї* з них.

Добутком $\boldsymbol{AB}$ подій $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ називається подія, яка полягає у сумісному настанні *обох* подій одночасно.

Сприятливим називається можливий наслідок досліду, у якому відбувається подія $\boldsymbol{A}$.

Імовірність $\boldsymbol{P(A)}$ випадкової події $\boldsymbol{A}$ – це числова міра об'єктивної можливості появи даної події в результаті досліду.

Класична імовірність. Якщо події утворюють повну групу, несумісні і рівноможливі, то такі події називають ***випадками*** або ***шансами*** і говорять, що має місце *класична схема* теорії ймовірностей або *схема випадків*. Випадок називається *сприятливим* деякій події, якщо його поява тягне за собою появу цієї події. У рамках класичної схеми можна точно підрахувати імовірність події, не проводячи випробувань: якщо спроба зводиться до схеми випадків, то ***імовірність*** $\boldsymbol{P(A)}$ події $\boldsymbol{A}$ обчислюється як відношення числа $\boldsymbol{m}$ випадків, сприятливих цій події, до загального числа $\boldsymbol{n}$ усіх можливих випадків

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}}. \qquad \mathbf{(3.1)}$$

Ця формула називається *класичною* або формулою для *безпосереднього підрахунку* ймовірностей, а обчислену за нею ймовірність називають ***класичною ймовірністю***.

Оскільки взагалі $\boldsymbol{n \geq m}$, для неможливої події $\boldsymbol{m = 0}$, а для вірогідної $\boldsymbol{m = n}$, то, як це випливає з (3.1), для будь-якої події $\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$.

Статистична імовірність. *Відносною частотою* випадкової події $\boldsymbol{A}$ у даній серії $\boldsymbol{n}$ випробувань називається відношення числа $\boldsymbol{m}$ появ події $\boldsymbol{A}$ до загального числа проведених випробувань: $\boldsymbol{W(A) = \frac{m}{n}}$. При невеликій кількості випробувань відносна частота має, взагалі кажучи, випадковий характер. Із збільшенням числа випробувань $\boldsymbol{W(A)}$ починає стабілізуватися навколо певного сталого числа, яке називають ***статистичною імовірністю***. Експериментально доведено, що $\boldsymbol{W(A) \to P(A)}$ при $\boldsymbol{n \to \infty}$. Властивість стійкості частоти є однією з найбільш характерних закономірностей, що спостерігаються у випадкових явищах.

Геометрична імовірність. Поняття класичної імовірності незастосовне до випробувань з нескінченною кількістю наслідків. В цьому випадку користуються поняттям ***геометричної імовірності***, під якою розуміють відношення *геометричної міри* (тобто довжини, площі або об'єму) частини $\boldsymbol{\Omega_A}$ (попадання у яку сприяє події A) області $\boldsymbol{\Omega}$ до відповідної міри усієї області, а саме

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{\Omega_A}{\Omega}}. \qquad \mathbf{(3.2)}$$

Теореми і формули

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Імовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто

$$\boldsymbol{P(A+B) = P(A) + P(B)}. \qquad \mathbf{(3.3)}$$

Наслідки. 1. Якщо події $\boldsymbol{A_1, A_2, ..., A_n}$ *парами несумісні*, то

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n), \qquad (3.4)$$

2. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють повну групу, то

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1. \qquad (3.5)$$

3. Сума ймовірностей протилежних подій $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Теорема множення ймовірностей незалежних подій. Імовірність сумісної появи двох незалежних подій A й B дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (3.6)$$

Наслідок. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ незалежні у сукупності, то імовірність їх сумісної появи

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot .... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n). \qquad (3.7)$$

Імовірність появи *хоча б однієї* з цих подій

$$P = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot ... \cdot P(\overline{A}_n). \qquad (3.8)$$

У частинному випадку *рівноможливих* подій, коли

$$P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_n) = p,$$

маємо

$$P = 1 - q^n, \text{ де } q = 1 - p. \qquad (3.9)$$

Теорема множення ймовірностей залежних подій. Імовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності події однієї з них на імовірність іншої, обчислену за припущенням, що перша подія вже відбулася (***умовна імовірність***), тобто

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) \quad \text{або} \quad P(BA) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (3.10)$$

Наслідки. 1. $P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

2. Імовірність сумісної появи *декількох* залежних подій дорівнює добутку ймовірності події однієї з них на умовні імовірності усіх інших, причому імовірність кожної наступної події обчислюється за припущенням, що *усі попередні* події *вже відбулися*, тобто

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot .... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot ... \cdot P_{A_1 A_2 A_3 ... A_{n-1}}(A_n).$$

Зокрема, для *трьох* залежних подій A, B й C будемо мати

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C). \qquad (3.11)$$

Теорема додавання ймовірностей сумісних подій. Імовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їх сумісної появи, тобто

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \quad (3.12)$$

Зауваження. 1. Якщо події A й B *незалежні*, то має місце (3.6) і тоді

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B). \quad (3.13)$$

2. Якщо події A й B *залежні*, то має місце (3.10) і тоді

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P_A(B). \quad (3.14)$$

3. Якщо події A й B *несумісні*, то їх сумісна поява є неможливою подією, тобто $AB=V$. Тоді $P(AB)=0$ і маємо (3.3), отже, теорема справедлива як для сумісних, так і для несумісних подій.

4. Теорема може бути узагальнена на будь-яке скінченне число сумісних подій. У випадку *трьох* подій, наприклад, маємо

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-$$
$$-P(BC)+P(ABC). \quad (3.15)$$

Формула повної ймовірності. Нехай подія A може відбутися лише при умові появи однієї з несумісних подій $B_1,B_2,...,B_n$, що утворюють повну групу. Нехай також відомі ймовірності цих подій $P(B_1),P(B_2),...,P(B_n)$ і умовні ймовірності $P_{B_1}(A),P_{B_2}(A),...,P_{B_n}(A)$ події A. Тоді має місце формула

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A), \quad (3.16)$$

яка називається ***формулою повної ймовірності***.

Ймовірності гіпотез. Формули Байеса. Нехай подія A може відбутися лише при умові появи однієї з несумісних подій $H_1,H_2,...,H_n$, що утворюють повну групу. Оскільки *до проведення досліду* невідомо, яка саме з цих подій відбудеться, то вони називаються ***гіпотезами***. Нехай ймовірності усіх гіпотез $P(H_1),P(H_2),...,P(H_n)$ відомі. Ці ймовірності називаються ***апріорними*** або *переддослідними*. З (3.5) випливає, що $\sum_{i=1}^{n}P(H_i)=1$. Умовні ймовірності $P_{H_i}(A)$ $(i=1,...,n)$ також вважаються відомими, тому ймовірність того, що подія A відбудеться у даному досліді, обчислюється за формулою повної ймовірності (3.16). *Після* проведення досліду, коли *вже відомо*, що подія A дійсно відбулася, ймовірності гіпотез слід *переоцінити*, тобто знайти ці ймовірності *при умові*, що подія A відбулася. Ймовірності гіпотез *після досліду* називаються ***апостеріорними***. Вони обчислюються за ***формулами Байеса***

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} \quad (i = 1,...,n), \tag{3.17}$$

де $P(A)$ обчислюється за формулою повної ймовірності (3.16).

Повторення незалежних випробувань. Якщо ймовірність появи події A в кожному з n випробувань не залежить від наслідків інших випробувань, то такі випробування називаються ***незалежними відносно події A***. Нехай ця ймовірність *стала* і дорівнює p. Тоді ймовірність появи протилежної події $\overline{A}$ (тобто непояви події A) теж стала і дорівнює $q = 1 - p$. Ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A відбудеться рівно k разів обчислюється в залежності від значень n і p за однією з наведених далі формул.

Біноміальна формула Бернуллі. Якщо n відносно невелике ($n \le 10$), а p не мала ($p \ge 0{,}1$), то для обчислення $P_n(k)$ можна користуватися ***формулою Бернуллі***

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{3.18}$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Формула Бернуллі дозволяє визначити ***найімовірніше число m_0*** появ події A у n незалежних випробуваннях

$$np - q \le m_0 \le np + p, \tag{3.19}$$

причому m_0 може бути *тільки цілим числом*. Якщо числа $np - q$ й $np + p$ - дробові, то маємо єдине значення $m_0 = np$, а якщо вони цілі, то маємо два значення $m_0' = np + p$ й $m_0'' = np - q$.

Локальна формула Лапласа. Якщо n достатньо велике, а p не мала ($p \ge 0{,}1$), то $P_n(k)$ можна наближено обчислити за *асимптотичною* формулою

$$P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{3.20}$$

де $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Граничне співвідношення (3.20) називають ***локальною*** або ***диференціальною формулою Лапласа***. Вона була відкрита у 1730 р. Муавром для випадку $p=\frac{1}{2}$ і узагальнена у 1783 р. Лапласом для довільного $0<p<1$, тому й відповідна теорема називається ***локальною теоремою Лапласа*** (або ***Муавра-Лапласа***).

Зауваження. Точність формули (3.20) тим вище, чим більше n, тому й формула називається *асимптотичною* (вона виведена у припущенні, що $n\to\infty$). Функція $\varphi(x)$ *парна*, тобто $\varphi(-x)=\varphi(x)$. Таблиця значень $\varphi(x)$ наведена у додатку 3 (ці значення також можна обчислити на калькуляторі).

Формула Пуассона. Якщо n дуже велике, а p дуже мала, то $P_n(k)$ краще наближено обчислювати за ***формулою Пуассона***

$$P_n(k)\sim\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \tag{3.21}$$

де $\lambda=np$.

Зауваження до формул Бернуллі, Лапласа і Пуассона. За цими формулами також можна знайти ймовірність того, що у n незалежних випробуваннях подія A відбудеться:

1) менш k разів $\quad P_n(<k)=\sum_{i=0}^{k-1}P_n(i)$;

2) більш k разів $\quad P_n(>k)=\sum_{i=k+1}^{n}P_n(i)$;

3) не менш k разів $\quad P_n(\geq k)=\sum_{i=k}^{n}P_n(i)$;

4) не більш k разів $\quad P_n(\leq k)=\sum_{i=0}^{k}P_n(i)$.

Інтегральна формула Лапласа. Ймовірність того, що у n незалежних випробуваннях подія A відбудеться від k_1 до k_2 разів, наближено обчислюється за ***інтегральною формулою Лапласа***

$$P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \tag{3.22}$$

де $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$. Функція $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ називається ***функцією Лапласа*** або ***інтегралом ймовірностей***.

Зауваження. Тут ми розглядаємо так звану ***нормовану функцію Лапласа***, на відміну від *звичайної функції Лапласа* $\overline{\Phi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, яка пов'язана з $\Phi(x)$ співвідношенням $\Phi(x) = \frac{1}{2} \overline{\Phi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Із застосуванням $\Phi(x)$ формула (3.22) набуває вигляду

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \qquad (3.23)$$

Функція $\Phi(x)$ *непарна*, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Таблиця *додатних* значень $\Phi(x)$ для $0 \le x \le 5$ наведена у додатку 4. Якщо $x > 5$, то приймають $\Phi(x) = 0{,}5$.

Ймовірність того, що модуль відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ від сталої ймовірності p не перевищує *заданого* числа $\varepsilon > 0$, є

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \le \varepsilon \right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right). \qquad (3.24)$$

II. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Випадковою називається величина, яка в результаті певного досліду може прийняти те або інше числове значення, заздалегідь невідоме. Значення, які випадкова величина приймає в результаті досліду, називаються ***можливими значеннями***. Випадкові величини позначають великими літерами латинського алфавіту X, Y або Z, а можливі значення - відповідними малими літерами x, y або z.

Розрізняють ***дискретні*** і ***неперервні*** випадкові величини.

Дискретною називається випадкова величина, яка може приймати тільки *окремі* значення.

Неперервною називається така випадкова величина, можливі значення якої не відокремлені одне від одного і неперервно заповнюють деякий проміжок.

Закони розподілу випадкових величин

Для повного опису випадкової величини необхідно знати не тільки всі можливі її значення, але й імовірності появи кожного з цих значень у результаті досліду.

Законом розподілу випадкової величини називається правило, за яким кожному з її можливих значень ставиться у відповідність імовірність, з якою випадкова величина приймає це значення.

Найпростішою формою завдання закону розподілу *дискретної* випадкової величини X є так званий ***ряд розподілу***. Він являє собою таблицю, у верхньому рядку якої перелічені всі значення випадкової величини x_1, x_2, …, x_n у порядку їхнього зростання, а в нижньому - імовірності появи цих значень p_1, p_2, …, p_n:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

де $p_i = P(X = x_i)$ $(i = 1,...,n)$. Події $X = x_i$ $(i = 1,...,n)$ несумісні й утворюють повну групу, тому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Закон розподілу *дискретної* випадкової величини також може бути завданий *графічно* – у вигляді ламаної лінії, яка сполучає точки $A_i(x_i, p_i)$ (рис. 3.1). Ця лінія називається ***многокутником розподілу*** дискретної випадкової величини.

Ряд розподілу *дискретної* випадкової величини у разі доволі великого числа можливих значень буде дуже громіздким. Для опису ж *неперервної* випадкової величини, яка має нескінченну множину можливих значень, ряд розподілу взагалі непридатний. У цих випадках замість подій $X = x_i$ розглядають подію $X < x$, де x – довільно обране дійсне число, тобто випадкова величина X в результаті випробування приймає значення менш ніж задане число.

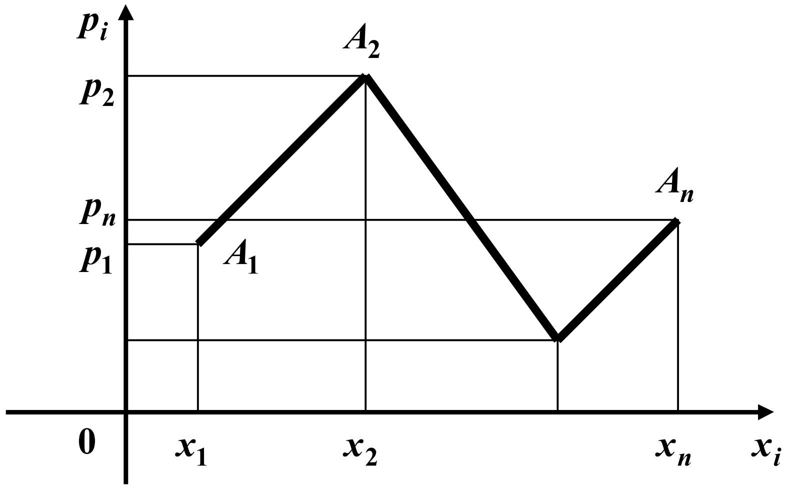

Рис. 3.1

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка визначає ймовірність події $X < x$:

$$F(x) = P(X < x). \qquad \textbf{(3.25)}$$

Вона також називається ***інтегральною функцією розподілу*** або ***інтегральним законом розподілу*** і використовується для опису випадкових величин *обох* типів, тобто вона є їхньою *універсальною характеристикою*. З геометричної точки зору $F(x)$ є ймовірність того, що в результаті досліду випадкова точка X (фактичне значення, яке прийняла випадкова величина) опиниться ліворуч наперед заданої точки x (рис. 3.2).

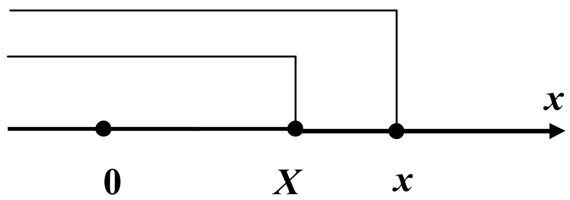

Рис. 3.2

Функція $F(x)$ є неспадною, причому $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Графіки функцій розподілу неперервної і дискретної випадкових величин показані відповідно на рис. 3.3 і рис. 3.4.

Ймовірність попадання *дискретної* випадкової величини X в заданий інтервал (a, b) обчислюється за формулою

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \qquad \textbf{(3.26)}$$

Для *неперервної* випадкової величини, оскільки в цьому випадку $P(X = a) = 0$, вказана ймовірність є

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \qquad \textbf{(3.27)}$$

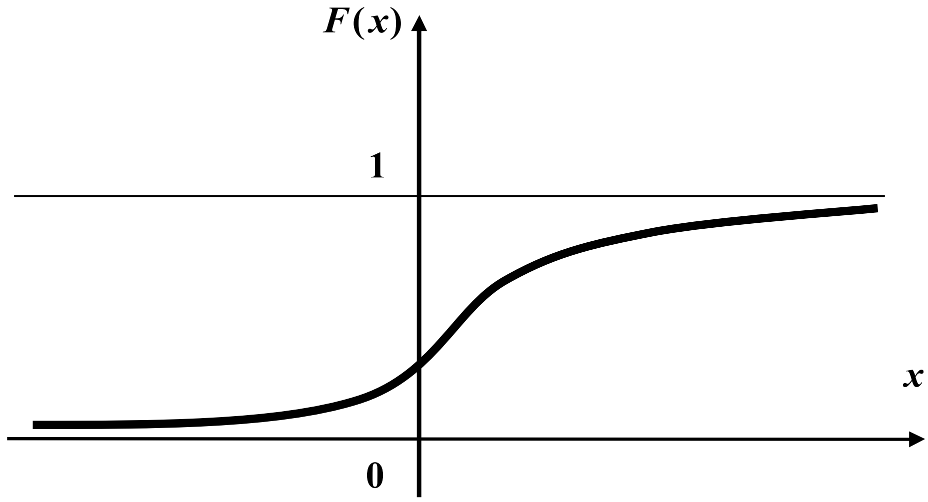

Рис. 3.3

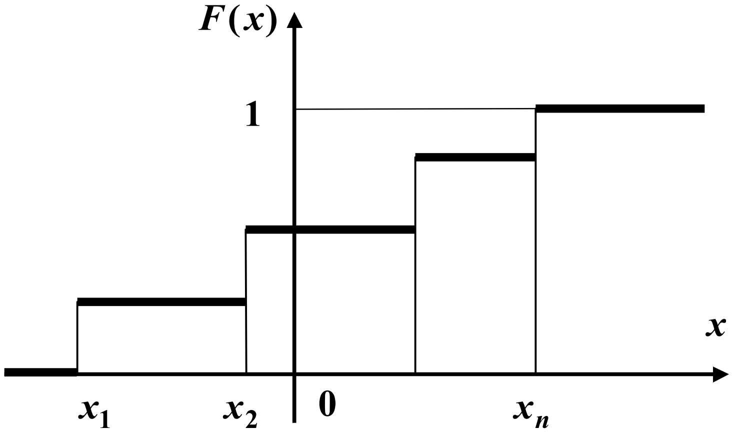

Рис. 3.4

Неперервну випадкову величину X можна задавати не тільки функцією розподілу, а й іншою – ***щільністю розподілу*** (***щільністю ймовірності***), якою називається функція

$$f(x) = F'(x). \qquad \textbf{(3.28)}$$

Її також називають ***диференціальною функцією розподілу*** або ***диференціальним законом розподілу***. Вона *невід'ємна* і її графік, який називається ***кривою розподілу***, має вигляд, показаний на рис. 3.5.

За означенням $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$, тобто з геометричної точки зору $F(x)$ чисельно дорівнює площі заштрихованої частини нескінченної фігури на рис. 3.5. Площа ж усієї фігури $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

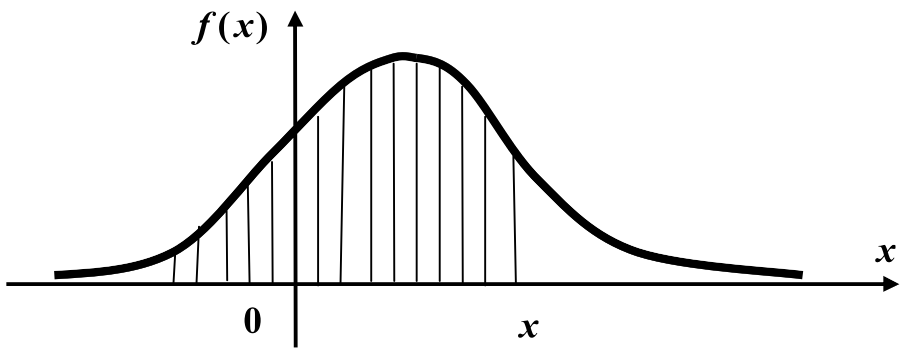

Рис. 3.5

Ймовірність попадання *неперервної* випадкової величини X в заданий інтервал (a, b) обчислюється за формулою

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3.29)$$

і чисельно дорівнює площі заштрихованої частини нескінченної фігури на рис. 3.6.

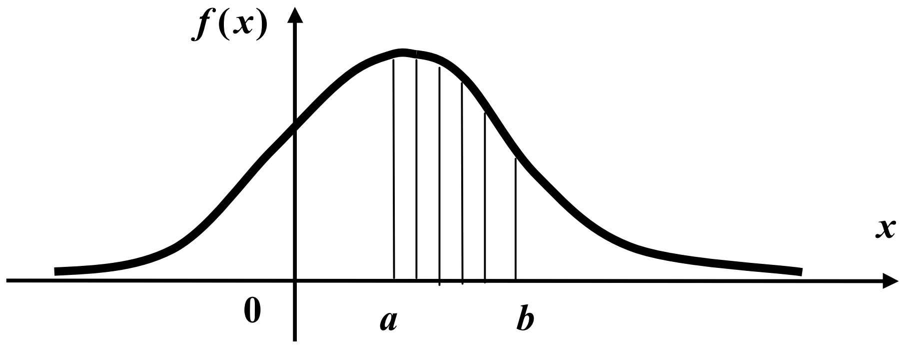

Рис. 3.6

Числові характеристики випадкових величин

Числові параметри, що характеризують певні найбільш суттєві особливості розподілу випадкових величин, називаються ***числовими характеристиками*** цих величин. До найважливіших з них відносяться математичне сподівання, дисперсія і середньоквадратичне відхилення.

Математичним сподіванням $M(X)$ випадкової величини X називається її "середнє" значення, навколо котрого групуються можливі значення цієї величини. Математичне сподівання має розмірність самої випадкової величини.

Для *дискретної* випадкової величини

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \tag{3.30}$$

Для *неперервної* випадкової величини із щільністю розподілу $f(x)$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \tag{3.31}$$

або $M(X) = \int_{a}^{b} x f(x) dx$, якщо усі можливі значення X належать інтервалу (a,b).

Властивості математичного сподівання: якщо $C = const$, то

$$M(C) = C, \quad M(C \cdot X) = C \cdot M(X).$$

Дисперсією $D(X)$ випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 , \tag{3.32}$$

отже, дисперсія є середнє значення квадрата відхилення можливих значень випадкової величини від її середнього значення. Величина дисперсії, таким чином, дозволяє оцінити ступінь розсіяння можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення (математичного сподівання). Дисперсія має розмірність *квадрата* випадкової величини.

На практиці дисперсію зручніше обчислювати не за означенням (3.32), а за формулою

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 . \tag{3.33}$$

Для *дискретної* випадкової величини

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [M(X)]^2 , \tag{3.34}$$

де $M(X)$ обчислюється за формулою (3.30).

Для *неперервної* випадкової величини

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 , \tag{3.35}$$

де $M(X)$ обчислюється за формулою (3.31).

Властивості дисперсії: якщо $C = const$, то

$$D(C)=0, \quad D(C\cdot X)=C^2\cdot D(X).$$

Середньоквадратичним відхиленням $\sigma(X)$ випадкової величини X називається

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad \textbf{(3.36)}$$

Середньоквадратичне відхилення має розмірність самої випадкової величини.

Оцінка знизу ймовірності попадання випадкової величини X в інтервал $\left(M(X)-\alpha,\ M(X)+\alpha\right)$, симетричний відносно $M(X)$, дається ***нерівністю Чебишова***

$$P\left(|X-M(X)|<\alpha\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\alpha^2}. \qquad \textbf{(3.37)}$$

Якщо покласти $\alpha=3\sigma(X)$, то з (3.37) отримаємо

$$P\left(|X-M(X)|<3\sigma(X)\right)\geq 1-\frac{D(X)}{9\sigma^2(X)}=1-\frac{D(X)}{9D^2(X)}=\frac{8}{9}\approx 0{,}89. \qquad \textbf{(3.38)}$$

Деякі з законів розподілу випадкових величин, що найчастіше використовуються в практиці

Дискретні величини

Геометричний розподіл. Незалежні випробування, у кожному з яких ймовірність появи події A стала і дорівнює p, проводяться *до першої появи* цієї події. Випадкова величина X - число проведених випробувань. Ймовірності її можливих значень $(1,2,\ldots,n,\ldots)$ обчислюються за формулою

$$P(X=n)=p\,q^{n-1}, \qquad \textbf{(3.39)}$$

де $q=1-p$.

Ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	1	2	3	……	n	……
P	p	pq	pq^2	……	pq^{n-1}	……

Числові характеристики геометричного розподілу:

$$M(X)=\frac{1}{p},\ \ D(X)=\frac{q}{p^2},\ \ \sigma(X)=\frac{\sqrt{q}}{p}. \qquad (3.40)$$

Величина p називається ***параметром геометричного розподілу***.

Біномний розподіл. Ймовірність появи події A у кожному з n незалежних випробувань стала і дорівнює p. Випадкова величина X - число появ події A. Ймовірності її можливих значень $(0,1,2,...,m,...,n)$ обчислюються за формулою Бернуллі

$$P(X=k)=P_n(k)=C_n^k p^k\ q^{n-k}, \qquad (3.41)$$

де $q=1-p$.

Ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2	....	k	....	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	....	$C_n^k p^k q^{n-k}$	....	p^n

Числові характеристики біномного розподілу:

$$M(X)=np,\ D(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}. \qquad (3.42)$$

Величини n і p називаються ***параметрами біномного розподілу***.

Розподіл Пуассона. Це – граничний випадок біномного розподілу, коли $n\to\infty$ (дуже велике), $p\to 0$ (дуже мале), а добуток np зберігає стале значення $np=\lambda$. Тоді

$$P(X=k)=P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad (k=0,1,2,...). \qquad (3.43)$$

Ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2	....	k	....
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	....	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	....

Числові характеристики розподілу Пуассона:

$$M(X)=\lambda,\ D(X)=\lambda,\ \sigma(X)=\sqrt{\lambda}. \qquad (3.44)$$

Число $\lambda>0$ називається ***параметром розподілу Пуассона***.

Розподіл Пуассона називають ***законом масових рідких явищ***. Якщо отримані в результаті випробувань математичне сподівання і дисперсія деякої випадкової величини X близькі, то є підстави вважати, що X розподілена за законом Пуассона.

Неперервні величини

Рівномірний розподіл. Неперервна випадкова величина X має рівномірний розподіл на відрізку $[a,b]$, якщо на цьому відрізку щільність її розподілу є сталою величиною C, а поза ним дорівнює нулю, тобто

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ C, & a\le x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases} \tag{3.45}$$

З властивості $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ випливає, що $C=\dfrac{1}{b-a}$. Тоді

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases} \tag{3.46}$$

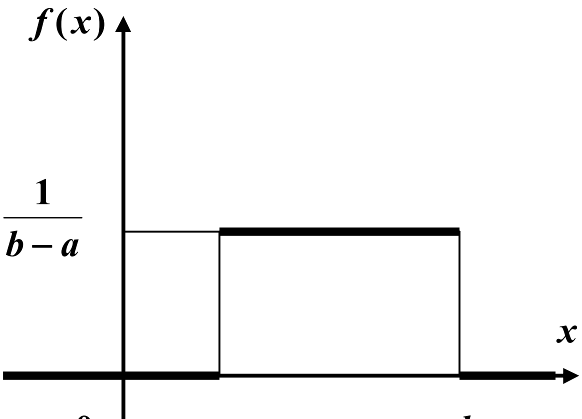

Рис. 3.7

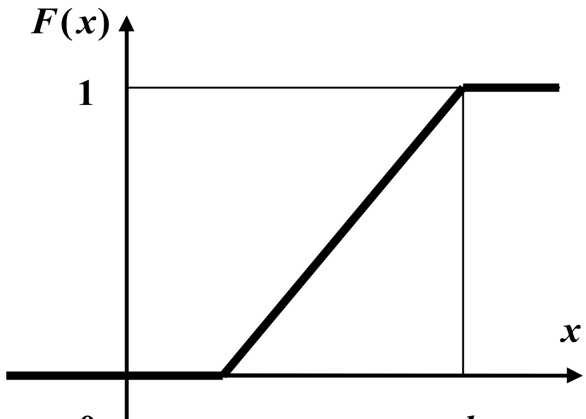

Рис. 3.8

Числові характеристики рівномірного розподілу

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{3.47}$$

Ймовірність попадання X в інтервал $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{b-a}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \tag{3.48}$$

Випадкова величина X розподілена рівномірно, якщо її можливі значення рівноймовірні і лежать всередині певного інтервалу.

Показниковий (експоненціальний) розподіл. Неперервна випадкова величина X має показниковий (експоненціальний) розподіл, якщо щільність її розподілу є

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda\, e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases} \tag{3.49}$$

де $\lambda>0$ - ***параметр показникового розподілу***.
Тоді

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

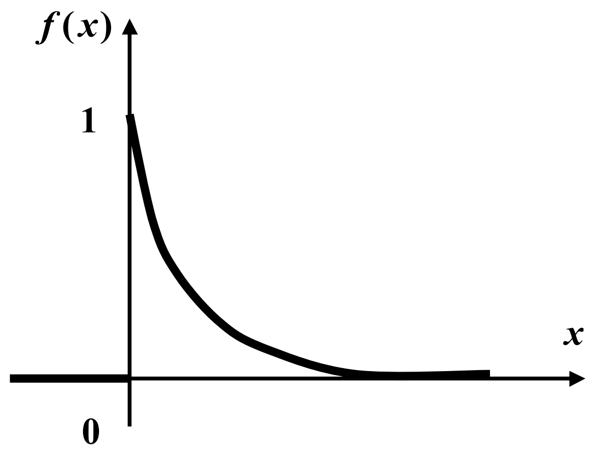

Рис. 3.9

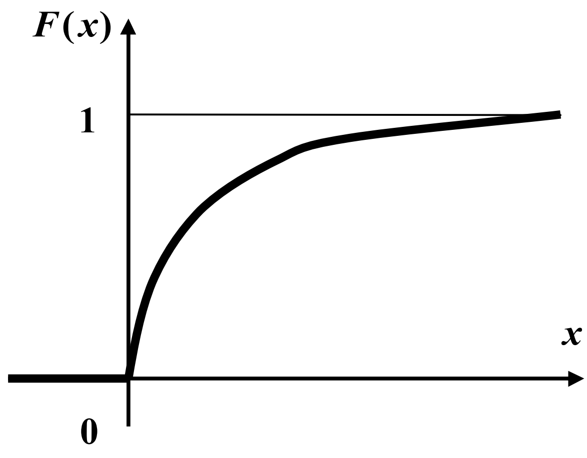

Рис. 3.10

Числові характеристики показникового розподілу

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}, \tag{3.50}$$

тобто $M(X)=\sigma(X)$.

Ймовірність попадання X в інтервал (a,b) обчислюється за формулою

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \qquad (3.51)$$

Показниковий розподіл широко використовується у *теорії надійності*. Якщо λ є інтенсивність відмов (кількість відмов за одиницю часу) деякого пристрою, t - час відмови пристрою, починаючи з моменту $t_0 = 0$, а неперервна випадкова величина T - тривалість безвідмовної роботи пристрою, то функція розподілу $F(t) = P(T < t)$ визначає ймовірність його відмови за час t. Тоді ***ймовірність безвідмовної роботи*** пристрою за час t визначається функцією $R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$, яка називається ***функцією надійності***. На практиці досить часто тривалість безвідмовної роботи підкоряється показниковому закону. В цьому випадку функція надійності має вигляд

$$R(t) = e^{-\lambda t}. \qquad (3.52)$$

Співвідношення (3.52) називається ***показниковим законом надійності***.

Нормальний розподіл. Цей закон розподілу називається також ***законом Гаусса*** за ім’ям математика, який вперше сформулював його при дослідженні помилок точних вимірювань. Нормальний закон розподілу виявляється у всіх випадках, коли випадкова величина є наслідком дії дуже великого числа взаємно незалежних випадкових факторів, вплив кожного з яких дуже малий (*теорема Ляпунова*). До цього закону наближаються усі інші закони розподілу, тому він є найважливішим, займаючи центральне місце у теорії ймовірностей.

Щільність розподілу при нормальному законі має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (3.53)$$

де $\sigma = \sigma(X)$ і $a = M(X)$ – ***параметри нормального розподілу***.

Графік функції $f(x)$ (3.53) називається ***нормальною кривою*** або ***кривою Ґаусса***. Він симетричний відносно прямої $x = a$, має перегин у точках з абсцисами $x = a \pm \sigma$, вісь Ox є його горизонтальною асимптотою (рис. 3.11). При $a = 0$ й $\sigma = 1$ крива називається ***нормованою*** і має рівняння $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Функція нормального розподілу визначається формулою

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt \qquad (3.54)$$

або, із використанням інтеграла ймовірностей $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$,

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (3.55)$$

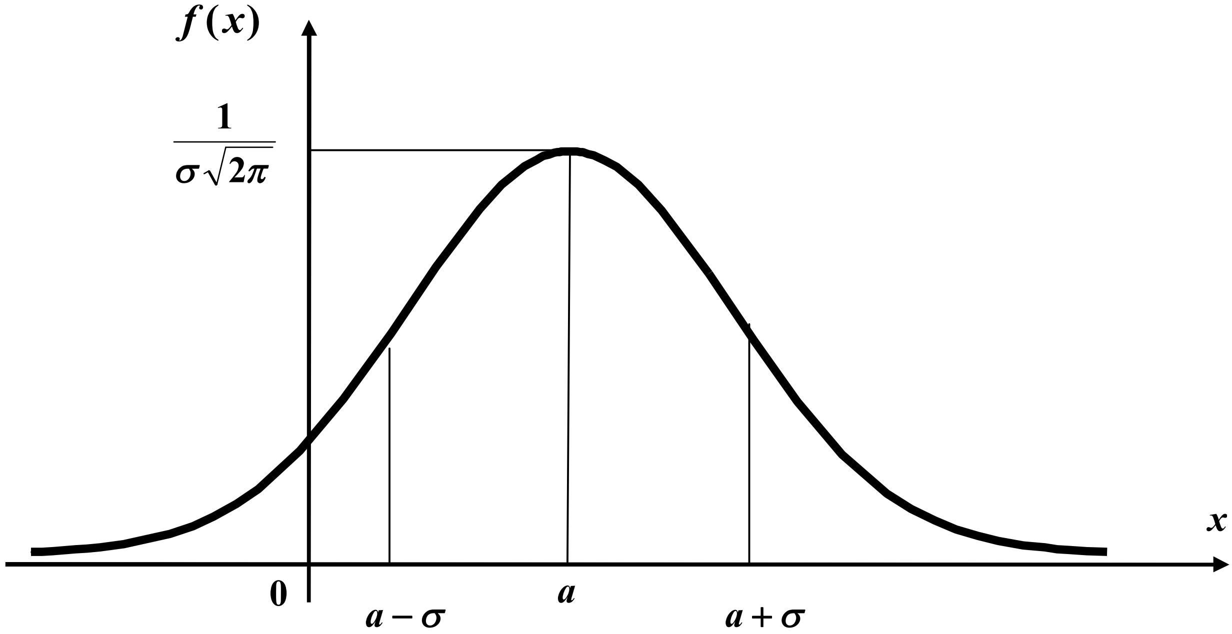

Рис. 3. 11

Числові характеристики нормального розподілу

$$M(X)=a, \quad D(X)=\sigma^2, \quad \sigma(X)=\sigma. \qquad (3.56)$$

Ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини X в заданий інтервал (α, β) обчислюється за формулою

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (3.57)$$

а ймовірність того, що модуль відхилення X від її математичного сподівання a не перевищить заданого числа $\delta>0$,

$$P\left(|X-a|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (3.58)$$

Якщо прийняти $\delta=3\sigma$, то отримаємо $P\left(|X-a|<3\sigma\right)=2\Phi(3)=0{,}9973$. Це означає, що ймовірність *протилежної* події $|X-a|>3\sigma$ становить $1-0{,}9973=0{,}0027$, тобто практично дорівнює нулю. У цьому полягає відоме "***правило трьох сигм***": модуль відхилення *нормально розподіленої* випадкової величини від її математичного сподівання не перевищує потроєного середньоквадратичного відхилення. Тому на практиці вважають, що якщо для досліджуваної випадкової величини виконується правило трьох сигм, то вона розподілена нормально.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИВЧЕННЯ РОЗДІЛУ

Література: [1] гл. IX, [2] гл. 5.1, [3] гл. 1-6, [4] гл. 1-7, [5] гл. 1-13, [6] гл. V, [10] гл. 6, [13] гл. VII, [14] гл. 14, [16] гл. 14.

Приклад 3.1. Куб, усі грані якого пофарбовані, розпилили на 1000 кубиків однакового розміру і ретельно їх перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання витягнутий кубик має рівно одну пофарбовану грань.

Розв'язання. При розпилюванні вихідного куба, який має 6 граней, на $\boldsymbol{n = 1000}$ кубічних частин (загальне число можливих наслідків) утворюється $\boldsymbol{m = 6 \times 8 \times 8 = 384}$ кубика з однією пофарбованою гранню (число сприятливих наслідків). Тому за класичним означенням ймовірності (3.1)

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n} = \frac{384}{1000} = \frac{96}{250} = 0{,}384}.$$

Приклад 3.2. Колоду з 36 гральних карт ретельно перемішують і навмання витягують одразу 3 карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б одна "дама".

Розв'язання. Знайдемо ймовірність *протилежної* події, а саме: серед узятих карт немає жодної "дами". За класичним означенням ймовірності (3.1) $\boldsymbol{q = \frac{C_4^0 \cdot C_{32}^3}{C_{36}^3}}$. Тоді шукана ймовірність $\boldsymbol{p = 1 - q = 1 - \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = 0{,}3053}$.

Приклад 3.3. Та ж сама задача, але карти витягують *по черзі*, одну за одною.

Розв'язання. У даному випадку, на відміну від попереднього, маємо не одну, а три *залежні* події. Тому за теоремою множення ймовірностей залежних подій (3.11) маємо $\boldsymbol{q = \frac{32}{36} \cdot \frac{31}{35} \cdot \frac{30}{34} = \frac{248}{357}}$. Тоді $\boldsymbol{p = 1 - q = \frac{114}{357} = 0{,}3053}$.

<u>Приклад 3.4.</u> У крузі радіуса R розміщений малий круг радіуса $r < R$. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута у великий круг, влучить також і в малий круг.

Розв'язання. За геометричним означенням ймовірності (3.2)

$$p = \frac{S_r}{S_R} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}.$$

<u>Приклад 3.5.</u> Розрив електричної мережі може відбутися внаслідок відмови елемента E_1 або одночасно двох елементів E_2 й E_3, які відмовляють незалежно один від одного відповідно з ймовірностями $p_1 = 0,3$, $p_2 = p_3 = 0,2$. Визначити ймовірність розриву електричної мережі.

Розв'язання. Мережа буде працювати (подія A), якщо жоден з елементів не відмовить. Тому за теоремою множення ймовірностей незалежних подій $P(A) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2 p_3) = 0,672$. Отже, ймовірність розриву мережі (подія $\overline{A}$)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,328.$$

<u>Приклад 3.6.</u> Стрілець робить один постріл по мішені, яка складається з круга й двох концентричних кілець. Ймовірності попадання в круг і кільця відповідно дорівнюють $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,1$. Визначити ймовірність промаху.

Розв'язання. Мішень буде уражена (подія A), якщо відбудеться влучання або в круг, або в одне з кілець. Оскільки стрілець робить тільки один постріл, то ці події несумісні. За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій (3.4)

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_3 = 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,6.$$

Отже, ймовірність промаху (подія $\overline{A}$) є $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,4$.

<u>Приклад 3.7.</u> Технічний пристрій містить три блоки, надійності яких відповідно дорівнюють $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,3$. При відмові за проміжок часу t усіх трьох блоків пристрій напевно виходить з ладу, при відмові лише одного блока ймовірність виходу з ладу $0,2$, а при відмові двох блоків вона складає $0,6$. Знайти ймовірність того, що за проміжок часу t пристрій вийде з ладу.

Розв'язання. Нехай подія A - вихід пристрою з ладу за проміжок часу t.

Висунемо гіпотези: H_1 - усі три блоки за час t працювали безвідмовно;

H_2 - за час t відмовив тільки один блок;

H_3 - за час t відмовили два блоки;

H_4 - за час t відмовили усі три блоки.

Ймовірності відмов кожного з блоків: $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$, $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. За теоремами додавання і множення ймовірностей знайдемо ймовірності гіпотез:

$P(H_1) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$,

$P(H_2) = q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 +$
$+ 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}36$,

$P(H_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 +$
$+ 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}41$,

$P(H_4) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}14$. Відповідні умовні ймовірності події A дорівнюють: $P_{H_1}(A) = 0$, $P_{H_2}(A) = 0{,}2$, $P_{H_3}(A) = 0{,}6$, $P_{H_4}(A) = 1$.

За формулою повної ймовірності (3.16)

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = 0{,}09 \cdot 0 + 0{,}36 \cdot 0{,}2 + 0{,}41 \cdot 0{,}6 + 0{,}14 \cdot 1 = 0{,}458.$$

<u>Приклад 3.8.</u> По каналу зв'язку передається один з двох можливих сигналів x_1 або x_2, причому сигнал x_2 передається вдвічі частіше, ніж сигнал x_1. Через перешкоди можливі викривлення: замість одного сигнала може бути прийнятий інший і навпаки. Властивості каналу зв'язку такі, що сигнал x_1 зазнає викривлень приблизно у 10 % випадків, а сигнал x_2 - у 20 %. Нехай був отриманий сигнал x_1. Яка ймовірність того, що був переданий саме цей сигнал?

Розв'язання. Нехай подія A - був отриманий сигнал x_1.

Висунемо гіпотези: H_1 - був переданий сигнал x_1; H_2 - був переданий сигнал x_2. Тоді $P(H_1) = \frac{1}{3}$, $P(H_2) = \frac{2}{3}$, $P_{H_1}(A) = \frac{9}{10}$, $P_{H_2}(A) = \frac{1}{5}$. Ймовірність отримати за даних умов сигнал x_1 за формулою повної ймовірності (3.16) є

$P(A)=\sum_{i=1}^{2} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{13}{30}$. За відповідною формулою Байєса (3.17) ймовірність того, що був переданий саме сигнал x_1 (апостеріорна ймовірність гіпотези H_1) є $P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{13}{30}}=\frac{9}{13}=0{,}692$.

Таким чином, отримання сигналу x_1 значно збільшує ймовірність гіпотези H_1 у порівнянні з її апріорним значенням.

<u>Приклад 3.9.</u> Ймовірність того, що витрата електроенергії протягом однієї доби не перевищить установленої норми, дорівнює $p=0{,}75$. Знайти ймовірність того, що у найближчі 6 діб витрата електроенергії протягом 4 діб не перевищить норми.

Розв'язання. Ймовірність перевитрати електроенергії протягом кожної доби стала і дорівнює $q=1-0{,}75=0{,}25$. Оскільки число спроб $n=6$ невелике, а ймовірність $p=0{,}75$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за формулою Бернуллі (3.18), де $k=4$:

$$P_6(4)=C_6^4 p^4 q^2=\frac{6!}{4!2!}\cdot 0{,}75^4\cdot 0{,}25^2=0{,}297.$$

<u>Приклад 3.10.</u> Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно 70 разів у 243 спробах, якщо ймовірність появи цієї події у кожній спробі стала і дорівнює 0,25.

Розв'язання. Оскільки число спроб $n=243$ велике, а ймовірність $p=0{,}25$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за локальною формулою Лапласа (3.20): $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-243\cdot 0{,}25}{\sqrt{243\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}=1{,}37$, значення $\varphi(x)=\varphi(1{,}37)=0{,}1561$ обчислюємо на калькуляторі за формулою $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ або знаходимо за таблицею у додатку 3, $P_{243}(70)=\frac{1}{\sqrt{243\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}\cdot 0{,}1561=0{,}0231$.

Приклад 3.11. Ймовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює $p = 0{,}2$. Визначити ймовірність того, що зі 100 конденсаторів за час T вийдуть з ладу від 14 до 26 конденсаторів.

Розв'язання. Скористаємось інтегральною формулою Лапласа (3.23), у якій покладемо $n = 100, \quad k_1 = 14, \quad k_2 = 26, \quad p = 0{,}2, \quad q = 1 - p = 0{,}8$. Обчисливши

$x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{14 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}5, \qquad x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{26 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 1{,}5,$ за таблицею у додатку 4 знаходимо $\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$. Оскільки функція $\Phi(x)$ непарна, то $\Phi(-1{,}5) = -\,0{,}4332$. Тоді $P_{100}(14{,}26) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-1{,}5) =$ $= 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664$.

Приклад 3.12. Проводиться 10 000 незалежних випобувань, в кожному з яких подія A може появитися з імовірністю 0,0003. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться рівно 5 разів.

Розв'язання. Оскільки число спроб $n = 10\,000$ дуже велике, а ймовірність $p = 0{,}0003$ дуже мала, то шукану ймовірність обчислимо за формулою Пуассона (3.21) при $\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0003 = 3$. Отже, $P_{10000}(5) = \dfrac{3^5 \cdot e^{-3}}{5!} = 0{,}1$.

Приклад 3.13. Ймовірність прийому радіосигналу за певних умов дорівнює 0,75. Скільки сигналів повинно бути передано, щоб ймовірність відхилення частоти прийнятих сигналів від ймовірності прийому не більш, ніж на 0,035, дорівнювала 0,95?

Розв'язання. Скористаємось формулою (3.24), у якій покладемо $p = 0{,}75, \quad q = 1 - p = 0{,}25, \quad \varepsilon = 0{,}035, \quad P\left(\left| \dfrac{m}{n} - p \right| \le \varepsilon \right) = 0{,}95$.

Отримаємо рівняння $0{,}95 = 2\Phi\left(0{,}035 \cdot \sqrt{\dfrac{n}{0{,}75 \cdot 0{,}25}} \right)$ або, після невеликого перетворення, $\Phi\left(0{,}035 \cdot \sqrt{\dfrac{n}{0{,}1875}} \right) = 0{,}475$. За таблицею у додатку 4 знаходимо $0{,}475 = \Phi(1{,}96)$, звідки маємо $0{,}035 \cdot \sqrt{\dfrac{n}{0{,}1875}} = 1{,}96$.

Отже, $n = 0{,}1875 \cdot \left(\frac{1{,}96}{0{,}035}\right)^2 = 588$.

<u>Приклад 3.14.</u> Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x_i	13	18	19	x_4	25
p_i	0,18	p_2	0,22	0,20	0,15

Знайти x_4, p_2, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо $M(X) = 18{,}77$.

Розв'язання. Для знаходження p_2 використаємо умову $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, тобто

$0{,}18 + p_2 + 0{,}22 + 0{,}2 + 0{,}15 = 1$, звідки знаходимо $p_2 = 0{,}25$.

Тоді маємо рівняння

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 13 \cdot 0{,}18 + 18 \cdot 0{,}25 + 19 \cdot 0{,}22 + x_4 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}15 = 18{,}77$$

або $14{,}77 + 0{,}2 \cdot x_4 = 18{,}77$, звідки знаходимо $x_4 = \frac{4}{0{,}2} = 20$.

Отже, закон розподілу дискретної величини має вигляд

x_i	13	18	19	20	25
p_i	0,18	0,25	0,22	0,2	0,15

Тоді

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - [M(X)]^2 = = 13^2 \cdot 0{,}18 + 18^2 \cdot 0{,}25 + 19^2 \cdot 0{,}22 + 20^2 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ 25^2 \cdot 0{,}15 - (18{,}77)^2 = 364{,}59 - 352{,}3129 = 12{,}28,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 3{,}50.$$

Приклад 3.15. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 8;\\ (x-8)^3, & 8<x\le 9;\\ 1\ , & x>9.\end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку щільність розподілу $f(x)$:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 8;\\ 3(x-8)^2, & 8<x\le 9;\\ 0\ , & x>9.\end{cases}$$

Оскільки $f(x)$ ненульова лише на проміжку $[8,9)$, то користуємось формулами $M(X)=\int\limits_a^b x\ f(x)dx$, $D(X)=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$. Отже, маємо

$$M(X)=\int\limits_8^9 x\cdot 3(x-8)^2dx=3\int\limits_8^9 x(x-8)^2dx=\left|\begin{array}{lll}x-8=t & & \\ x=t+8 & & \\ x & 8 & 9\\ t & 0 & 1\end{array}\right|=$$

$$=3\int\limits_0^1 (t+8)\,t^2dt=3\int\limits_0^1\left(t^3+8t^2\right)dt=3\left(\frac{t^4}{4}+8\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=3\left(\frac{1}{4}+\frac{8}{3}\right)=8{,}75,$$

$$D(X)=\int\limits_8^9 x^2\cdot 3(x-8)^2dx-[M(X)]^2=3\int\limits_8^9\left(x^4-16x^3+64x^2\right)dx-8{,}75^2=$$

$$=3\left(\frac{x^5}{5}-4x^4+\frac{64}{3}x^3\right)\Bigg|_8^9-76{,}56=\frac{383}{5}-76{,}56=0{,}04\,.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=0{,}2\,.$$

Приклад 3.16. Гармата робить 4 постріли по мішені з однієї і тієї ж позиції. Ймовірність попадання при одному пострілі дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу кількості попадань, знайти середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення кількості попадань.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X - кількість влучень у мішень. Її можливі значення: $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \; x_3 = 2, \quad x_4 = 3, \quad x_5 = 4$.

Результати пострілів не залежать один від одного, ймовірність попадання при одному пострілі є сталою величиною. Це означає, що випадкова величина X розподілена за біноміальним законом.

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $\quad n = 4, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4; \quad p = 0{,}8; \quad q = 1 - p = 0{,}2.$

Обчислимо

$$P(0) = C_4^0 p^0 q^4 = (0{,}2)^4 = 0{,}0016;$$

$$P(1) = C_4^1 p q^3 = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0256;$$

$$P(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}1536;$$

$$P(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q = 4 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096;$$

$$P(4) = C_4^4 p^4 q^0 = 0{,}8^4 = 0{,}4096.$$

Перевіримо вірність обчислень:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0{,}0016 + 0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}4096 + 0{,}4096 = 1.$$

Шуканий закон розподілу має вигляд:

x	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Математичне сподівання (середнє значення) кількості влучень $M(X) = np = 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}2$, дисперсія $D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}64$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

Приклад 3.17. Електронний пристрій складається з 1000 елементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови будь-якого елемента протягом одного року дорівнює 0,002. Знайти імовірність того, що за рік відмовлять не менш трьох елементів.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X - число елементів, які відмовили. За законом Пуассона $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$.

Вважаючи $n = 1000,\ p = 0{,}002$, одержимо $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$.

Ймовірність відмови не менш трьох елементів

$$P(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{\infty} P(X = k) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2).$$

$$P(X = 0) = P_{1000}(0) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = 0{,}13534,\ P(X = 1) = P_{1000}(1) = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = 0{,}27068,$$

$$P(X = 2) = P_{1000}(2) = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = 0{,}27068.$$

Тоді $P(X \geq 3) = 1 - 0{,}13534 - 2 \cdot 0{,}27068 = 0{,}3233$.

Приклад 3.18. Автобуси деякого маршруту рухаються точно за розкладом. Проміжок руху 15 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме черговий автобус менше 10 хвилин.

Розв'язання. Пасажир може підійти до зупинки у будь-який момент. Тому час очікування можна вважати випадковою величиною ***X***, яка рівномірно розподілена у інтервалі руху автобусів.

Щільність розподілу $f(x) = \dfrac{1}{b - a}$, де $(b - a)$ - довжина інтервалу, у якому знаходяться ймовірні значення ***X***. У даному випадку $b - a = 15$, тому $f(x) = \dfrac{1}{15}$. Оскільки автобуси йдуть точно за розкладом (тобто наступний прийде не раніше означеного часу), то пасажир чекатиме його менше 10 хвилин, якщо $5 < X < 15$.

Ймовірність попадання випадкової величини в деякий інтервал обчислюється за формулою $P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, отже,

$$P(5 < X < 15) = \int\limits_{5}^{15} \frac{1}{15} dx = \frac{x}{15}\Bigg|_{5}^{15} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 3.19. Середній час безвідмовної роботи радіоелектронного обладнання літака за статистичними даними складає 200 годин. Знайти ймовірність відмови обладнання протягом 10 годин польоту.

Розв'язання. Час безвідмовної роботи обладнання є випадковою величиною T, розподіленою за показниковим законом $F(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ 1-e^{-\lambda t}, & t>0,\end{cases}$

де $\lambda -$ інтенсивність відмов (кількість відмов за одиницю часу). У даному випадку $t=10,\ \lambda=\dfrac{1}{200}$ і ймовірність відмови за час t буде складати $P(T<t)=1-e^{-\lambda t}=1-e^{-\frac{10}{200}}=0{,}049$.

Приклад 3.20. Для дослідження продуктивності певної породи свійської птиці вимірюють діаметр яєць. Найбільший поперечний діаметр яєць є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з середнім значенням 5 см і середнім квадратичним відхиленням 0,3 см. Знайти ймовірність того, що: а) діаметр узятого навмання яйця буде знаходитись в межах від 4,7 до 6,2 см; б) відхилення діаметра яйця від середнього не перевищить за абсолютною величиною 0,6 см.

Розв'язання. Випадкова величина X – найбільший поперечний діаметр яйця, математичне сподівання (середнє значення) при нормальному законі розподілу $a=5,$ середнє квадратичне відхилення $\sigma=0{,}3$. Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (α,β) $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, де $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz -$ інтегральна функція Лапласа (її значення наведені у додатку 4).

Оскільки $\alpha=4{,}7,\quad \beta=6{,}2$, то маємо

$$P(4{,}7<X<6{,}2)=\Phi\left(\frac{6{,}2-5}{0{,}3}\right)-\Phi\left(\frac{4{,}7-5}{0{,}3}\right)=\Phi(4)+\Phi(1)=0{,}3413+0{,}5=0{,}8413.$$

Ймовірність того, що модуль відхилення X від її математичного сподівання a не перевищить заданого числа $\delta>0$, $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$. У даному випадку $\delta=0{,}6$, отже

$$P(|X-5|<0{,}6)=2\Phi\left(\frac{0{,}6}{0{,}3}\right)=2\Phi(2)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за заданими умовами.

1. $u(x, y) = x^3 - 6x^2 y - 3xy^2 + 2y^3, \quad f(0) = i$.

2. $u(x, y) = x \sin x ch y - y sh y \cos x, \quad f(0) = 0$.

3. $v(x, y) = y \cos x ch y - x \sin x \, sh y, \quad f(0) = 2$.

4. $v(x, y) = 4xy + y, \quad f(0) = 3$.

5. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x, \quad f(0) = 0$.

6. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1, \quad f(0) = 1$.

7. $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y, \quad f(1) = i - 2$.

8. $v(x, y) = 2xy + 2x, \quad f(0) = 0$.

9. $v(x, y) = 3x^2 y - y^3, \quad f(0) = 1$.

10. $u(x, y) = e^{-y} \sin x + y, \quad f(0) = 1$.

Завдання 2. Розвинути функцію в ряд.

11. Розвинути функцію $f(z) = (z+2)e^z$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = -2$.

12. Розвинути функцію $f(z) = \cos^2 \dfrac{z}{4}$ в ряд Маклорена.

13. Розвинути функцію $f(z) = \sin^2 z$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

14. Розвинути функцію $f(z) = \dfrac{2z - 1}{z^2 + z - 12}$ в ряд Маклорена.

15. Розвинути функцію $f(z) = (z-2)e^z$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 2$.

16. Розвинути функцію $f(z) = \dfrac{z + 11}{z^2 + z - 2}$ в ряд Маклорена.

17. Розвинути функцію $f(z)=\ln(z+2)$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0=-1$.

18. Розвинути функцію $f(z)=\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$ в ряд Маклорена.

19. Розвинути функцію $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+5}$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0=1$.

20. Розвинути функцію $f(z)=\dfrac{z^2+2z}{(z+1)^3}$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0=1$.

Завдання 3. Обчислити інтеграли: а) за допомогою інтегральної формули Коші;
б) за допомогою лишків.

21. а) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z\,dz}{(z^2-1)^2}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=\frac{3}{2}}\frac{z+5}{(z-4)(z-3)^2}\,dz$.

22. а) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{(2+\sin z)\,dz}{(z+2i)z}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z+2i|=3}\frac{z^4+1}{z^2(z^2+9)}\,dz$.

23. а) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z dz}{z^2-1}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3}\frac{z^4}{(z^2-9)(z-i)}\,dz$.

24. а) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{\cos z dz}{z^2-\pi^2}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^8}{(z^2-1)^2}\,dz$.

25. а) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{\cos z dz}{(z-i)^2}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=5}\frac{e^z}{z^2(z-i\pi)}\,dz$.

26. а) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=4}\frac{e^z dz}{z(1-z)}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}\,dz$.

27. а) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=\frac{1}{2}}\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\,dz$.

28. а) $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-3|=1}\frac{e^z dz}{(z-1)(3-z)}$; б) $\oint\limits_{|z|=\pi}\frac{\cos z}{z\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}dz$.

29. а) $\oint\limits_{|z-1|=4}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}dz}{z^2-1}$; б) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz$.

30. а) $\oint\limits_{|z-i|=2}\frac{(e^z+2)dz}{(z^2+4)^2}$; б) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{(z-3)(z^4-1)}dz$.

Завдання 4. В задачах №№ 31-40: а) знайти зображення за заданим оригіналом; б) відновити оригінал за заданим зображенням.

31. а) $f(t)=\begin{cases}2-t, & 0<t<2,\\ 2t-4, & 2<t<3,\\ 0, & t<0, \quad t>3\end{cases}$; б) $F(p)=\frac{2p-1}{p^2+2p+7}e^{-p/2}$.

32. а) $f(t)=\frac{\sin^2 t}{t^2}$; б) $F(p)=\frac{2p+1}{(p+2)(p-1)^2}$.

33. а) $f(t)=(t-3)e^{5t-5}\eta(t-1)$; б) $F(p)=\frac{1}{(p+1)(p+3)^3}$.

34. а) $f(t)=\begin{cases}2t, & 0<t<3,\\ t-3, & 3<t<6,\\ 0, & t<0, \quad t>6\end{cases}$; б) $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}$.

35. а) $f(t)=\frac{\sin^2 t}{t}$; б) $F(p)=\frac{p+3}{p^2+8p+17}e^{-4p}$.

36. а) $f(t)=e^{-2t+10}\sin^2(t-5)\eta(t-5)$; б) $F(p)=\frac{2p+3}{(p-1)(p^2+4)}$.

37. а) $f(t)=\begin{cases}t, & 0<t<2,\\ 4-t, & 2<t<4,\\ 0, & t<0, \quad t>4\end{cases}$; б) $F(p)=\frac{2+p}{p^2+4p+5}e^{-5p}$.

38. а) $f(t)=\dfrac{\sin^3 t}{t}e^{-2t}$; б) $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2-2p+5}e^{-p}$.

39. а) $f(t)=t\sin^3(2t-2)\eta(t-1)$; б) $F(p)=\dfrac{3p-2}{p^2-4p+10}e^{-3p}$.

40. а) $f(t)=e^{-2t}\dfrac{1-\cos t}{t}$; б) $F(p)=\dfrac{p+10}{p^3-6p^2+10p}$.

Завдання 5. Розв’язати задачу Коші.

41. $\ddot{x}-3\dot{x}+2x=2e^t\cos\dfrac{t}{2},\quad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=0$.

42. $\ddot{x}-2\dot{x}+x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}2, & t>3,\\ -1, & 1<t<3,\\ 0, & t<1.\end{cases}$

43. $\ddot{x}-9x=\sin t-\cos t,\quad x(0)=-3,\quad \dot{x}(0)=2$.

44. $\ddot{x}-4x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}2, & t>3,\\ 1, & 1<t<3,\\ 0, & t<1.\end{cases}$

45. $\ddot{x}+4x=2\sin 2t,\quad x(0)=-1,\quad \dot{x}(0)=0$.

46. $\ddot{x}-x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}-1, & t>2,\\ 2, & 0<t<2,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

47. $\ddot{x}+4x=4e^{2t}+4t^2,\quad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=2$.

48. $\ddot{x}-2\dot{x}-3x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}1, & t>4,\\ 2, & 2<t<4,\\ 0, & t<2.\end{cases}$

49. $\ddot{x}+\dot{x}+x=t^2+2t,\quad x(0)=4,\quad \dot{x}(0)=-2$.

50. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & t > 4, \\ 2, & 2 < t < 4, \\ 0, & t < 2. \end{cases}$

Завдання 6. Розв’язати задачу Коші.

51. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x + y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

52. $\begin{cases} \dot{x} - 2x - 4y = \cos t, \\ \dot{y} + x + 6y = \sin t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$

53. $\begin{cases} \dot{x} - x - 2y = t, \\ \dot{y} - 2x - y = t, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 4.$

54. $\begin{cases} \dot{x} + 5x - 2y = e^{t}, \\ \dot{y} - x + 6y = e^{-2t}, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$

55. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^{t}, \end{cases} \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 2.$

56. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

57. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 4x - y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

58. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

59. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

60. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

Завдання 7. Розв’язати задачу.

61. У ящику перебувають 15 тенісних м'ячів, з яких 9 нових. Для першої гри навмання беруть три м'ячі, які після гри повертають в ящик. Для другої гри також навмання беруться три м'ячі. Знайти ймовірність того, що всі м'ячі, взяті для другої гри, нові.

62. Серед 18 квітів є 5 троянд. Випадковим чиним формують два букети по 9 квітів у кожному. Знайти ймовірність того, що в одному з букетів буде дві троянди, а в іншому – три.

63. Серед студентів-археологів, що проходять літню практику, 70% першокурсників й 30% студентів другого курсу. Серед першокурсників 10% дівчат, а серед другокурсників їх 5%. Усі дівчата по черзі допомагають на кухні. Знайти ймовірність того, що у випадково обраний день на кухні буде чергувати першокурсниця.

64. Студент знає відповіді на 40 питань з 60, що входять до складу екзаменаційних білетів. Кожен білет складається з трьох питань. Знайти ймовірність того, що серед питань взятого навмання білета буде хоча б одне, на яке студент здатен відповісти.

65. В одній урні міститься 4 білі й 8 чорних куль, а в іншій – 3 білі й 9 чорних. З кожної урни навмання витягли по одній кулі. Знайти імовірність того, що кулі будуть різних кольорів.

66. Три мисливці одночасно вистрілили по вовку, який був вбитий однією кулею. Ймовірності влучення для кожного з мисливців відповідно дорівнюють 0,2, 0,4 и 0,6. Яка ймовірність того, що вовка вбив другий мисливець?

67. В урні знаходяться 5 білих, 3 чорні й 7 червоних куль. Навмання витягають одразу три кулі. Знайти ймовірність того, що серед них буде не менш двох білих.

68. На трьох верстатах в однакових і незалежних умовах виробляються деталі одного виду. На першому верстаті виробляють 10%, на другому – 30%, а на третьому – 60% усіх деталей. Ймовірність бути бездефектною для деталі, яка вироблена на першому верстаті, дорівнює 0,7, на другому верстаті – 0,8, на третьому – 0,9. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана деталь буде бездефектною.

69. В кожній з двох урн знаходяться 5 білих й 10 чорних куль. З першої урни навмання витягли одну кулю й переклали її у другу урну, після чого кулі перемішали й з другої урни навмання витягли одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля чорна.

70. Стрілець робить чотири постріли по мішені. Ймовірності попадання при першому і другому пострілах дорівнюють 0,8, а при третьому і четвертому – 0,7. Знайти ймовірність того, що стрілець зробить не більш двох промахів.

Завдання 8. Розв’язати задачу.

71. Текст із 2000 літер передається по телеграфу. Ймовірність помилки при передаванні однієї літери складає 0,002. Знайти ймовірність того, що при передаванні цього тексту виявиться не менш як дві помилки.

72. На низці 6 ключів, причому до замка підходить тільки один з них. Яка ймовірність того, що при відкритті замка буде зроблено не більш трьох спроб, якщо кожен з ключів може бути випробуваний тільки один раз?

73. Баскетболіст, виконуючи кидок, може влучити м’ячем у кошик з імовірністю 0,8. Зроблено 10 кидків. Яка ймовірність того, що м’яч влучив у кошик не менше 9 разів?

74. Яка ймовірність того, що двоє з 500 навмання вибраних осіб народилися 27 липня?

75. 30% куль, що містяться в урні – білого кольору. Навмання, по одній, з урни витягують 6 куль, причому кожна з куль, що вийнята, повертається до урни і кулі ретельно перемішуються. Знайти ймовірність того, що 4 вийнятих кулі будуть білого кольору.

76. Ймовірність появи деякої події у кожному з 10 000 незалежних випробувань складає 0,75. Знайти ймовірність того, що модуль відхилення відносної частоти появи події від її імовірності буде не більше, ніж 0,001.

77. Скільки необхідно провести випробувань, щоб з імовірністю 0,9 можна було стверджувати, що частота певної події буде відрізнятися по модулю від його ймовірності, яка дорівнює 0,4, не більше, ніж на 0,1?

78. Три монети підкидають 6 разів. Знайти імовірність того, що не менш двох разів випадуть 2 герби й решка.

79. У групі з 1000 виробів містяться 10 дефектних. Знайти імовірність того, що серед 50 виробів, які вибрані навмання з цієї групи, рівно 3 виявляться дефектними.

80. Імовірність того, що людина білява, дорівнює 0,2. Знайти імовірність того, що серед 500 службовців деякого підприємства виявляться не менш 410 і не більш 430 осіб з темним й русявим волоссям.

Завдання 9. Розв’язати задачу.

81. Заданий закон розподілу дискретної випадкової величини X

x_i	6	9	x_3	12	13
p_i	0,16	p_2	0,17	0,1	0,37

Знайти $x_3, p_2, D(X), \sigma(X)$, якщо $M(X) = 10{,}47$.

82. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \frac{1}{9}(x-1)^2, & 1<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Знайти: а) диференціальну функцію $f(x)$; б) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

83. Заданий закон розподілу дискретної випадкової величини X

x_i	x_1	5	6	9	10
p_i	0,1	p_2	0,15	0,3	0,25

Знайти p_2, ціле x_1 $(x_1 < x_2)$ й $M(X)$, якщо $D(X) = 6{,}81$.

84. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^3+x}{10}, & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Знайти: а) диференціальну функцію $f(x)$; б) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

85. Заданий закон розподілу дискретної випадкової величини X

x_i	9	10	11	x_4	18
p_i	0,07	0,32	p_3	0,36	0,15

Знайти $x_4, p_3, D(X), \sigma(X)$, якщо $M(X) = 12{,}31$.

86. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ a(x-3)^2, & 3<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$$

Знайти: а) інтегральну функцію $F(x)$; б) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

87. Заданий закон розподілу дискретної випадкової величини X

x_i	2	3	x_3	6	7
p_i	0,15	p_2	0,3	0,15	0,2

Знайти p_2, ціле x_3, $M(X)$, якщо $D(X) = 3{,}01$.

88. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2 - x, & 0 \le x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти: а) диференціальну функцію $f(x)$; б) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

89. Заданий закон розподілу дискретної випадкової величини X

x_i	1	3	4	x_4	7
p_i	0,15	0,2	p_3	0,3	0,25

Знайти p_3, ціле x_4, $M(X)$, якщо $D(X) = 4{,}51$.

90. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \dfrac{a}{(x-1)^2 + 9}, & 1 \le x \le 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти: а) інтегральну функцію $F(x)$; б) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Завдання 10. Розв'язати задачу.

91. При випробуванні легованої сталі на вміст вуглецю ймовірність того, що у випадково взятій пробі відсоток вуглецю перевищить допустимий рівень, дорівнює 0,01. Вважаючи застосовним закон рідкісних явищ, обчислити, скільки в середньому необхідно випробувати зразків, щоб з ймовірністю 0,95 зазначений ефект спостерігався принаймні 1 раз.

92. У групі з 10 спортсменів 6 майстрів спорту. Випадковим чином відбирають 3-х спортсменів. Скласти закон розподілу і знайти математичне сподівання випадкової величини X – числа майстрів спорту з відібраних спортсменів.

93. Деяка система в стаціонарному режимі роботи дає в середньому 15 збоїв за 1000 годин. Знайти ймовірність безвідмовної роботи системи протягом 10 годин.

94. Стрілянина ведеться з постійної позиції в заданому напрямку. Середня дальність польоту снаряда дорівнює 120 км. Вважаючи, що дальність польоту снаряда є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім квадратичним відхиленням 3 км, знайти відсоток пострілів, що дають переліт від 6 до 9 км.

95. Фірма, що займається продажем товарів за каталогом, щомісячно отримує поштою замовлення. Число цих замовлень є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім квадратичним відхиленням 560. У 90% випадків число щомісячних замовлень перевищує 12 439. Знайти середнє число замовлень, що фірма отримує за місяць.

96. Ймовірність безвідмовної роботи кожного з чотирьох пристроїв протягом певного проміжку часу дорівнює 0,9. Скласти закон розподілу випадкової величини $\boldsymbol{X}$ – числа безвідмовно працюючих пристроїв. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини $\boldsymbol{X}$.

97. Середній час безвідмовної роботи пристрою складає 750 годин. Яка ймовірність того, що пристрій неперервно пропрацює не менш 1000 годин?

98. Ймовірність помилки автоматизованої системи ідентифікації особи по відбитках пальців складає 0,002. Перевірено 1000 чоловік. Побудувати ряд розподілу випадкової величини $\boldsymbol{X}$ – числа збоїв системи. Знайти $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ і визначити ймовірність того, що величина $\boldsymbol{X}$ прийме значення в межах від 2 до 4.

99. Дальність до цілі округляється до 10 м. Визначити середню квадратичну помилку округлення і ймовірність отримання помилки не більше 5 м.

100. Хвилинна стрілка електричного годинника переміщається стрибком в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, який відрізняється від істинного не більше, ніж на 20 секунд.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ, ЇЇ ПОДАННЯ І ПЕРЕВІРКА

Виконана контрольна робота переписується в окремий зошит. Розв’язки задач наводяться зі збереженням номерів задач, у порядку зростання цих номерів. Перед розв’язком кожної задачі треба повністю виписати її умову. На обкладинку зошита слід наклеїти заповнений реєстраційний бланк (вказати номер контрольної роботи, назву дисципліни, групу і факультет, прізвище, ім'я та по батькові, номер залікової книжки, домащню адресу). Оформлена відповідним чином робота реєструється у деканаті. Її необхідно подати на кафедру вищої математики завчасно, але не пізніше як за 10 днів до початку екзаменаційної сесії. **Номер варіанта повинен збігатися з *двома* останніми цифрами номера залікової книжки**. Номери варіантів і відповідних задач наведені у таблиці (**додаток 1**). Після перевірки викладач робить висновок про те, вірно чи невірно виконана робота, з відповідним надписом на обкладинці. Якщо робота виконана не повністю чи невірно, то викладач вказує номери відсутніх або невірно розв’язаних задач і, якщо необхідно, робить свої зауваження у вигляді короткої рецензії. Роботи з не усіма задачами, або ж з такими, що повністю або частково не відповідають даному варіанту, вважаються виконаними невірно. Студент повинен виправити *усі* помилки у тому ж зошиті *після* рецензії викладача у розділі “Робота над помилками” і повернути роботу у найкоротший термін. Виправлення у перевіреній роботі поверх позначок викладача не допускаються. Студент може бути допущений до захисту контрольної роботи, порядок якого визначається викладачем, тільки після повторної перевірки виправлених помилок. На екзамен (залік) допускаються тільки студенти із захищеною роботою.

Додаток 1

Склад варіантів контрольної роботи

Номер варіанта	Номери задач								
00	6	16	24	35	46	51	66	74	85	96
01	4	17	23	39	50	56	64	72	89	100
02	3	14	29	36	45	57	63	79	86	95
03	9	13	28	31	41	54	69	78	81	91
04	1	20	30	33	43	55	61	80	83	93
05	10	12	22	32	49	53	70	73	82	99
06	2	18	21	38	42	60	62	71	88	92
07	8	19	27	34	48	52	68	77	84	98
08	7	15	26	37	47	58	67	76	87	97
09	5	11	25	40	44	59	65	75	90	94
10	4	20	27	33	43	54	63	77	83	93
11	1	12	21	37	45	56	62	71	87	95
12	9	19	25	31	41	55	69	75	81	91
13	7	17	23	34	47	59	67	73	84	97
14	5	16	22	40	50	58	66	72	90	100
15	8	14	30	38	46	57	64	80	88	96
16	6	18	24	35	48	60	68	74	85	98
17	10	13	26	32	44	52	70	76	82	94
18	3	15	29	39	49	51	65	79	89	99
19	2	11	28	36	42	53	61	78	86	92
20	5	16	26	38	45	60	66	76	90	95
21	2	19	29	32	43	57	69	79	82	93
22	9	12	22	39	44	56	62	72	89	94
23	4	17	27	34	47	54	67	77	84	97
24	1	20	30	31	49	51	70	80	81	99
25	6	15	25	37	46	52	65	75	87	98
26	7	14	24	36	42	53	64	74	86	92
27	8	13	23	35	48	55	63	73	85	96
28	3	18	28	33	41	58	68	78	83	91
29	10	11	21	40	50	59	61	71	88	100
30	5	16	26	31	45	54	66	76	81	95
31	4	15	25	32	50	56	65	75	82	100
32	7	20	28	36	46	55	70	78	86	96
33	3	14	24	33	41	60	64	74	83	91
34	9	19	30	39	43	57	69	80	89	93
35	6	17	27	35	48	53	67	77	85	98
36	2	11	22	38	47	52	61	72	88	97
37	10	18	29	40	44	58	68	79	90	94
38	1	12	23	34	42	59	62	73	84	92
39	8	13	21	37	49	51	63	71	87	99
40	6	14	27	34	47	51	64	77	84	97
41	5	20	25	33	50	59	70	75	83	100
42	2	13	28	37	46	54	63	78	87	98
43	10	17	24	32	41	58	67	74	82	91
44	1	15	29	38	45	53	65	79	88	95

45	4	12	23	35	42	55	62	73	85	92
46	3	16	26	40	44	52	66	76	90	94
47	8	18	22	36	48	57	68	72	86	96
48	9	11	30	39	43	56	61	80	89	93
49	7	19	21	31	49	60	69	71	81	99
50	10	12	21	37	48	53	62	71	87	98
51	9	18	22	38	41	54	68	72	88	91
52	8	19	23	36	46	55	69	73	86	96
53	7	17	25	35	45	56	67	75	85	95
54	1	11	30	39	44	57	61	80	89	94
55	5	15	26	33	49	60	65	76	83	99
56	4	14	27	32	43	58	64	77	82	93
57	3	13	28	31	50	59	63	78	81	100
58	2	20	29	40	47	52	70	79	90	97
59	6	16	24	34	42	51	66	74	84	92
60	9	20	21	35	48	51	70	71	85	98
61	3	18	24	37	47	52	68	74	87	97
62	5	17	27	33	50	59	67	77	83	100
63	6	14	22	39	44	55	64	72	89	94
64	8	16	25	31	43	56	66	75	81	93
65	10	19	29	38	42	57	69	76	88	92
66	7	11	23	36	46	53	61	73	86	96
67	4	15	26	32	41	58	65	79	82	91
68	1	13	30	34	45	54	63	80	84	95
69	2	12	28	40	49	60	62	78	90	99
70	10	16	27	32	46	58	66	77	82	96
71	6	17	26	39	41	56	67	76	89	91
72	7	20	22	36	47	59	70	72	86	97
73	1	11	29	35	45	57	61	79	85	95
74	9	19	23	34	48	60	69	73	84	98
75	8	18	24	33	50	55	68	74	83	100
76	2	12	30	38	42	54	62	80	88	92
77	3	13	28	40	44	53	63	78	90	94
78	5	15	25	31	43	52	65	75	81	93
79	4	14	21	37	49	51	64	71	87	99
80	8	17	21	36	46	54	67	71	86	96
81	10	11	23	37	48	55	61	73	87	98
82	6	20	24	33	43	51	70	74	83	93
83	9	16	22	38	47	60	66	72	88	97
84	5	19	25	39	50	53	69	75	89	100
85	7	18	27	40	49	52	68	77	90	99
86	1	12	30	35	45	56	62	80	85	95
87	3	15	28	31	41	57	63	78	81	91
88	4	14	26	32	44	58	65	76	82	94
89	2	13	29	34	42	59	64	79	84	92
90	8	19	28	38	44	54	69	78	88	94
91	4	16	21	34	42	52	66	71	84	92
92	10	11	29	36	47	57	61	79	86	97
93	3	13	27	31	50	60	63	77	81	100

94	**7**	**12**	**23**	**35**	**46**	**56**	**62**	**73**	**85**	**96**
95	**5**	**14**	**22**	**37**	**45**	**55**	**64**	**72**	**87**	**95**
96	**6**	**20**	**26**	**40**	**49**	**59**	**70**	**76**	**90**	**99**
97	**1**	**15**	**30**	**32**	**43**	**53**	**65**	**80**	**82**	**93**
98	**2**	**17**	**25**	**33**	**48**	**58**	**67**	**75**	**83**	**98**
99	**9**	**18**	**24**	**39**	**41**	**51**	**68**	**74**	**89**	**91**

Додаток 2

Таблиця деяких основних зображень

ОРИГІНАЛ	ЗОБРАЖЕННЯ
Одинична функція Хевісайда $\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$	$\dfrac{1}{p}$
Узагальнена одинична функція $\eta(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0,\\ 1, & t\ge t_0\end{cases}$	$e^{-t_0 p}\cdot\dfrac{1}{p}$
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin at$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$
$\cos at$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$
$shat$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
$chat$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$

$\sin^2 at$	$\dfrac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$
$\cos^2 at$	$\dfrac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}$
$\sin at \cdot \cos bt$	$\dfrac{a(p^2+a^2-b^2)}{[p^2+(a-b)^2][p^2+(a+b)^2]}$
$t \cdot \sin at$	$\dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
$t \cdot \cos at$	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
$t \cdot shat$	$\dfrac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$
$t \cdot chat$	$\dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$
$e^{at} \cdot \sin bt$	$\dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$
$e^{at} \cdot \cos bt$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
$e^{at} \cdot sh\ bt$	$\dfrac{b}{(p-a)^2-b^2}$
$e^{at} \cdot ch\ bt$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2-b^2}$
$e^{at} t^n$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\dfrac{\sin at}{t}$	$\dfrac{\pi}{2} - arctg\dfrac{p}{a}$

Додаток 3

Таблиця значень функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,3989**	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	**0,2420**	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	**0,0540**	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	**0,0044**	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0008	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 4

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,00000**	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	**0,34134**	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	**0,47725**	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	**0,49865**									
3,1	49903									
3,2	49931									
3,3	49952									
3,4	49966									
3,5	49977									
3,6	49984									
3,7	49989									
3,8	49993									
3,9	49995									
4,0	**0,499968**									
4,5	499997									
5,0	**0,49999997**									