

## ЧАСТИНА 3. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛЕЙ

Отримання математичної моделі складного об'єкта не є кінцевою метою моделювання. Модель потрібна для розв'язання практичних задач аналізу процесів, які відбуваються в об'єкті моделювання, оцінювання його характеристик, проектування тощо. Для цього застосовуються різноманітні аналітичні методи, коли результат отримується шляхом перетворень моделі на основі правил і законів відповідного розділу математики, або числові, коли результат отримується шляхом обчислень за допомогою певних комп'ютерних алгоритмів.

### 8 АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

В переважній більшості випадків аналітичного точного розв'язання задач моделювання проблема зводиться до розв'язання різних типів диференціальних рівнянь. Слід зазначити, що аналітичні методи можна та зручно використовувати не в усіх випадках, але певна кількість типових задач може бути зведена до випадків, коли точний аналітичний розв'язок відшукати можливо. Цей розділ присвячений загальній постановці задач моделювання, які зводяться до математичних моделей з диференціальними рівняннями. В тих випадках, коли скористатися аналітичними методами з певних причин неможливо, слід застосовувати чисельні методи, огляд яких наведено в дев'ятому розділі.

Моделі, які розглядаються у цьому розділі, переважно пов'язані із задачами механічних і теплових процесів, проте з урахуванням аналогії і подібності фундаментальних процесів вони можуть бути цілком успішно застосовані для процесів іншої фізичної природи.

#### 8.1 Застосування звичайних диференціальних рівнянь до моделювання технічних систем

##### 8.1.1 Деякі відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь

Нехай задано  $k$  рівнянь

$$F_i(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{m_1}; x_2, \dot{x}_2, \dots, x_2^{m_2}; \dots; x_k, \dot{x}_k, \dots, x_k^{m_k}) = 0, \quad i = \overline{1, k},$$

які зв'язують незалежну змінну  $t$ ,  $k$  шуканих функцій  $x_1, \dots, x_k$  та їх похідні до порядків, відповідно,  $m_1, \dots, m_k$ . Потрібно знайти шукані функції, причому число рівнянь зазвичай дорівнює кількості невідомих функцій.

У більшості практичних випадків задану систему можна звести до вигляду:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.1)$$

яка називається системою звичайних диференціальних рівнянь в **нормальній формі Коші**. Тут  $t$  – незалежна змінна;  $x_i(t)$  – шукані функції;  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  – функції, які визначені і неперервні за всіма аргументами в деякій області  $(n+1)$ -вимірного простору.

Число  $n$  називається порядком системи. Вводячи позначення  $x = (x_1, \dots, x_n)^*$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)^*$ , ( $*$  – знак транспонування),  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ , систему (8.1) можна записати також у векторній формі  $\dot{x} = f(t, x)$ .

**Приклад.** Співвідношення

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(\sin \ln t + \cos \ln t); \\ \dot{x}_2 = x_1(\sin \ln t + \cos \ln t); \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 = \sin x_2 + x_3^2; \\ x_2 = x_1 x_2 + \cos x_3; \\ x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{cases}$$

є системами диференціальних рівнянь відповідно другого і третього порядків.

Розв'язком системи (8.1) на інтервалі  $(a, b)$  називається будь-яка сукупність  $n$  функцій  $x_i = \varphi_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), які визначені і неперервно диференційовні на  $(a, b)$ . Ці функції перетворюють рівняння (8.1) в тотожності на визначеному інтервалі. Так, сукупність функцій  $x_1 = C_1 e^{t \sin \ln t} + C_2 e^{-t \sin \ln t}$ ;  $x_2 = C_1 e^{t \sin \ln t} - C_2 e^{-t \sin \ln t}$  є розв'язком системи диференціальних рівнянь прикладу а) на інтервалі  $(0, +\infty)$  при будь-яких значеннях постійних  $C_1$  і  $C_2$ . Система диференціальних рівнянь має, взагалі кажучи, нескінченну множину розв'язків.

З геометричної точки зору кожний розв'язок системи (8.1) можна розглядати як криву в  $(n+1)$ -вимірному просторі  $(t, x_1, \dots, x_n)$ , що її називають **інтегральною кривою** системи (8.1). Загальним розв'язком системи (8.1) в області простору  $(t, x_1, \dots, x_n)$  називають сукупність функцій

$$x_i = \varphi_i(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.2)$$

залежних від довільних постійних  $C_1, C_2, \dots, C_n$  і таких, що:

1) в околі будь-якої точки  $(t, x_1, \dots, x_n) \in G$  систему рівнянь (8.2) можна розв'язати щодо  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , тобто

$$C_j = \psi_j(t, x_1, \dots, x_n), \quad (j = \overline{1, n}); \quad (8.3)$$

2) при цих значеннях  $C_j$  функції (8.2) тотожно задовольняють систему (8.1).

**Окремим розв'язком** називається розв'язок, отриманий із загального при конкретних значеннях констант  $C_1, \dots, C_n$ .

Будемо говорити, що для системи (8.1) поставлена задача Коші, якщо потрібно знайти розв'язки системи, які задовольняють початкові умови

$$x_1(t_0) = x_{1_0}, \dots, x_n(t_0) = x_{n_0},$$

де  $t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0}$  – задані числа, тобто необхідно знайти інтегральну криву системи, що проходить через точку  $(t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0})$   $(n+1)$ -вимірного простору.

Якщо знайдено загальний розв'язок системи (8.1), то, як видно з формул (8.2) і (8.3), розв'язок задачі Коші буде мати вигляд

$$x_i(t, t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0}) = \varphi_i(t, \psi_1(t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0}), \dots, \psi_n(t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0})), \quad (i = \overline{1, n}).$$

Умови **існування та єдиності** розв'язку задачі Коші даються нижченаведеною теоремою.

**Теорема Пікара.** Нехай функції неперервні за всіма аргументами в замкненій області

$$G_0 : \left\{ |t - t_0| \leq a, \left| x_i - x_{i_0} \right| \leq b \quad (i = \overline{1, n}) \right\},$$

де  $a, b$  – додатні постійні, і задовольняють в цій області **умову Ліпшиця**, тобто

знайдеться постійна  $L > 0$  така, що для будь-яких точок  $(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in G_0$  і  $(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in G_0$  мають місце нерівності

$$\left| f_i(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - f_i(t, x_1, \dots, x_n) \right| \leq L \sum_{k=1}^n \left| \bar{x}_k - x_k \right| \quad (i = \overline{1, n}). \quad \text{Тоді існує єдиний}$$

розв'язок системи (8.1), що задовольняє початкові умови  $x_i(t_0) = x_{i_0}, (i = \overline{1, n})$  і

який визначено, принаймні, на інтервалі  $|t - t_0| \leq h$ , де  $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ , а постійна

$M$  така, що  $f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq M, (i = \overline{1, n}) (t, x_1, \dots, x_n) \in G_0$ .

**Лінійні системи**

Лінійні системи описуються лінійними диференціальними рівняннями. Візьмемо для прикладу модель динаміки замкненої системи із завдання № 7 глави 3. Така система описується системою лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \delta = x - y \\ u = \int_0^t d(t) dt \\ y = 2u + 3 \frac{du}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \delta = x - y \\ \frac{du}{dt} = d(t) \\ \frac{du}{dt} = y - 2u - 3 \\ \frac{dy}{dt} = v \end{cases} .$$

Нехай у загальному випадку задана система лінійних диференціальних рівнянь у векторній формі

$$\dot{x} = Ax, \quad (8.4)$$

де  $A$  – квадратна постійна матриця розмірності  $n \times n$ .

Розв'язок системи (8.4) будемо шукати у вигляді

$$x = e^{\lambda t} C, \quad (8.5)$$

де  $C$  – деякий постійний вектор-стовпець, координати якого  $C_1, \dots, C_n$  залежать від вибору початкових умов системи (8.4), і  $\lambda$  – постійне число.

При підстановці розв'язка (8.5) в систему (8.4) та виконанні відповідних перетворень, отримаємо

$$(A - \lambda E)C = 0. \quad (8.6)$$

Зауважимо, що  $\|C\| \neq 0$ , а  $E$  – одинична матриця порядку  $n$ . Для того, щоб існував нетривіальний розв'язок системи (8.6) щодо вектора  $C$ , необхідно і достатньо, щоб

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (8.7)$$

Це співвідношення є алгебраїчним рівнянням  $n$ -го степеня щодо  $\lambda$ . Його корені  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  є власними числами матриці  $A$ . Для кожного  $\lambda = \lambda_j$  отримаємо розв'язок  $C = C_j$  системи (8.6). Можна взяти як коефіцієнти вектора  $C_j$  алгебраїчні доповнення елементів будь-якого рядка визначника (8.7) при  $\lambda = \lambda_j$ , якщо не всі вони дорівнюють нулю.

Отже, окремими розв'язками системи (8.4) будуть

$$x = \varphi(t), (j = \overline{1, n}) . \quad (8.8)$$

Щоб отримати загальний розв'язок системи (8.4), візьмемо лінійну комбінацію окремих розв'язків (8.8):

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j = \sum_{j=1}^n \gamma_j e^{\lambda_j t} C_j. \quad (8.9)$$

Ця лінійна комбінація є загальним розв'язком системи (8.4) за умови  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , якщо  $i \neq j$  (точніше, кореням  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  рівняння (8.7) відповідають прості елементи матриці). У загальному випадку розв'язок (8.8) подамо у формі

$$x_j(t) = p_j(t) e^{\lambda_j t}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (8.10)$$

де  $p_j(t)$  – поліноми щодо  $t$ , степінь яких менше кратності кореня  $\lambda_j$ , а коефіцієнти поліномів є постійними векторами.

Розглянемо такі випадки:

1) всі корені  $\lambda_j$  мають від'ємну дійсну частину, тобто  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ ; тоді будь-який розв'язок системи (8.4) прямує до нуля при необмеженому зростанні часу  $t$ ;

2) існує принаймні один корінь  $\lambda_{j_0}$  такий, що  $\lambda_{j_0} > 0$ ; тоді відповідний йому розв'язок (8.8) необмежено зростає при будь-яких, навіть при як завгодно малих, значеннях координат вектора в початковий момент часу.

Наявність кратних коренів  $\lambda_j$  не змінює картини поведінки розв'язків системи (8.4), оскільки  $p_n(t) e^{\lambda t} \rightarrow 0$  якщо  $e^{\lambda t} \rightarrow 0$ .

Розіб'ємо всі корені  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , тобто всі власні числа матриці, на три групи:

1)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – власні числа з додатною дійсною частиною, 2)  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+s}$  – власні числа з нульовою дійсною частиною, 3)  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+s}$  – власні числа з від'ємною дійсною частиною.

Відомо, що існує особливе лінійне перетворення над вектором  $X = SY$ , при якому система (8.4) приводиться до такої:

$$\frac{dY_1}{dt} = S^{-1} A S Y, \quad (8.11)$$

де  $S^{-1}$  – матриця, обернена до  $S$ .

Розіб'ємо систему (8.11) на три підсистеми:

$$\frac{dY_1}{dt} = A_+ Y_1, \quad \frac{dY_2}{dt} = A_0 Y_2, \quad \frac{dY_3}{dt} = A_- Y_3, \quad (8.12)$$

де  $A_+$ ,  $A_0$ ,  $A_-$  – матриці, що відповідають зазначеним трьом групам власних чисел.

Вектор  $Y_1$  має розмірність  $k$ , і всі розв'язки системи рівнянь щодо  $Y_1$  зростають необмежено при  $t \rightarrow \infty$ , в той час як всі розв'язки системи щодо

вектора  $Y_3$  зменшуються і прагнуть до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Власні числа матриці  $A_0$  мають вигляд  $\lambda_j = i\mu_j$ . Окремий розв'язок, що відповідає такому  $\lambda_j$ , запишеться у формі

$$Y_{2j} = e^{jp_j t} C_j, \quad (8.13)$$

що описує одночастотні коливання. Загальний розв'язок для вектора-стовпця  $Y_2$  буде мати вигляд

$$Y_2 = \sum_{j=1}^n \gamma_j e^{jp_j t} C_{2j}, \quad (8.14)$$

якщо вважати, що  $\mu_j (j = 1, s/2)$  різні.

Розв'язок (8.14) описує складне коливання, що є результатом накладання одночастотних коливань. Ці коливання будуть періодичними, якщо частоти сумісні, тобто відношення  $\frac{\omega}{\omega_k}$  – раціональні, і майже періодичними, якщо частоти несумісні.

Таким чином, весь  $n$ -вимірний простір може бути розкладено в пряму суму підпросторів, і розв'язки в будь-якому підпросторі поведуться однаково чиним, а рух у всьому просторі складається з рухів в цих підпросторах.

Розглянемо систему нестационарних лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{X} = A(t)X. \quad (8.15)$$

Матриця, стовпцями якої є  $n$  лінійно незалежних розв'язків системи (8.15), називається фундаментальною матрицею цієї системи, а її визначник називається визначником Вронського або вронскіаном.

Властивості фундаментальної матриці:

1) визначник фундаментальної матриці в жодній точці не дорівнює нулю;  
 2) якщо  $Y_1(t)$  – фундаментальна матриця, а  $S$  – постійна невиворджена матриця  $Y_2(t) = Y_1(t)S$ , то тоді матриця  $Y_2(t)$  також буде фундаментальною;

3) якщо  $Y_1(t)$  і  $Y_2(t)$  – дві фундаментальні матриці системи (8.15), то тоді існує постійна невиворджена матриця  $S$  така, що  $Y_2(t) = Y_1(t)S$ ;

4) якщо  $Y(t)$  – фундаментальна матриця, а  $t_0$  – деяке число з області визначення (і неперервності), то тоді

$$\det Y(t) = \det Y(t_0) \cdot \exp \left[ \int_{t_0}^t \text{Sp} A(r) dr \right],$$

де  $SpA(t) = a_{11}(t) + \dots + a_{mm}^t(t)$  – слід матриці  $A(t)$  (формула Остроградського-Ліувілля).

Фундаментальна матриця  $Y(t)$ , яка задовольняє умову  $Y(t_0) = E$ , називається нормованою при  $t = t_0$ .

Загальний розв'язок у формі Коші виражається формулою

$$X(t, t_0, x_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0.$$

Розв'язок неоднорідної системи

$$\dot{X} = A(t)X + f(t) \quad (8.16)$$

при будь-якому виборі неперервної векторної функції  $f(t)$  може бути знайдено за формулою Коші:

$$X(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t Y(t)Y^{-1}(r)f(r)dr.$$

Візьмемо знову систему (8.15) з матрицею  $A(t)$ , неперервною, дійсною,  $2\pi$ -періодичною:  $A(t + 2\pi) = A(t)$ . І нехай  $Y(t)$  – фундаментальна матриця системи (8.15).

**Теорема Флоке.** Існує неособлива матриця перетворення така, що систему (8.15) з періодичними коефіцієнтами можна звести до системи з постійними коефіцієнтами  $\dot{Z} = BZ$ .

Так що  $Y(t) = \Phi(t)e^{Bt}$ . При цьому, оскільки  $\Phi(t)$  – періодична матриця, маємо:  $B = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{Y(2\pi)}{Y(0)}$ .

### Крайова задача

Задачі моделювання, в яких накладаються умови на розв'язок як у просторі (граничні умови), так і у часі (початкові умови), називають крайовими.

Для лінійної системи (8.15) розглянемо замість задачі Коші однорідну крайову задачу: знайти розв'язок  $x(t)$  системи (8.15), що задовольнить крайові умови

$$PX(a) + QX(b) = 0, \quad (8.17)$$

де матриці  $P, Q$  та числа  $a, b$  задані.

Нехай  $Y(t)$  – нормована при  $t = a$  фундаментальна матриця системи (8.15). Розв'язок крайової задачі шукаємо у вигляді  $X(t) = Y(t)C$ . З умови (8.17) випливає, що  $C$  визначається рівнянням  $(P + QY(b))C = 0$ .

Отже, крайова задача допускає нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли  $\det(P + QY(b)) = 0$ .

Розглянемо тепер неоднорідну крайову задачу

$$\dot{X} = A(t)X + f(t); \quad (8.18)$$

$$PX(a) + QX(b) = 0. \quad (8.19)$$

Припустимо, що  $\det(P + QY(b)) \neq 0$ . Функція  $G(t, s)$ , ( $t, s \in [a, b]$ ,  $t \neq s$ ) називається функцією Гріна крайової задачі (8.18), (8.19), якщо вона задовольняє умови:

$$1) \text{ при } t \in [a, s], t \in (s, b], \quad \frac{dG}{dt} = A(t)G;$$

$$2) PG(a, s) + QG(b, s) = 0 \text{ при всіх } s \in (a, b);$$

$$3) G(s+0, s) - G(s-0, s) = E.$$

З умови 1 і властивостей фундаментальної матриці випливає, що

$$G(t, s) = \begin{cases} Y(t)S(s), & t \in [a, s]; \\ Y(t)T(s), & t \in (s, b]. \end{cases}$$

З умов 2 і 3 отримуємо  $PS + QY(b)T = 0$ ,  $Y(S - T) = -E$ , звідки

$$S - T = Y^{-1}; \quad S(s) = -(P + QY(b))^{-1}QY(b)Y^{-1}(s);$$

$$T(s) = [E - (P + QY(b))^{-1}]QY(b)Y^{-1}(s).$$

Отже,  $G(t, s)$  однозначно визначається за формулою

$$G(t, s) = \begin{cases} -Y(t)(P + QY(b))^{-1}QY(b)Y^{-1}(s), & t \in [a, s]; \\ Y(t)[E - (P + QY(b))^{-1}]QY(b)Y^{-1}(s), & t \in (s, b]. \end{cases}$$

**Теорема.** Якщо  $\det(P + QY(b)) \neq 0$ , то неоднорідна крайова задача (8.18), (8.19) має єдиний розв'язок, що задається формулою

$$X(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds,$$

де  $G(t, s)$  – функція Гріна однорідної крайової задачі (8.15), (8.17).

### Різницеві системи

Дискретним аналогом диференціального рівняння є різницеве. Розглянемо систему стаціонарних різницевих рівнянь

$$X(k+1) = AX(k) \quad (8.20)$$



з початковими умовами

$$X(0) = X_0, \quad (8.21)$$

де  $k$  – номер дискретного значення аргументу.

Розв'язком задачі (8.20), (8.21) є числова послідовність  $\{X(k)\}_{k=0}^{\infty}$ , елементи, якої обчислюються за формулою

$$X(k) = A^k X(0) = S I^k S^{-1} X(0), \quad (8.22)$$

де  $I$  – жорданова форма матриці  $A$ . З формули (8.22) випливає, що власним числам матриці  $A$ , за модулем меншим за одиницю, відповідають розв'язки, що прямують до нуля при  $k \rightarrow \infty$ ; власним числам, за модулем більшим за одиницю, відповідають розв'язки, що необмежено зростають при  $k \rightarrow \infty$ ; якщо власне число за модулем дорівнює одиниці і є простим (або йому відповідає простий елементарний дільник), то відповідний йому розв'язок обмежений.

*Приклад.* Розглянемо систему

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} X(k), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

За запропонованою схемою маємо:

$$\begin{aligned} X(k) &= \begin{pmatrix} i-i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi k}{4} & -\sin \frac{\pi k}{4} & 0 \\ \sin \frac{\pi k}{4} & \cos \frac{\pi k}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \cos \frac{\pi(k-1)}{4} \\ -\sqrt{2} & \sin \frac{\pi(k-1)}{4} \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 8.1.2. Моделювання технічних систем диференціальними рівняннями

Для розв'язання будь-якої задачі, пов'язаної з аналізом динаміки систем, необхідно, насамперед, скласти математичну модель системи. Найпоширенішими математичними моделями є системи диференціальних рівнянь (звичайних чи з частинними похідними), які дають можливість проаналізувати динамічні властивості та поведінку складних систем.

Складні технічні системи містять в собі пружні системи технічних об'єктів (несучі системи, шпіндельні вузли, механізми руху), робочі процеси технічних об'єктів (процеси різання металів, процеси в приводах технічних систем, процеси тертя рухомих механізмів та ін.), замкнені технологічні системи та інші. Наприклад, технологічна система (ТС) утворюється еквівалентною пружною системою машини (верстата) і робочих процесів у їх взаємодії (рис. 8.1).

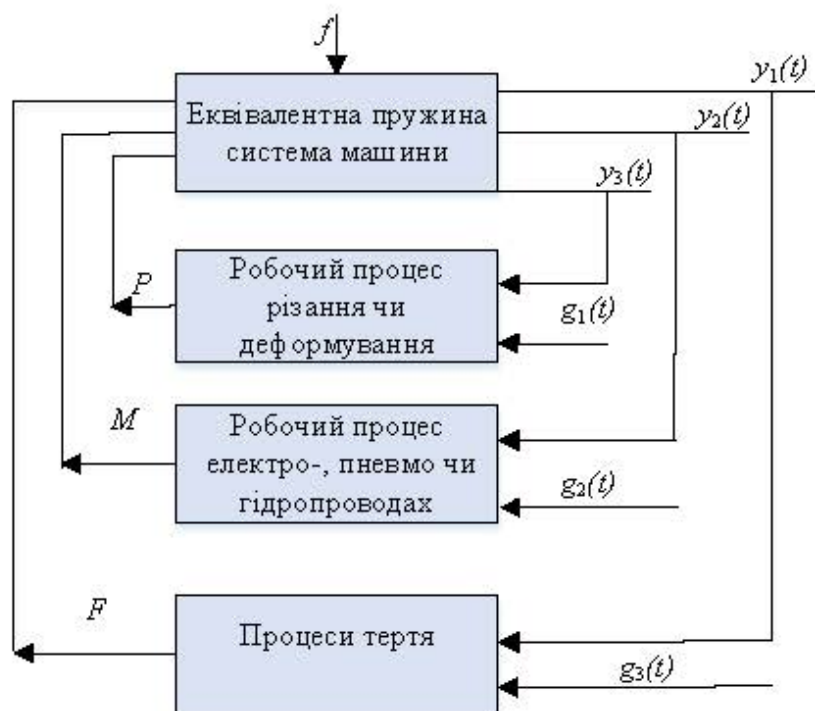


Рисунок 8.1 – Структурна схема технологічної системи

На рис.8.1 позначено:  $f(t)$  – зовнішній вплив на пружну систему;  $g(t)$  – задає вплив на робочі процеси;  $P, M, F$  – силовий вплив робочих процесів (відповідно сили різання, моменту двигуна, сили тертя) на пружну систему;  $y_j(t)$  – деформація еквівалентно-пружної системи.

Рівняння статички системи, в яких вплив і навантаження приймаються постійними, зазвичай є алгебраїчними рівняннями. Вони пов'язують узагальнені координати, які визначають систему, і дозволяють знайти положення будь-якого елемента системи або величину, що характеризує його стан (наприклад, температуру регульованої печі, положення регульовального органа, кількість поданого палива і т. д.).

Рівняння динаміки зазвичай є диференціальними або функціонально-диференціальними. Для систем з розподіленими параметрами динаміка системи описується рівняннями з частинними похідними. Вони визначають поведінку системи в перехідному процесі при дії збурювальних сил або після припинення їх дії.

Для складання рівнянь динаміки система розбивається на елементи (ланки). Для кожного з них складається відповідне рівняння на підставі того фізичного закону, який визначає процес, що протікає в даному елементі. Сукупність рівнянь динаміки, складених для всіх елементів системи, визначає поведінку системи.

У ряді випадків завдання складання диференціальних рівнянь процесів у системі полегшує застосування рівнянь Лагранжа другого роду, складених для узагальнених координат системи. Цей метод доцільно використовувати тоді, коли складання виразів кінетичної і потенційної енергій системи і дисипативної функції не становить труднощів.

У загальному випадку рівняння складаються на основі різних фізичних законів (Ньютона, Максвелла, Кірхгофа тощо). Складання рівнянь – дуже важке завдання, і в багатьох випадках його можна виконати тільки при тих чи інших припущеннях.

Диференціальні рівняння Лагранжа другого роду мають вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1; \\ \dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k; \end{array} \right.$$

де  $T$  – кінетична енергія системи;  $Q = (Q_1, \dots, Q_k)^*$  – вектор узагальнених сил;

$q = (q_1, \dots, q_k)^*$  – вектор узагальнених координат.

Кінетична енергія, взагалі кажучи, є функцією аргументів  $t, q_1, \dots, q_b, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k$ , причому компоненти вектора узагальненої швидкості входять в  $T$  зі ступенем не вище другого. Узагальнена сила може складатися з трьох різних сил: пружної сили, зумовленої зміною потенційної енергії; сили розсіювання або демпфувальної сили, спричиненої розсіюванням енергії; зовнішньої сили, прикладеної до системи.

### Приклади складання рівнянь

**Приклад 1.** Скласти рівняння руху динамічного гасителя коливань. На диск, що обертається з постійною кутовою швидкістю, впливає крутний елемент  $T_0 \sin \omega t \cdot C_{кр}$  (рис. 8.2).

Припустимо, що: 1) обидва маятника однакові; 2) маятники коливаються тільки в площині обертання; 3) у точках кріплення стрижнів маятників є в'язке тертя з коефіцієнтом загасання коливань  $C_{кр}$ ; 4) поле гравітаційних сил мале порівняно з полем відцентрових сил.

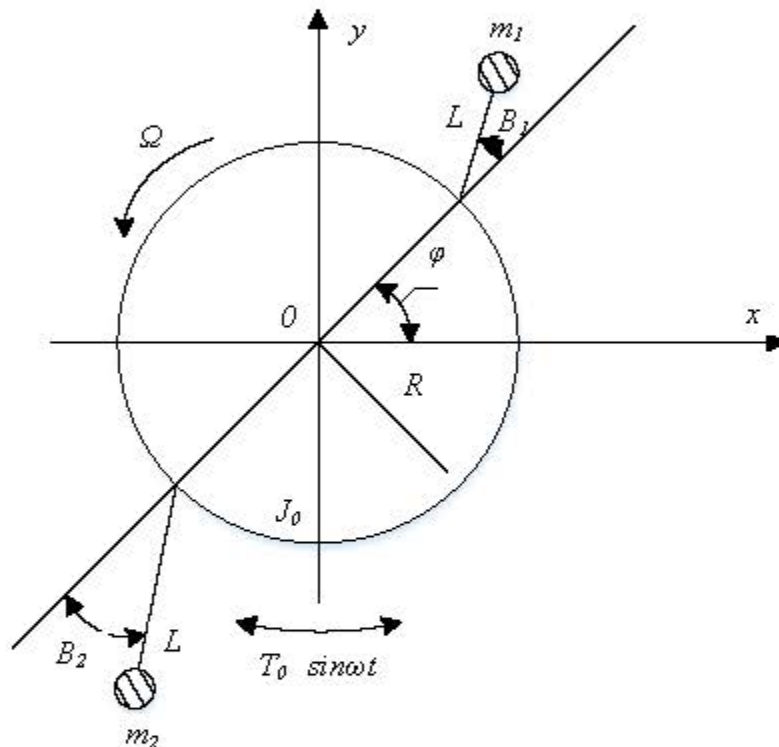


Рисунок 8.2 – Маятниковий динамічний поглинач

*Розв'язок.* Нехай система описується узагальненими координатами  $(\phi, \theta_1, \theta_2)$ . Енергетичні функції системи подамо у вигляді:

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - \text{кінетична енергія,}$$

$$D = \frac{1}{2} C_{кр} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \text{функція розсіювання,}$$

$$U = 0 - \text{потенційна функція.}$$

Координати  $(x, y)$  можна перетворити в узагальнені координати за допомогою співвідношень

$$x_1 = R \cos \phi + L \cos(\phi + \theta_1); \quad x_2 = R \cos \phi + L \cos(\phi + \theta_2);$$

$$y_1 = R \sin \phi + L \sin(\phi + \theta_1); \quad y_2 = R \sin \phi + L \sin(\phi + \theta_2).$$

В результаті перетворень кінетична енергія прийме вигляд

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m \left[ 2R^2 \dot{\phi}^2 + L^2 (\dot{\phi} + \dot{\theta}_1)^2 + L^2 (\dot{\phi} + \dot{\theta}_2)^2 + 2RL \dot{\phi} (\dot{\phi} + \dot{\theta}_1) \cos \theta_1 + 2RL \dot{\phi} (\dot{\phi} + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \right].$$

Оскільки

$$Q_4 = -\frac{\partial D}{\partial \phi} + T_0 \sin \varpi t = T_0 \sin \varpi t, \quad Q_{\theta_1} = -\frac{\partial D}{\partial \theta} = -C_k \dot{\theta}_1, \quad Q_{\theta_2} = -\frac{\partial D}{\partial \theta} = -C_k \dot{\theta}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = J_0 \dot{\phi} + 2m \left[ R^2 + L^2 + RL(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \right] \dot{\phi} + mL(L + R \cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + mL(1 + R \cos \theta_2) \dot{\theta}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = mL(L + R \cos \theta_1) \dot{\phi} + mL^2 \dot{\theta}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = mL(L + R \cos \theta_2) \dot{\phi} + mL^2 \dot{\theta}_2, \quad -\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0,$$

$$-\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = mRL \dot{\phi} (\dot{\phi} + \dot{\theta}_1) \sin \theta_1 - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = mRL \dot{\phi} (\dot{\phi} + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2,$$

то після спрощення рівняння Лагранжа прийме остаточний вигляд

$$\left\{ J_0 + 2m \left[ R^2 + L^2 + RL(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \right] \right\} \ddot{\phi} + mL(L + R \cos \theta_1) \ddot{\theta}_1 +$$

$$+ mL(L + R \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - mRL(2\dot{\phi} + \dot{\theta}_1) \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - mRL(2\dot{\phi} + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 = T_0 \sin \varpi t;$$

$$mL(L + R \cos \theta_1) \ddot{\phi} + mL^2 \ddot{\theta}_2 + mRL \dot{\phi}^2 \sin \theta_1 + C_{kp} \sin \dot{\theta}_1 = 0;$$

$$mL(L + R \cos \theta_2) \ddot{\phi} + mL^2 \ddot{\theta}_2 + mRL \dot{\phi}^2 \sin \theta_2 + C_{kp} \sin \dot{\theta}_2 = 0.$$

**Приклад 2.** Скласти рівняння руху механізму диференціала допоміжного руху верстата. На рис.8.3 показаний механізм диференціала.

Ведуче кінчне зубчасте колесо 1 і ведене кінчне зубчасте колесо 2 обертаються навколо нерухомих осей. Кінчне зубчасте колесо 3 (сателіт) передає обертання від колеса 1 до колеса 2. Колесо 3 вільно посаджено на вісь  $OC$ , що є частиною вигнутого кривошипа  $AOC$ , який обертається навколо нерухомої вертикальної осі. При наданні різних кутових швидкостей кривошипу  $AOC$  і колесу 1 можна отримати будь-яку кутову швидкість колеса 2. До кривошипа  $AOC$  прикладений обертальний момент, до валу колеса 1 – обертальний момент  $m_1$  і до валу колеса 2 – момент корисного опору  $m_2$ .

Колеса 1, 2 і 3 вважатимемо круглими однорідними дисками відповідно вагою  $P_1, P_2, P_3$  і радіусом  $r_1, r_2$  і  $r_3$  ( $r_1 = r_2$ ). Масою кривошипа  $AOC$  і силами опору руху можна знехтувати.

*Розв'язок.* З умови задачі випливає, що верстатний диференціал є системою з двома ступенями свободи. За незалежні узагальнені координати виберемо кут повороту  $\varphi_0$  кривошипа навколо вертикальної осі  $AOC$  і кут повороту  $\varphi_1$  колеса 1 навколо відповідної нерухомої осі. Кут повороту веденого колеса 2 позначений через  $\varphi_2$ .

Для обчислення узагальненої сили  $Q_{\varphi_0}$  задамо диференціалу (див. рис. 8.4) можливе переміщення  $\delta\varphi_0$  вважаючи, що  $\delta\varphi_0 = 0$ . Тоді  $\delta\varphi_2 = 2\delta\varphi_0$ . Обчислимо суму робіт активних сил на можливих переміщеннях, що відповідають можливим переміщенням  $\delta\varphi_0$ . Маємо  $\delta A = m_0\delta\varphi_0 - m_2\delta\varphi_2 = (m_0 - 2m_2)\delta\varphi_0$ , отже,  $Q_{\varphi_1} = m_1 + m_2$ . Аналогічно обчислюємо  $Q_{\varphi_2}$ . Оскільки  $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1$ , то  $\delta A = (m_1 + m_2)\delta\varphi_1$ . Звідси  $Q_{\varphi_2} = m_1 + m_2$ .

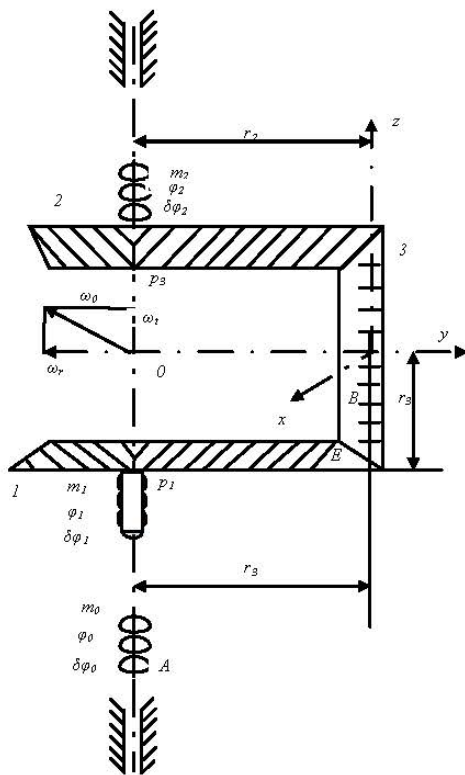


Рисунок 8.3 - Механізм диференціала

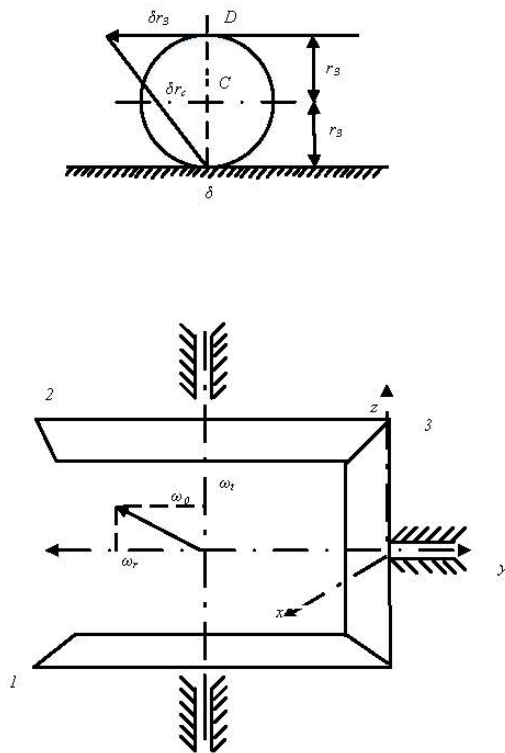


Рисунок 8.4 – Розрахункова схема диференціала

Переходимо до обчислення кінетичної енергії  $T$  верстатного диференціала, до складу якого входять три конічних зубчастих колеса 1, 2, 3:  $T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}$ . У свою чергу  $T^{(1)} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}_1^2$ ,  $T^{(2)} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}_2^2$ , де  $I_j$  – момент інерції колеса  $j$  щодо його осі обертання ( $j = 1, 2$ ).

Виберемо початок координат в центрі ваги колеса 3. Направимо координатні осі по головних осях інерції колеса 3, тоді

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} v_c^2 + \frac{1}{2} (I_{3x} \varpi_x^2 + I_{3y} \varpi_y^2 + I_{3z} \varpi_z^2),$$

де  $v_c^2$  – швидкість центра ваги  $C$  колеса 3;  $\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z$  – проекції абсолютної кутової швидкості  $\varpi_a$  колеса 3 на рухомі координатні осі  $x, y, z$ , з ними жорстко пов'язані осьові моменти інерції  $I_{3x}, I_{3y}, I_{3z}$ .

Для обчислення  $\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z$  потрібно визначити абсолютну кутову швидкість  $\varpi_a$  колеса 3. Колесо бере участь в переносному обертальному русі з кутовою швидкістю  $\varpi_c = \dot{\phi}_0$  навколо вертикальної осі і у відносному обертальному русі з кутовою швидкістю  $\varpi_r$  навколо осі симетрії колеса 3.

З рис. 8.4 випливає, що  $\frac{\varpi_1^r}{\varpi_3^r} = \frac{r_3}{r_1}$ ;  $\frac{\varpi_3^r}{\varpi_2^r} = -\frac{r_2}{r_3}$ , де  $\varpi_1^r, \varpi_2^r, \varpi_3^r$  позначають

кутові швидкості коліс 1, 2, 3 щодо кривошипа, що обертається з кутовою швидкістю  $\varpi_0$ .

Оскільки  $r_2 = r_1$ , то  $\varpi_2^r = -\varpi_1^r$ . Але  $\varpi_2^r = \varpi_2 - \varpi_0$ ,  $\varpi_1^r = \varpi_1 - \varpi_0$ , отже,  $\varpi_2 = 2\varpi_0 - \varpi_1$ , тобто  $\dot{\phi}_2 = 2\dot{\phi}_0 - \dot{\phi}_1$ .

Оскільки  $\varpi_3^r = \frac{r_1}{r_3} \varpi_2^r = \frac{r_1}{r_3} (\varpi_2 - \varpi_0)$ , то  $\varpi_3^r = \frac{r_1}{r_3} (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_0)$ .

За теоремою складання обертання твердого тіла  $\varpi_a = \varpi_c - \varpi_r$ , звідки  $\varpi_x = 0$ ,  $\varpi_y = -\varpi_3^r$ ,  $\varpi_z = \varpi_c$  і  $\varpi_y = -\frac{r_1}{r_3} (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_0)$ ,  $\varpi_z = \dot{\phi}_0$ . Зауважуючи, що

$v_c = r_1 \dot{\phi}_0$ , отримуємо вираз для кінетичної енергії

$$T = \frac{1}{2} (4I_2 + I_{3z} + \frac{P_3}{g} r_1^2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2}) \dot{\phi}_0^2 + \frac{1}{2} (I_1 + I_2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2}) \dot{\phi}_1^2 - (2I_2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2}) \dot{\phi}_0 \dot{\phi}_1.$$

Після підстановки відповідних формул в рівняння Лагранжа маємо

$$\begin{cases} (4I_2 + I_{3z} + \frac{P_3}{g}r_1^2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2})\ddot{\varphi}_0^2 - (2I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2})\dot{\varphi}_1^2 = m_0 - 2m_2; \\ (I_1 + I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2})\dot{\varphi}_1^2 - (2I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2})\ddot{\varphi}_0^2 = m_1 + m_2. \end{cases}$$

Звідси остаточно

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_0 = \frac{1N + MS}{K1 - M^2}; & K = \frac{1}{4g}(8P_2r_1^2 + P_3(6r_1^2 + r_3^2)); & 1 = \frac{P_1, P_2, P_3}{2g}r_1^2; \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{KS + MN}{K1 - M^2}, & M = \frac{2P_2, P_3}{2g}r_1^2; & N = m_0 - 2m_2; & S = m_1 + m_2. \end{cases}$$

### 8.1.3 Математичні моделі технічних систем і процесів

У загальному випадку динаміка технічних систем і робочих процесів описується диференціальними рівняннями з частинними похідними або іншими класами рівнянь, що враховують розподіл параметрів системи. Для спрощення математичної моделі будемо розглядати такі постановки задач, які приводять до системи звичайних диференціальних рівнянь або диференціальних рівнянь з постійними запізненнями.

#### Математичні моделі пружних систем

**Завдання 1.** Несуча система верстата.

Розрахункову дискретну модель верстата подамо у вигляді системи з п'яти мас (рис. 8.5). На рис. 8.6 подана розрахункова схема бабки вертикального фрезерного верстата.



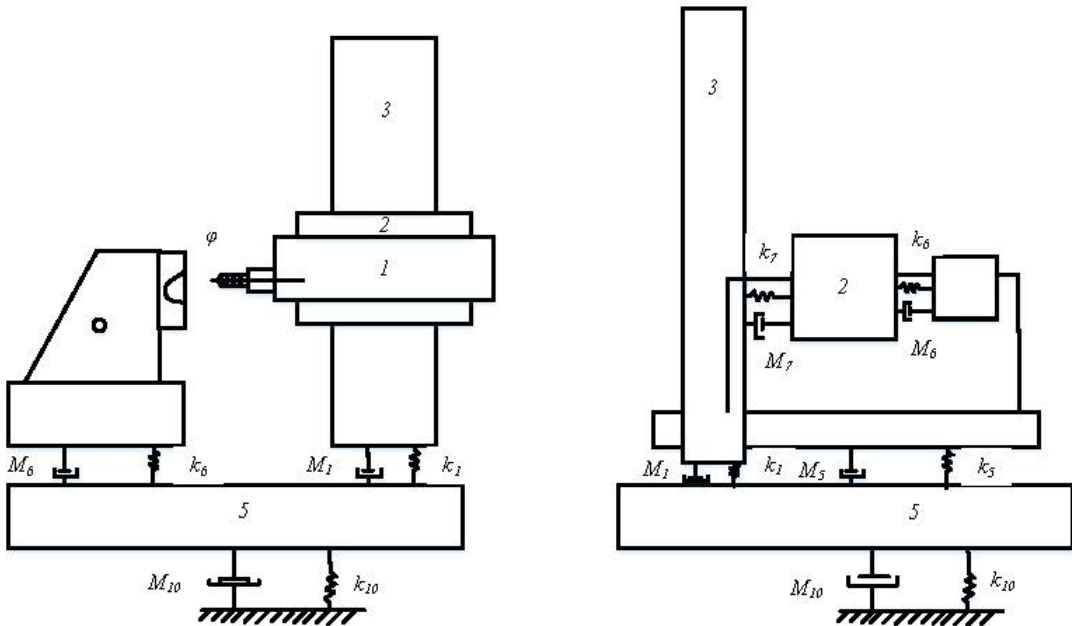


Рисунок 8.5 - Розрахункова схема дискримінанту динамічної моделі фрезерного верстата

Приймаємо абсолютно жорсткими бабку 1, поперечину 2, стійку 3, стіл з опорною стійкою і виробом 4, станину 5. Пружні і демпфувальні зв'язки між рухомими масами 1 і 2, 2 і 3, 4 і 5 визначаються характеристиками напрямних механізмів приводів подач. Зв'язки між стійкою 3 і станиною 5 ( $K_8, H_8$ ) визначаються характеристиками стику стійка-станина, а між станиною 5 і фундаментом – характеристиками опорних башмаків  $K_{10}, H_{10}$ .

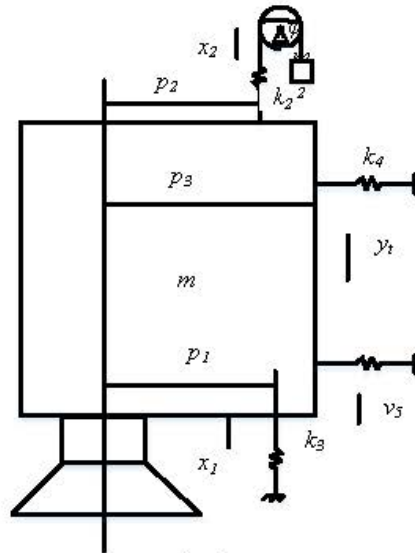


Рисунок 8.6 - Розрахункова схема бабки вертикального фрезерного верстата

Тут  $m_j$ ,  $h_j$ ,  $k_j$  – відповідно матриці інерційних характеристик, демпфування і жорсткості в  $j$ -й точці або зв'язку;  $a_{jk}, a_{jk}^*$  – відповідно матриця переносу і транспонована матриця переносу, за допомогою яких встановлюється відповідність між зміщеннями і силовими чинниками, що діють в точках  $j, i, k$ ;  $P_p$  – матриця сил різання.

Верстат має  $(6 \times 5) = 30$  ступенів свободи, і його модель описується 30-ма звичайними диференціальними рівняннями, які у векторно-матричній формі мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 & m_1 \ddot{x}_1 + h_6 \dot{x}_1 + a_{1,6}^* k a_{1,6} x_1 - h_6 a_{2,1} \dot{x}_2 - a_{1,6}^* k_6 a_{2,6} x_2 = a_{1,\varphi}^* P_p; \\
 & -h_6 a_{1,2} \dot{x}_1 - a_{2,6}^* k_6 a_{1,6} \dot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + (a_{2,6}^* h a_{2,6} + a_{2,7}^* h_7 a_{2,7}) \dot{x}_2 + \\
 & + (a_{2,6}^* k_6 a_{2,6} + a_{2,7}^* k_7 a_{2,7}) x_2 - h_7 a_{3,2} \dot{x}_3 - a_{2,7}^* k_7 a_{3,7} x_3 = 0; \\
 & -h_7 a_{2,3} \dot{x}_2 - a_{3,7}^* k_7 a_{2,6} x_2 + m_3 \ddot{x}_3 + (a_{3,7}^* h_7 a_{3,7} + a_{3,8}^* h_8 a_{3,8}) \dot{x}_3 + \\
 & + (a_{3,7}^* k_7 a_{3,7} + a_{3,8}^* k_8 a_{3,8}) x_3 - h_8 a_{5,3} \dot{x}_5 - a_{3,8}^* k_8 a_{5,8} = 0; \\
 & m_4 \ddot{x}_4 + h_9 \dot{x}_4 + a_{4,9}^* k_9 a_{4,9} x_4 - h_9 a_{5,4} \dot{x}_5 - a_{4,9}^* k_9 a_{5,9} x_5 = -a_{4,\varphi}^* P_p; \\
 & -h_8 a_{3,5} \dot{x}_3 - a_{3,8}^* k_8 a_{3,8} x_3 - h_9 a_{4,5} \dot{x}_4 - a_{4,9}^* k_9 a_{4,9} x_4 + m_5 \ddot{x}_5 + \\
 & + (a_{5,8}^* h_8 a_{5,8} + a_{5,9}^* h_9 a_{5,9} + a_{5,10}^* h_{10} a_{5,10}) \dot{x}_5 +
 \end{aligned}$$

$$+ (a_{3,8}^* k_8 a_{5,8} + a_{4,9} k_9 a_{5,9} - a_{5,10} k_{10} a_{5,10}) x_5 = 0.$$

Прийняті позначення :  $\rho_1$  – плече пружної сили в ланці  $k_1$  щодо центра інерції;  $\rho_2$  – плече сил пружності в ланці  $k_2$ ;  $\rho_3$  – плече сили тертя на напрямних.

Система складається з двигуна  $D$  (задавальна ланка), який має постійну швидкість руху  $v_k$ , що пов'язаний за допомогою наведеної жорсткості приводу  $k_1$  з бабкою, яка масою  $m_1$  ковзає по вертикальних напрямних в умовах рідинного змащення. Бабка через гнучкий трос пов'язана з противагою масою  $m_2$ . Наведена жорсткість троса позначена через  $k_2$ , жорсткість напрямних при повороті – через  $k_\varphi$  (див. рис. 8.6).

Тоді система приймає такий вигляд:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 - m_1 \rho \ddot{\varphi} + h_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= k_1 v_s t + f_0 + \delta f_0 - Y_t; \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) &= 0; (i + m_1 \rho) \ddot{\varphi} - m_1 \rho \ddot{x}_1 + h_\varphi \dot{\varphi} + k_\varphi \varphi &= 0; \\ h_1 \dot{Y}_t + Y_t &= f_0 = h x_1 + h_1 h_q \ddot{x}_1, \end{aligned}$$

де  $h_1$  – коефіцієнт розсіювання енергії в матеріалі пружини;  $h$  – кутовий коефіцієнт нахилу статичної характеристики тертя;  $h_q$  – коефіцієнт в'язкого опору;  $h_1 = \frac{h_c}{k_y}$  – коефіцієнт опору спливання в рідинному мастилі,  $k_y$  – контактна жорсткість;  $h_\varphi$  – коефіцієнт, що характеризує витискування мастильного матеріалу;  $f_0$  – сила тертя, відповідна початковому руху;  $\delta f_0$  – стрибок сили тертя при переході від спокою до руху;  $Y_t$  – сила тертя;  $v_s$  – постійна швидкість руху задає ланки;  $i$  – момент інерції.

**Завдання 3.** Шпindelний вузол (рис. 8.7).

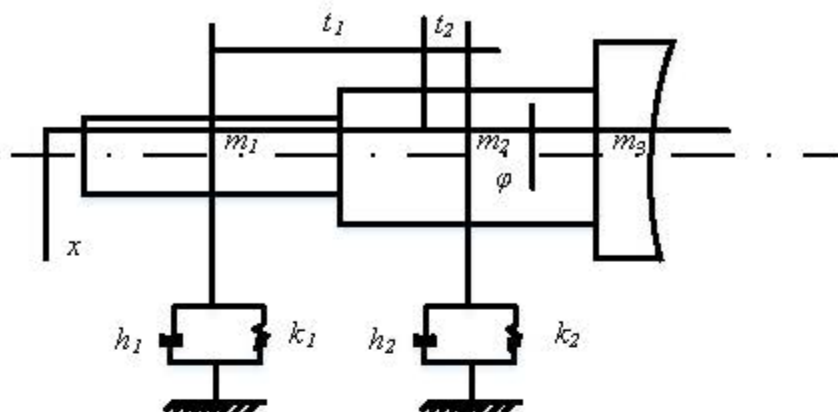


Рисунок 8.7 - Розрахункова схема найпростішого шпindelного вузла

Деформацією шпindеля нехтуємо в порівнянні з деформацією підшипникових опор (тобто вважаємо його абсолютно жорсткою балкою).

**Завдання 4.** Зубчаста передача приводів головного руху і подач (рис. 8.8).

Рівняння руху мають такий вигляд:

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 = -K_{kp3}(\varphi_3 - \varphi_g);$$

$$I_g \ddot{\varphi}_g = -(K_{kp1} + K_{kp2} + K_{kp3})\varphi_g + K_{kp1}\varphi_1 + K_{kp2}\varphi_2 + K_{kp3}\varphi_3,$$

де  $\varphi_j, \varphi_g (j=1,2,3)$  – кути закручування.

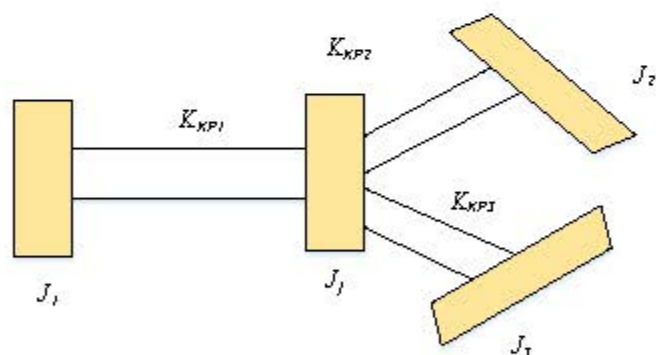


Рисунок 8.8 - Еквівалентна схема триступеневої зубчастої передачі

На рис. 8.8 прийнято позначення:  $I_1, I_2, I_3$  – моменти інерції дисків 1, 2, 3;  $I_g$  – момент інерції зубчастого колеса;  $K_{kp1}, K_{kp2}, K_{kp3}$  – коефіцієнти жорсткості закручування валів 1, 2, 3.

**Завдання 5.** Електропривод частини верстата (рис. 8.9).

Процес затискання заготовки за допомогою електроприводу може бути розбитий на кілька етапів: перший – від моменту початку затискання до моменту відключення двигуна; другий – від моменту відключення двигуна до зупинки ротора. Наступні етапи відповідають руху елементів системи під дією інерції і пружинки до їх зупинки.

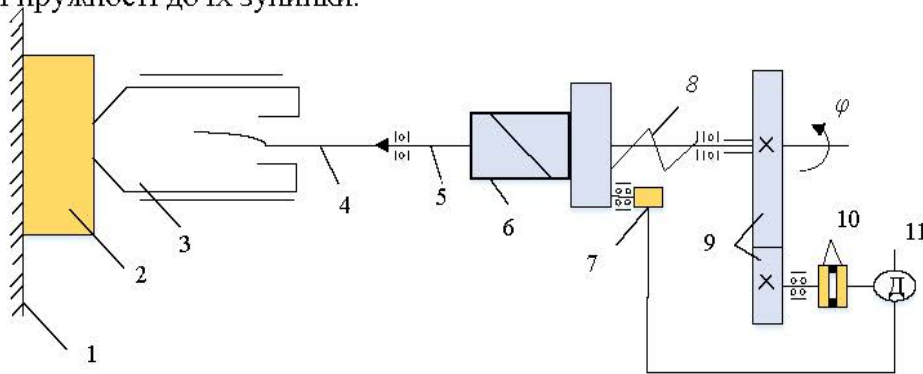


Рисунок 8.9 – Розрахункова схема електромеханічного затискного пристрою

Диференціальні рівняння руху на другому і третьому етапах –  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k_j\varphi = d_j + f_j(t)$ , де  $j=1,2$  – номери етапів;  $k_1 = \frac{C}{I}$ ,  $d_1 = \frac{-M_c}{I}$ ,  $k_2 = \frac{k_{yz}}{I}$ ,  $d_2 = \frac{M_c''}{I}$ ,  $I$  – момент інерції ротора двигуна і наведених до нього мас;  $k_j$  – коефіцієнти жорсткості вала;  $k_{yz}$  – коефіцієнт жорсткості розкручуваної ділянки валопроводу;  $M_c'$  – момент статистичного опору;  $M_c''$  – момент холостого ходу ротора двигуна;  $f_j$  – постійно діючі зовнішні збурення, викликані механізмами передачі.

**Завдання 6.** Маніпулятор.

Розглянемо триланковий неплоский маніпулятор, враховуючи пружність «руки» (рис.8.10).

Вважаємо, що вся маса ланки 3 робота зосереджена в одній точці  $C_3$  – центрі мас ланки 3, яка являє собою пружний стрижень, що має піддатливість тільки на вигин.

За узагальнені координати системи приймемо такі величини:  $\varphi_1$  – кут повороту ланки 1 щодо стоякля;  $S_2$  – переміщення ланки 2 відносно ланки 1;  $S_3$  – переміщення ланки 3 як жорсткого тіла відносно ланки 2; а  $f_y$  –

відхилення центра мас ланки за рахунок вигину ланки по осі  $y$ ;  $f_z$  – відхилення центру мас ланки 3 за рахунок вигину ланки по осі  $z$ .

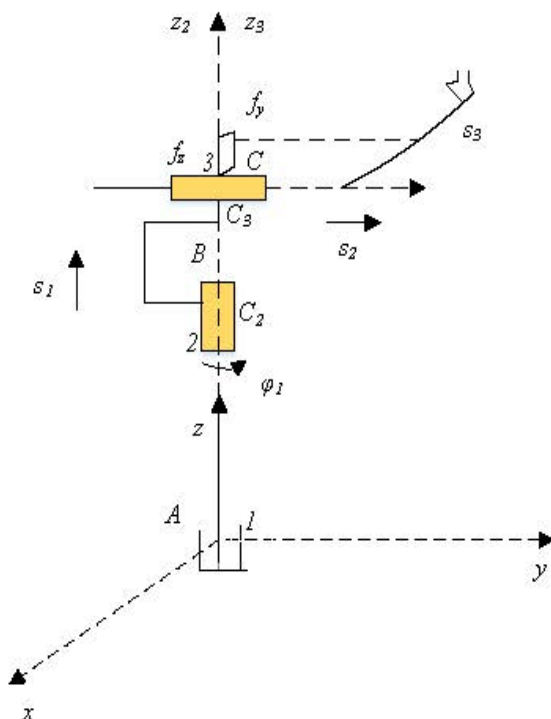


Рисунок 8.10 – Схема триланкового неплоского маніпулятора

Диференціальні рівняння руху механізму мають такий вигляд:

$$(i_{z1} + i_{z2} + i_{z3})\ddot{\varphi}_1 + 2m_3\dot{\varphi}_1\dot{S}_3 + m_3S_3^2\ddot{\varphi}_1 + m_3f_y\dot{S}_3 + m_3S_3\dot{f}_y = Q_{1n} - h_1\dot{\varphi}_1;$$

$$m_3(\ddot{S}_2 + \ddot{f}_z) + m_2\ddot{S}_2 = Q_{1n} - h_2\dot{S}_2 - P_2 - P_3;$$

$$m_3\ddot{S}_3 - m_3(\dot{\varphi}_1 S_3 + \dot{f}_y)\varphi_1 - \frac{9}{2}(f_z^2 - f_y^2)\frac{ei}{S_3^4} = Q_{3n} - h_3\dot{S}_3;$$

$$m_3(\ddot{\varphi}_1 S_1 + \dot{\varphi}_1\dot{S}_3 + \ddot{f}_y) + 3\frac{ei}{S_3^3}f_y = 0; \quad m_3(\ddot{S}_2 + \ddot{f}_z) + 3\frac{Ei}{S_3^3}f_z = 0.$$

Тут  $P_2, P_3$  – сили тяжіння ланок 2 і 3;  $i_{zj}$  – приведений момент інерції щодо осі  $-j$ -ої ланки;  $h_j$  – коефіцієнт дисипативної функції Релея;  $Q_{jn}$  – момент  $j$ -го приводу;  $3Ei = k, S_3^3$ , де  $k$  – жорсткість ланки 3 на вигин.

**Завдання 7.** Динаміка стріли екскаватора.

Розглянемо розрахункову схему стріли екскаватора, приймаючи стрижень стріли і підйомний канат абсолютно жорсткими (рис. 8.11).

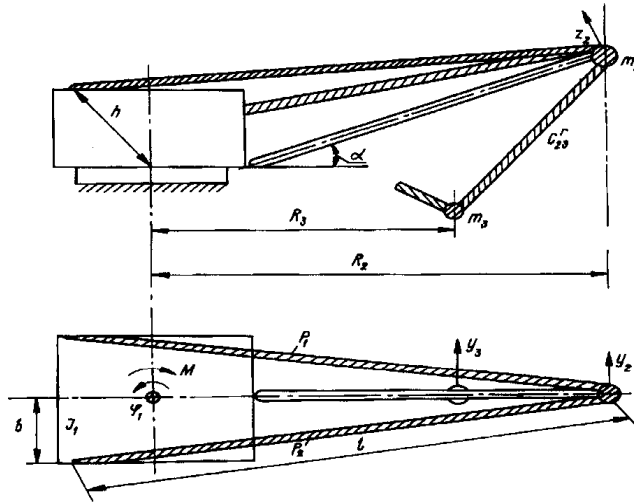


Рисунок 8.11 – Розрахункова схема стріли екскаватора

Рівняння руху стріли екскаватора в горизонтальній площині (у напрямку  $\varphi_1, y_2, y_3$ ) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} -i_1 \ddot{\varphi}_1 + (P_2 - P_1) \frac{b}{l} r_2 - M &= 0; \\ -m_2 (r_2 \ddot{\varphi}_1 + \ddot{y}_2) - (P_2 - P_1) \frac{b}{l} + C_{23}^r (y_3 - y_2) &= 0; \\ -m_3 (r_3 \ddot{\varphi}_1 + \ddot{y}_3) - C_{23}^r (y_3 - y_2) &= 0, \end{aligned}$$

де  $i_1$  – момент інерції поворотної частини екскаватора без ковша і маси, зосередженої у кінця стріли;  $C_{23}^r$  – коефіцієнт жорсткості каната;  $\ddot{\varphi}_1$  – кутове прискорення поворотної частини екскаватора в горизонтальній площині;  $P_2, P_1$  – зусилля в гілках підвіски  $b, l, r_2, r_3$  – лінійні розміри екскаватора;  $M$  – момент, що діє на поворотну частину екскаватора;  $m_2$  – маса, зосереджена у кінця стріли;  $\ddot{y}_k$  – прискорення ковша в горизонтальній площині у напрямку  $y_k$  ( $k = 2, 3$ ).

Для вертикальних коливань кінця стріли в напрямку осі ординат одержимо рівняння  $\ddot{z}_2 + \frac{h(P_1 + P_2)}{l(m_2 + m_3)} = g \eta \cos \alpha$ , де  $g$  – прискорення вільного падіння;  $\eta$  – коефіцієнт, що враховує тертя в поліспасти;  $m_3$  – маса вантажу.

### Математичні моделі робочих процесів

Робочі процеси різання, тертя і приводів руху розглядаються як фізико-механічні та теплофізичні процеси гнучко-пластинчатого деформування і

руйнування, електро-, пневмо- і гідродинамічні процеси, які використовують пружні системи.

**Завдання 8.** Процес різання (рис. 8.12).

Узагальнена лінійна модель процесу різання (без урахування теплофізики процесу має вигляд:  $P + T_p D = K_p a + h_p \dot{a}$ , де  $T_p$  – постійна стружкоутворення;  $K_p$  – усталений коефіцієнт різання;  $h_p$  – коефіцієнт в'язкого тертя процесу різання;  $a$  – зміна товщини зрізаного шару).

Рівняння систем в загальному випадку нестационарні, з розподіленими параметрами.

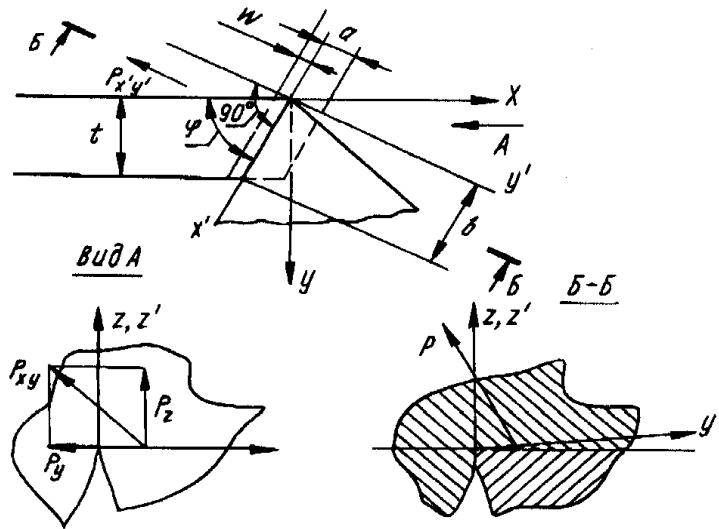


Рисунок 8.12 – Геометричні параметри зрізаного шару:  $t$  – глибина різання;  $b$  – ширина зрізаного шару (пропорційна  $t$ );  $z$  – товщина шару, що зрізається (пропорційна подачі);  $P$  – сила різання. ( $P = (P_x, P_y, P_z)^*$ )

**Завдання 9.** Процес тертя.

Рух столу шліфувального верстата зі швидкісним зв'язком (рис. 8.13) визначається системою рівнянь (рівняння у відхиленнях в системі координат, пов'язаній з тілом)

$$m\ddot{x} + h_x \dot{x} + k_x x = f; \quad m\ddot{y} + h_y \dot{y} + k_y y = q,$$

де  $q$  – підйомна гідродинамічна сила;  $f$  – сила тертя;  $m$  – маса повзуна або столу;  $k_x$  – жорсткість пружного елемента, що утримує повзун або стіл в напрямку осі  $x$ ;  $k_y$  – жорсткість системи по осі  $y$  – коефіцієнт сил опору по осі  $y$  (охоплює



сили в'язкого тертя мастила і демпфірувальні сили у з'єднаннях приводного упружного елемента);  $k_y$  – коефіцієнт сил опору по осі  $y$ .

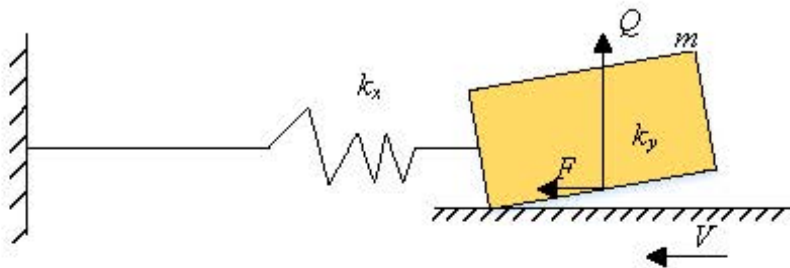


Рисунок 8.13 – Розрахункова схема еквівалентної пружної схеми зі швидкісним (гідродинамічним) зв'язком.

Для рідинного тертя  $f = -k_{ж}v_0y$ , де  $k_{ж}$  – деякий постійний коефіцієнт. Для змішаного тертя  $f = -(k_T + k_{ж}V_0)y$ , де  $k_T$  – статистична характеристика контактного тертя, причому  $k_{ж}V_0 \ll k_T$ .

**Завдання 10.** Електропривод верстатів постійного струму незалежного збудження.

Динамічну характеристику електродвигуна постійного струму незалежного збудження визначають з рівняння

$$T_\theta T_M \ddot{M}_D + T_M \dot{M}_D + M_D = M_C,$$

де  $T_\theta$  – електромагнітна стала часу якорного ланцюга;  $T_M = i \frac{\Delta \varpi}{\Delta M_g}$  – механічна

постійна часу приводу ( $i$  – момент інерції ротора і наведених до нього ведених частин приводу;  $\varpi$  – кутова швидкість обертання валу двигуна);  $M_D$  – обертальний момент вала;  $M_C$  – момент опору на валу двигуна.

**Завдання 11.** Електромеханічна система вібратора.

Динаміка електромеханічної системи задається наступною системою рівнянь (рис. 8.14):

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = bi ; \quad l \frac{di}{dt} + Ri + \bar{v} = v(t); \quad \frac{m}{b^2} \dot{v} + \frac{h}{b^2} v + \frac{k}{b^2} \int v dt = i,$$

де  $i$  – струм;  $v = b\dot{x}$  – проти-ЕРС;  $b = Blr$  – коефіцієнт зв'язку за моментом,  $B$  – магнітна індукція;  $R$  – повний опір витка;  $L$  – індуктивність котушки;  $\bar{v}(t)$  – напруга, прикладена до котушки;  $k$  – жорсткість пружини.

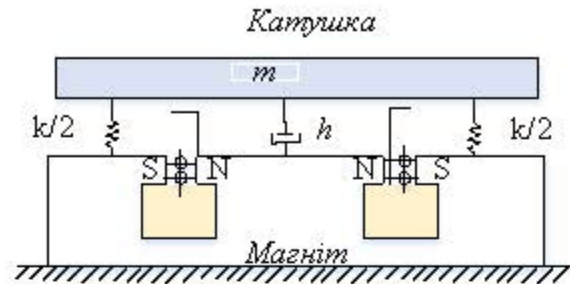


Рисунок 8.14 – Електромеханічна система

### Програмні керування

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{x}_j + f_j(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r), i = \overline{1, n}. \quad (8.23)$$

Тут вектор-функцію  $u = u(t)$  розмірності  $n$  назвемо програмним керуванням. При цьому будемо вважати, що при кожному допустимому керуванні на  $[0, T]$ , тобто такому, для якого інтеграл  $\int_0^T u^*(r)u(r)dr$  обмежений, для системи (8.23) виконано умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші.

Задача програмного керування полягає у пошуку допустимого керування  $u(t)$ , при якому система (8.23) має розв'язок  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^*$  що задовольняє умову

$$x(0) = x^1, \quad x(T) = x^2. \quad (8.24)$$

де  $x^1, x^2$  – задані вектори.

Якщо таке керування існує, то його називаємо програмним, а пару точок  $(x^1, x^2)$  – керуючою на  $[0, T]$  парою. Система називається повністю керованою на  $[0, T]$ , якщо кожна пара точок  $(x^1, x^2)$  керована на  $[0, T]$ . Загальних способів пошуку програмних керувань для системи (8.23) немає.

Розглянемо лінійну систему

$$\dot{x}(t) = a(t)x + b(t)u + f(t). \quad (8.25)$$

Тут елементи матриць  $a(t), b(t)$  і вектора  $f(t)$  задані і неперервні на  $[0, T]$ .

Система (8.25) повністю керована на  $[0, T]$  тоді і тільки тоді, коли матриця

$$P(t) = \int_0^T MM^* dt, \text{ де } M = y^{-1}B - \text{ не особлива, а } y(t) - \text{ фундаментальна матриця}$$

системи  $\dot{x} = Ax$ . При цьому вся множина програмних керувань задається

формулою  $u = M^* C + v$ . Інтеграл  $\int_0^T u^* u dt$  обмежений і  $\int_0^T M v dt = 0$ ,

$$C = P^{-1}(T) \left[ y^{-1}(T) x^{-1} - \int_0^T y^{-1}(r) f(r) dr - x^0 \right].$$

**Приклад 1.** Чи буде керованим на  $[0, T]$  пара точок для системи  $\ddot{x} + u\dot{x} = 0$  з початковими граничними умовами

$$\text{а) } \begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(1) = 0 \\ \dot{x}(1) = 1 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(1) = 2 \\ \dot{x}(1) = 1 \end{cases}.$$

*Розв'язання.* Система інтегрується:

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -u dt, \quad \dot{x}(t) = \dot{x}(0) u(t), \quad V(t) = e^{-\int_0^t u(r) dr}, \quad x(t) = x(0) + \dot{x}(0) \int_0^t V(\xi) d\xi.$$

З крайових умов отримуємо:  $x = 1 + \int_0^1 V(\xi) d\xi$ ,  $\dot{x}(1) = V(1)$ .

Помічаємо, що  $V(T) > 0$ , тому  $x(t) > 1$ . Таким чином, у випадку а) пара точок некерована, у випадку б) – керована.

**Приклад 2.** Побудувати всі програмні керування і виділити серед них ті що задовольняють умову:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + e^t u, \end{cases} \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad T = 4\pi; \quad u(t) > 0.$$

*Розв'язання.* Записуємо

$$y(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}; \quad M = y^{-1} b = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

$$P(4\pi) = \int_0^{4\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{4\pi} \begin{pmatrix} \sin^2 t & -\sin t \cos t \\ -\sin t \cos t & \cos^2 t \end{pmatrix} dt = 2\pi e,$$

$$\text{де } e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = p^{-1}(4\pi)y^{-1}(4\pi) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-e^{4\pi}}{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$M^*C = \frac{e^{-4\pi}}{2\pi}(\sin t - \cos t);$$

$$u(t) = \frac{e^{-4\pi}}{2\pi}(\sin t - \cos t) + v(t); \quad \int_0^{4\pi} v(t) \cos t dt = \int_0^{4\pi} v(t) \sin t dt = 0.$$

Для того щоб задовольнити умову  $u(t) \geq 0$ , можна взяти  $v(t) = v_0$ ,

$$\text{де } v_0 = \frac{e^{-4\pi} \sqrt{2}}{2\pi}.$$

Аналогічна задача керування виникає і для системи різницевих рівнянь:

$$x(k+1) = a(k)x(k) + b(k)u(k) + f(k) \quad (8.26)$$

з початковими граничними умовами:  $x(0) = x^1, x(m) = x^2$ .

Система (8.26) повністю керована на  $[0, T]$  тоді і тільки тоді, коли ранг матриці  $S = \{b(m-1), a(m-1)b(m-2), a(m-1)(m-2)b(m-3), \dots, a(m-1), \dots, a(1)b(0)\}$  дорівнює  $n$ .

Якщо матриці  $a(k)$  і  $b(k)$  не залежать від  $k$ , то  $S = (b, ab, \dots, a^{n-1}b)$ .

Помітимо, що якщо система (8.25) повністю керована на  $[0, T]$ , то для кожної пари точок серед  $(x^1, x^2)$  програмних керувань існує кусково-постійне представлення.

#### 8.1.4 Стійкість за Ляпуновим програмних рухів

Нехай дана система звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{X} = f(x, t), \quad (8.27)$$

де  $\dot{X}$  – вектор;  $f(x, t)$  вектор-функція розмірності  $n$ .

Нехай відомо деякий розв'язок цього диференціального рівняння  $x = \bar{x}(t)$ , визначений при  $t_0 \geq 0$ . Цей розв'язок назвемо незбуреним програмним рухом, а будь-який інший, відмінний від нього, збуреним.

Незбурений рух  $x = \bar{x}(t)$  називається стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого  $t_0 \geq 0$  і будь-якого числа  $\varepsilon > 0$  можна вказати число  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  таким, що при  $\|x - \bar{x}\| < \delta(\varepsilon, t_0)$  буде  $\|x(t, x_0, t_0) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon$  при  $t \geq t_0$ , де  $x(t_0, x_0) = x_0$ ,  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}$ .

Геометрична стійкість за Ляпуновим означає, що як завгодно вузька  $\varepsilon$ -область розв'язку містить всі розв'язки  $\bar{x}(t)$ , які в початковий момент знаходились від  $\bar{x}_0$  не більше, ніж на  $\delta$ .

Важливо відмітити, що має сенс говорити тільки про стійкість певного розв'язку  $\bar{x}(t)$ , а не всіх розв'язків рівняння (8.27).

*Приклад.* Загальний розв'язок рівняння

$$\ddot{x}(t) = -\frac{1}{2} \left[ x^2(t) + \sqrt{x^4(t) + 4\dot{x}^2(t)} \right] x(t)$$

має вигляд  $x(t) = c \sin(ct + d)$ , де  $c$  і  $d$  – випадкові постійні. Розв'язок рівняння  $x(t) \equiv 0$  стійкий за Ляпуновим, оскільки  $x(t) \equiv 0$ , якщо початкові умови  $x_0(t_0) = c \sin(ct_0 + d)$  і  $\dot{x}_0(t_0) = c^2 \cos(ct_0 + d)$  достатньо малі. Будь-який інший розв'язок  $\bar{x}(t) = c_1 \sin(c_1 t + d)$  ( $c_1 \neq 0$ ) нестійкий. Насправді завжди існує такий розв'язок  $\bar{x}(t) = c_1 \sin(c_1 t + d)$ , для якого  $c_2 \neq 0$  та відношення частот  $\frac{c_2}{c_1}$  ірраціональне. Для таких розв'язків  $\sup |x(t) - \bar{x}(t)| = |c_1| + |c_2|$ ,  $t \in (0, \infty)$  незалежно від  $t_0, \bar{x}_0, \bar{\dot{x}}, x(t_0), \dot{x}(t_0)$ . Таким чином, розв'язок  $x(t), \bar{x}(t)$  розбігається на кінцеву величину  $|c_1| + |c_2| \neq 0$  незалежно від близькості початкових умов.

Варто зауважити, що для лінійних рівнянь стійкість одного розв'язку тягне за собою стійкість будь-якого іншого розв'язку і можна говорити про **стійкість системи в цілому**.

Незбурений рух (рис. 8.15) називається асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо він стійкий за Ляпуновим і до того ж величину  $\delta(t_0, \varepsilon)$  для будь-якого  $\varepsilon > 0$  можна вибрати так, що  $|x(t, x_0, t_0) - \bar{x}(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

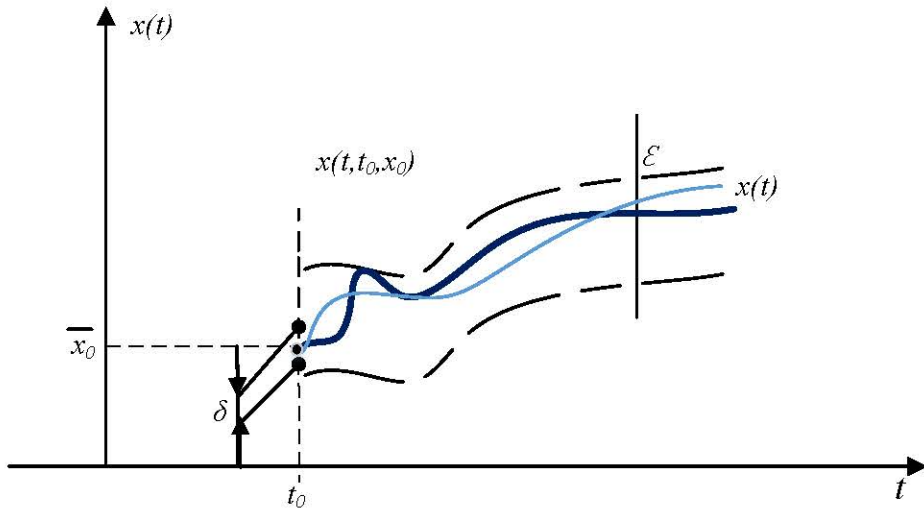


Рисунок 8.15 - Стійкість по Ляпунову незбуреного руху

Якщо виконується лише друга умова, то говорять, що програмний рух є притягувальним. З притягування не впливає стійкість. Але для скалярного звичайного диференціального рівняння притягування завжди призводить до стійкості.

Виконаємо в системі (8.27) перетворення координат по формулі

$$x(t) = y(t) + \bar{x}(t),$$

де  $y(t)$  – нова шукана вектор-функція.

В результаті отримуємо

$$\frac{dy}{dt} = f(y + \bar{x}(t), t) - f(\bar{x}(t), t). \quad (8.28)$$

Система (8.28) має розв'язок (положення рівноваги)  $y \equiv 0$ . Якщо цей розв'язок прийняти за незбурений рух, то нульовий розв'язок  $y = 0$  називається стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого  $t \geq 0$  і будь-якого  $\varepsilon > 0$ , можна вказати таке  $\delta(\varepsilon, t) > 0$ , що при  $\|y_0\| < \delta$  буде  $\|y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon$  при  $t \geq t_0$ , причому  $y(t_0, y_0, t_0) = y_0$ .

### Стійкість лінійних систем

Нехай дана система лінійних рівнянь

$$\dot{x} = a(t)x + f(t), \quad (8.29)$$

де елементи матриці  $a(t)$  і вектора  $f(t)$  задані і неперервні на  $[0, \infty]$ .

Система (8.29) стійка за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли обмежені на  $[0, \infty]$  елементи її фундаментальної матриці  $y(t)$  ( $y(0) = E$ ).

Розглянемо систему однорідних рівнянь

$$\dot{x} = a(t)x. \quad (8.30)$$

Система (8.30) називається експоненціально стійкою, якщо знайдуться такі додатні константи  $\alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2$ , що

$$\alpha_1 \|x_0\| e^{\alpha_1(t-t_0)} < \|x(t, x_0, t_0)\| < \alpha_2 e^{\alpha_2(t-t_0)}.$$

Якщо матриця  $a(t)$  постійна, то асимптотична стійкість системи (8.30) еквівалентна експоненціальній.

Система (8.29) при  $a = \text{const}$  асимптотично стійка тоді і тільки тоді, коли всі власні числа матриці мають від'ємні дійсні частини.

Розглянемо характеристичний поліном матриці  $A$ :

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = p(\lambda). \quad (8.31)$$

Будемо говорити, що багаточлен  $p(\lambda)$  є стійким, якщо всі його корені  $\lambda_j$  мають від'ємні дійсні частини, тобто  $\text{Re } \lambda_j < 0, j = \overline{1, n}$ . Зв'яжемо з багаточленом  $p(\lambda)$  два дійсних багаточлена  $g(\lambda)$  і  $h(\lambda)$  за формулою  $p(i\lambda) = g(\lambda) + ih(\lambda)$ .

**Теорема Ерміта – Білера.** Багаточлен  $p(\lambda)$  тоді і тільки тоді стійкий, коли корені багаточленів  $g$  і  $h$  дійсні, прості, чергуються і хоча б для одного дійсного  $\bar{\omega}_0$  виконується умова

$$g(\bar{\omega}_0)h'(\bar{\omega}_0) - g'(\bar{\omega}_0)h(\bar{\omega}_0) > 0.$$

Для багаточлена  $p(\lambda)$  з дійсними коефіцієнтами ця нерівність рівносильна нерівності  $a_{n-1}a_n > 0$ .

Для стійкості багаточлена  $p(\lambda)$ , який не має чисто уявних коренів, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{2}{\pi} \Delta \arg p(i\bar{\omega}) \Big|_{\substack{\bar{\omega} = \infty \\ \bar{\omega} = 0}} = n, \quad \text{tg } \arg p(i\bar{\omega}) = \frac{h(\bar{\omega})}{g(\bar{\omega})}.$$

Спираючись на теорему Ерміта – Білера, англійський математик і механік Е. Раус сформулював зручний алгоритм, що дозволяє перевірити стійкість будь-якого багаточлена за кінцеве число кроків. Незалежно від Е. Рауса німецький математик А. Гурвіц дав розв'язок задачі стійкості у вигляді нерівностей.

**Теорема (критерій Рауса – Гурвіца).** Корені дійсного багаточлена  $p(\lambda)$  мають від’ємні дійсні частини тоді і тільки тоді, коли будуть додатні всі головні мінори матриці

$$r = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

тобто

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = \det \Gamma > 0.$$

Відзначимо, що у стійкого багаточлена всі коефіцієнти додатні (теорема Стодоли). Зворотнє твердження неправильне: багаточлен має додатні коефіцієнти, але серед його коренів два мають додатні дійсні частини. Як приклад розглянемо багаточлен  $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 40$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0, \Delta_3 = a_3 > 0.$$

Ці умови вперше отримав І. А. Вишнеградський.

Нехай тепер матриця  $a(t)$  буде  $\bar{\omega}$  – періодичною.

**Теорема.** Для асимптотичної стійкості системи (8.29) необхідно і достатньо, щоб корені рівняння  $\det(\lambda E - y(\bar{\omega})) = 0$  лежали всередині центрального одиничного кола, тобто  $|\lambda_i| < 1$ , де  $y(t)$  – фундаментальна матриця розв’язків системи (8.29).

Для матриці системи лінійних різницевих рівнянь

$$x(k+1) = a(k)x(k) \quad (8.32)$$

справедлива така теорема.

**Теорема.** Система (8.32) стійка за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли елементи її фундаментальної матриці  $y(k)$  обмежені при  $k > 0$ . Для асимптотичної стійкості необхідно і достатньо, щоб всі власні числа були за модулем менше одиниці.



**Теорема (критерій Шура – Кона).** Нехай  $p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ . Зворотний до нього поліном  $p^*(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ . Корені полінома  $p(\lambda)$  будуть за модулем менше одиниці тоді і тільки тоді, коли будуть додатні всі головні мінори матриці  $r$ , отриманої таким чином:

$$\frac{p^*(x)P^*(y) - p(x)p(y)}{1 - xy} = (1, x, \dots, x^{n-1})r \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix}.$$

**Приклад.** Візьмемо багаточлен  $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ , для якого виконується тотожність

$$\begin{aligned} \frac{p^*(x)P^*(y) - p(x)p(y)}{1 - xy} &\equiv \frac{1}{1 - xy} [x^2y^2(a_2^2 - 1) + x^2y(a_1a_2 - a_1) + \\ &+ xy^2(a_1a_2 - a_1) + (a_1 - a_1a_2) + a_1x + y(a_1 - a_1a_2) + (1 - a_2^2)] = \\ &= (1 - a_2) + [(1 + a_2) + a_1y + (1 + a_2^2)xy] = (1, x) \begin{pmatrix} (1 - a_2)(1 + a_2) & (1 - a_2)a_1 \\ (1 - a_2)a_1 & (1 - a_2)(1 + a_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}; \\ \Delta_1 &= (1 - a_2) > 0, \Delta_2 = (1 - a_2)^2((1 + a_2)^2 - a_1^2) > 0. \end{aligned}$$

Остаточно, якщо виконуються нерівності  $|a_2| < 1$ ,  $|a_1| < 1 + a_2$  то всі корені багаточлена  $P(\lambda)$  лежать в центральному одиничному колі.

Нехай система рівнянь (8.28) має вигляд  $\dot{y} = P(t)y + f(t, y)$ , де  $f(t, y)$  задовольняє умову Ліпшиця за змінними.

**Теорема (Ляпунов).** Нехай система  $\dot{y} = P(t)y$  експоненціально стійка,  $\|f(t, y)\| \leq \alpha(\varepsilon)\|y\|$  при  $t \geq 0$  і  $\|y\| \leq \varepsilon$ , тоді нульовий розв'язок системи (8.28) асимптотично стійкий.

Нехай задана система різницевих рівнянь вигляду

$$y(k+1) = P(k)y(k) + q(k, y(k)). \quad (8.33)$$

**Теорема.** Якщо  $y(k+1) = P(k)y(k)$  експоненціально стійка і  $\|q(k, y(k))\| \leq \beta(\varepsilon)\|y\|$  при  $k \geq 0$  і  $\|y\| < \varepsilon$  при  $k \geq 0$   $\beta(\varepsilon) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то нульовий розв'язок системи (8.33) асимптотично стійкий.

Існує метод визначення стійкості стаціонарної системи  $\dot{x} = ax$ , не пов'язаний з власними значеннями. Виявляється, всі власні числа матриці

лежать в лівій півплощині тоді і тільки тоді, коли всі власні числа матриці  $b = (a - E)^{-1}(a + E) = E + 2(a - E)^{-1}$  лежать в центральному одиничному колі.

Для практичної перевірки останньої умови перевіряють  $\|b^{2k}\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow 0$ , що відповідає стійкості матриці  $a$ .

### 8.1.5 Стабілізація програмних рухів

Нехай поведінка технічної системи описується векторним звичайним диференціальним рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = f(t, y, \bar{w}), y(0) = y_0, \quad (8.34)$$

де  $y, y_0 \in r^n$  – вектори поточного і початкового стану системи;  $\bar{w} \in r^r$  – вектор керувальних впливів.

Візьмемо програмний (незбурений) розв'язок  $y = y_0(t)$ , що відповідає програмному початковому стану  $y_0 = y_{0p}$  і деякому програмному керуванню  $\bar{w} = \bar{w}_p(t)$ . Візьмемо також відхилення збуреного розв'язку і керування від програмного

$$x = y - y_p(t), u = \bar{w} - \bar{w}_p(t). \quad (8.35)$$

Рівняння у відхиленнях має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x, u), x(0) = x_0. \quad (8.36)$$

Оскільки  $g(t, 0, 0) = 0$ , то завдання вивчення розв'язка в околі виділеного програмного зводиться до задачі вивчення розв'язку рівняння (8.36) в околі положення рівноваги  $x=0, u=0$ . Координати вектора керування зазвичай називають входами системи. Під виходами системи розуміють координати доступного вимірюванню вектора  $\eta$ , що є функцією стану  $X$ . Якщо на входи системи подаються керування залежно від виміряних сигналів виходів, то говорять про керування за принципом зворотного зв'язку  $X$ . Якщо в кожен момент часу виміру доступні всі координати вектора стану системи  $u = u(t, x)$  то кажуть, що керування побудовано за принципом повного зворотного зв'язку.

Сформулюємо класичну задачу стабілізації програмного режиму (руху, процесу) рівняння (8.34) керуванням, побудованим за принципом повного зворотного зв'язку: потрібно побудувати керування  $u(t, 0) = 0$ , при якому всі

розв'язки рівняння (8.36), що починаються в досить малому околі нуля, зменшуються за експоненціальним законом.

Керування, які вирішують завдання стабілізації, будемо називати стабілізуючими. Якщо існує хоч одне таке керування, то рівняння (8.36) будемо називати стабілізуючим. Виділимо в рівнянні (8.36) члени, лінійні відносно  $x$  і  $u$ , тоді отримаємо

$$\dot{x} = a(t)X + b(t)u + H(t, x, u), \quad (8.37)$$

де  $\|H(t, x, u)\| < l(\|x\| + \|u\|)^{1+a}$ , причому  $a = \text{const} > 0$ ,  $l = \text{const}$ .

Припустимо, що при керуванні  $u = M(t)x$ , нульовий розв'язок системи  $\dot{X} = a(t)x + b(t)u$  експоненціально стійкий за Ляпуновим. Тоді розв'язок  $X = 0$  системи (8.37) асимптотично стійкий.

### Неперервна стабілізація лінійних стаціонарних систем

Розглянемо стаціонарну лінійну систему

$$\dot{X} = aX + bu. \quad (8.38)$$

Потрібно побудувати керування  $u = M^*X$  з  $[r \times n]$  матрицею  $M^*$ , при якому всі розв'язки  $X(t)$  системи (8.38) будуть зменшуватися за експоненціальним законом.

Введемо матрицю  $S = (b, ab, \dots, a^{n-b})$ . Якщо  $\text{rank}(S) = n$ , то система (8.38) називається *повністю керованою*. У цьому випадку керування  $u = M^*X$  можна вибрати так, щоб матриця  $a + bM^*$  замкненої системи мала наперед задані власні числа.

Припустимо для простоти, що  $r = 1$ , тобто є один керувальний орган. Задасмо набором комплексних чисел  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , які лежать в лівій напівплощині, і розташовані симетрично щодо дійсної осі,

Побудуємо поліном

$$q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + \dots + q_{n-1} \lambda + q_n,$$

коефіцієнти якого визначимо за формулами Вієта.

З рівняння

$$S \begin{pmatrix} P_n \\ \vdots \\ P_1 \end{pmatrix} = -a^n b$$

знайдемо числа  $P_1, \dots, P_n$ .

Шукані коефіцієнти передачі визначимо із системи

$$TS^*M = \begin{pmatrix} P_1 & -q_1 \\ \dots & \dots \\ P_n & -q_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ P_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{n-1} & P_{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Механізм вирішення завдання стабілізації в разі  $r > 1$  той же, однак зі зростанням  $r$  різко зростає кількість обчислень, а формули для коефіцієнтів передачі (тобто матриці  $M$ ) стають занадто громіздкими.

Зауважимо, що якщо відомі власні числа системи, то майже завжди відома і фундаментальна матриця розв'язків, а отже, можна побудувати програмне керування  $u = u(t)$ , яке стабілізує систему (8.38).

Умова повної керованості, взагалі кажучи, занадто жорстка для стабілізованості системи. Дійсно, нехай  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  власні числа матриці. Припустимо, що серед них є  $k$  в точності таких, у яких дійсні частини невід'ємні. Тоді лінійним перетворенням над шуканими функціями лінійну систему (8.38) можна привести до вигляду

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_+ x_1 + b_1 u; \\ \frac{dx_2}{dt} = a_- x_2 + b_2 u, \end{cases}$$

де  $a_+, b_1, x_1$  – розмірності  $k$ ,  $a_-, b_2, x_2$  – розмірності  $n-k$ . Матриця  $a_+$  має власні числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  з невід'ємними дійсними частинами, а матриця  $a_-$  – тільки з від'ємними.

Необхідною і достатньою умовою стабілізованості є лінійна незалежність векторів  $b_1, a_+ b_1, \dots, a_+^{k-1} b_1$ .

Значимо ще один спосіб (більш простий з обчислювальної точки зору) побудови стабілізуючого керування.

Розглянемо систему (8.38). Будуємо матрицю  $a = -(a + \beta E)$ , де  $\beta = S_{\max} \sum_{j=1}^n |a_{jk}| (\{a_{jk}\} = a, S > 1)$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Далі розглянемо рівняння Ляпунова:  $aZ + Za^* = -2bb^*$ .

Якщо матриця  $Z$  – його розв'язок, то беремо  $M^* = b^* z^{-1}$ . При цьому

$$\operatorname{Re} \lambda_j(a + bM^*) = -\beta, j = 1, \dots, n.$$

Цей метод застосовується, якщо достатньо, щоб корені характеристичного полінома замкненої системи розташовувалися в лівій півплощині (при цьому неважливо, які значення вони приймають).

### Стабілізація різницевої системи

Розглянемо керовану систему лінійних стаціонарних різницевої рівнянь:  $x(k+1) = ax(k) + bu$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , де  $a, b$  – матриці тих же розмірностей, що й в системі (8.38). Потрібно побудувати стабілізуюче керування  $u = M^* x(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , при якому будь-який розв'язок вихідної системи задовольняє нерівність

$$\|x(k)\| < \alpha \rho^k \|x(0)\|, k = 0, 1, \dots$$

при деяких  $\alpha > 0$  і  $0 < \rho < 1$ .

Ця нерівність аналогічна нерівностям експоненціальної стійкості неперервних систем. Якщо в неперервному випадку керування треба було обирати так, щоб власні числа замкненої системи лежали в лівій півплощині, то в дискретному випадку необхідна належність власних чисел одиничному колу з центром в початку координат. Побудова стабілізуючого керування аналогічна випадку неперервних систем. Послідовність для випадку  $r = 1$ :

1. Побудувати матрицю  $S = (b, ab, \dots, a^{n-1}b)$ .

2. Якщо  $\operatorname{rank}(S) = n$ , то система повністю керована і можливо однозначно

розв'язати систему  $S \begin{pmatrix} P_n \\ \vdots \\ P_1 \end{pmatrix} = -A^n B$ .

3. Задатися набором комплексних чисел, симетричних щодо дійсної осі, за модулем меншим одиниці:  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,

Побудувати поліном

$$q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + \dots + q_{n-1} \lambda + q_n$$

4. Побудувати матрицю  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .

5. Вектор  $M$  визначити з рівняння  $TS^*M = \begin{pmatrix} P_1 - q_1 \\ \dots \\ P_n - q_n \end{pmatrix}$ .

**Приклад.** Досліджувати, залежно від параметра  $\beta$ , стабілізованість системи і побудувати стабілізувальне керування різницевого рівняння, при якому власні числа дорівнюють  $\frac{1}{2}$ .

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\beta & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u;$$

$$ab = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^2b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^3b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta(1-\beta) \end{pmatrix}.$$

Щоб  $\text{rank}(S)$  дорівнював 4, потрібно вимагати, щоб  $\beta \neq 0, \beta \neq 1$ .

Візьмемо, наприклад,  $\beta = 2$ , тоді  $-A^4B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$   $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

Із системи  $S \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  знаходимо  $P_1 = -1; P_2 = -1; P_3 = 4; P_4 = 2$ .

Будуємо поліном  $q(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^4 = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16}$ , звідки отримуємо

$$q_1 = -2; \quad q_2 = \frac{3}{2}; \quad q_3 = -\frac{1}{2}; \quad q_4 = \frac{1}{16}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad TS^* \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{9}{2} \\ \frac{31}{16} \end{pmatrix}.$$

Отже,  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = -\frac{3}{2}$ ,  $m_3 = 2$ ,  $m_4 = -\frac{7}{32}$  і шукане керування має вигляд

$u = \left(1, -\frac{3}{2}, 2, -\frac{7}{32}\right)x(k)$ . Система, замкнена цим керуванням, буде наступною:

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{25}{32} \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} X(k). \quad (8.39)$$

Неважко перевірити, що власними числами матриці системи будуть числа  $\lambda_{1,2,3,4} = \frac{1}{2}$ .

### Оптимальна стабілізація

Розглянемо лінійну керовану систему, описану векторним диференціальним рівнянням

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)u. \quad (8.40)$$

Введемо в розгляд множину матриць  $\{M(t)\}$  такої розмірності, що система  $\dot{X} = (A(t)X + B(t)M^*(t))X$  буде експоненціально стійкою.

У цьому випадку керування

$$u(t, x) = M^*(t)X \quad (8.41)$$

буде стабілізуючим.

Припустимо, що система (8.40) стабілізована.

Якість стабілізуючого керування оцінимо за допомогою функціонала

$$I(x_0, u) = \int_0^{\infty} \left( X^* P(t) X + 2 X^* Q(t) u + u^* R(t) u \right) dt,$$

де матриці  $P, Q, R$  обмежені на  $(0, \infty)$  і  $R, P$  – симетричні, додатно визначені.

Стабілізуюче керування  $u^0(t, x) = M_0^*(t) X$  назвемо оптимальним, якщо для  $u(t, x)$  будь-якого стабілізуючого керування будь-якого  $X_0$  виконана нерівність  $I(x_0, u^0) \leq I(x_0, u)$ .

Завдання оптимальної стабілізації: визначити умови існування оптимального розв'язку.

**Теорема.** Для того, щоб існувало оптимальне стабілізуюче керування (8.40), необхідно і достатньо, щоб матричне рівняння Ріккати

$$\begin{aligned} \dot{\theta} + \theta \left[ a(t) - b(t)r^{-1}(t)q^*(t) \right] + \left[ a^*(t) - q(t)r^{-1}(t)b^*(t) \right] \theta - \\ - \theta b(t)r^{-1}(t)\theta + P(T) - q(t)r^{-1}(t)q^*(t) = 0 \end{aligned} \quad (8.42)$$

мало розв'язком симетричну матрицю  $\theta(t)$  з обмеженими на  $[0, \infty)$  компонентами, таку, що керування

$$u = -r^{-1}(t) \left[ q^*(t) + b^*(t)\theta(t) \right] X \quad (8.43)$$

було стабілізуючим.

Якщо матриця  $\theta(t)$  задовольняє умови теореми, то керування (8.43) є оптимальним стабілізуючим.

Якщо матриці  $a, b, p, q$  і  $r$  не залежить від  $t$ , то шуканий розв'язок  $\theta(t)$  рівняння (8.42) не залежить від  $t$ . У цьому випадку можна замість рівняння (8.42) розглядати алгебраїчне рівняння Ріккати

$$\theta \left[ a - br^{-1}q^* \right] + \left[ a^* - qr^{-1}b^* \right] \theta - \theta br^{-1}b^* \theta + P - qr^{-1}q^* = 0. \quad (8.44)$$

Існують різні методи розв'язання рівнянь (8.42) або (8.44).

### Метод послідовних наближень розв'язання рівняння Ріккати

Метод послідовних наближень розв'язання рівняння (8.42) можна трактувати як матричний аналог методу Ньютона.

Виявляється, що рівняння Ріккати (8.42) еквівалентне сукупності матричного лінійного диференціального рівняння

$$\dot{\theta} + \theta(a + bM^*) + (a + Mb^*)\theta + (P + qM^* + Mq^* + MrM^*) = 0$$



і матричного алгебраїчного рівняння  $\theta b + q + Mr = 0$ .

Метод полягає в побудові послідовностей матриць  $\{M_k(t)\}$ ,  $\{\theta_k(t)\}$ , які збігаються відповідно до матриці оптимального керування  $M(t)$  і розв'язків рівняння Ріккати  $\theta(t)$ .

Організуємо побудову таким чином (розглядаємо стаціонарний випадок).

1. Вибираємо деяке стабілізувальне керування  $u = M_0^* X$ .
2. Будуємо матриці  $S_0 = a + bM_0^*$ ,  $T_0 = P + qM_0^* + M_0 q^* + M_0 r M_0^*$ .
3. Розв'язуємо рівняння Ляпунова  $\theta S_0 + S_0^* \theta = -T_0$ . Нехай матриця  $\theta_0$  – його розв'язок.

4. Будуємо матрицю  $M^* = -r^{-1}(q^* + b^* \theta_0)$ .

5. Обчислюємо матриці  $s = a + bM_1^*$ ,  $T_1 = P + qM_1^* + M_1 q^* + M_1 r M_1^* \theta_1$  як розв'язок рівняння  $\theta s_1 + s_1^* \theta = -T_1$  і т. д.

При організації обчислювальної процедури, критерієм зупинки слід брати виконання нерівності  $\|M_{k+1} - M_k\| \leq \varepsilon$ .

Рівняння Ріккати (8.42) у наведеному вище матричному вигляді можна розв'язати безпосередньо. Для цього складаємо матрицю:

$$l = \begin{pmatrix} a - br^{-1}q^* & -br^{-1}b^* \\ qr^{-1}q^* - P & -a + qr^{-1}b^* \end{pmatrix}.$$

Якщо стовпці  $2n \times n$  матриці  $W = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  утворюють бази  $n$ -вимірного інваріантного підпростору матриці  $L$ , і матриця  $X$  – неособлива, то матриця  $\theta = YX^{-1}$  є розв'язком рівняння Ріккати. З іншого боку, якщо матриця  $\theta$  є розв'язком рівняння (8.44), то стовпці  $2n \times n$  матриці  $W = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  утворюють базис  $n$ -вимірного підпростору матриці  $L$ .

Таким чином, якщо обчислено власні вектори (чи приєднані), можна побудувати матрицю  $\Theta$  і, отже, матрицю  $m$ .

Можливий і дещо модифікований алгоритм на основі нижченаведених критеріїв.

1. Якщо матриця  $l$  має власне число  $\lambda$ , то вона має власне число  $(-\lambda)$ .
2. Існує поліном  $f(\lambda)$ , має всі корені в лівій півплощині і задовольняє тотожності  $\det(l - \lambda E) = f(\lambda)f(-\lambda)$ .

3. Якщо оптимальне стабілізувальне керування існує, то матриця  $\Theta = YX^{-1}$ , де  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(-1)f^*(-1)\begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}$ , є поліномом  $f(\lambda)$ .

4. Якщо матриця  $l$  має чисто уявне власне число, то оптимального стабілізуючого управління не існує.

5. Якщо оптимальне стабілізувальне керування існує, то воно єдине.

**Приклад.** Знайти оптимальне стабілізувальне керування

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \quad I = \int_0^{\infty} (4x_1^2 + 8x_1x + 4x_2u + u^2) dt.$$

*Розв'язання.* Тут  $a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $p = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $r = 1$ ;

$$L = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо характеристичний багаточлен матриці  $L$ :

$$\det(1 - \lambda E) = \lambda^4 + \lambda^2 + 1.$$

Побудуємо багаточлен  $f(\lambda)$ , який задовольняє умови п. 2:

$$f(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b; \quad f(\lambda)f(-\lambda) = \lambda^2 + (2b - a^2)\lambda^2 + b = \lambda^4 + \lambda^2 + 1.$$

Отже,  $b^2 = 1$ ,  $b = \pm 1$ ,  $a = \pm\sqrt{2b-1}$ . Величини  $a$  і  $b$  визначаються єдиним чином:  $a = 1, b = 1$  і  $f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ .

$$\begin{aligned} f(-L) = L^2 - L + E &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$W = f(-L)f^*(-1) \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -9 & 44 & -18 \\ -9 & 5 & -18 & 10 \\ 44 & -18 & 88 & -36 \\ -18 & 10 & -36 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & -18 \\ -18 & 10 \\ 88 & -36 \\ -36 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\Theta = YX^{-1} = \begin{pmatrix} 88 & -36 \\ -36 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-10}{116} & \frac{18}{116} \\ \frac{18}{116} & \frac{44}{116} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$M^* = - \left( (0,2) + (1,0) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = (-2, -2).$$

Остаточно:  $u = -2x_1 - 2x_2$ .

### 8.1.6 Врахування розподіленості параметрів системи

При описі різних процесів доводиться враховувати явище післядії. Природно при цьому моделювати такі процеси диференціальними рівняннями з аргументом, що відхиляється. Такі рівняння з'являються, наприклад, кожний раз, коли в розглядуваній фізичній чи технічній задачі сила, що діє на матеріальну точку (систему), залежить від швидкості та розташування цієї точки не тільки в даний момент, але і в деякий момент, що передує даному.

Наявність запізнювання у досліджуваній системі часто є причиною явищ, які суттєво впливають на хід процесу. Наприклад, в системах автоматичного регулювання запізненням є проміжок часу, який потрібен системі для реагування на вхідний імпульс. Наявність запізнювання в авторегульованій системі може викликати появу самозбудження коливань, збільшення часу перерегулювання і навіть нестійкість системи. При вивченні реальних систем з післядією найчастіше припускають запізнювання постійним. Проте у ряді найважливіших випадків в реальних системах запізнювання залежить не тільки від часу, але і від самої шуканої функції і навіть від її похідних.

Диференціальним рівнянням з аргументом, що відхиляється, називається рівняння, в якому шукана функція та її похідні входять при різних значеннях аргументу  $t$ . При цьому вказане рівняння називається рівнянням з запізнілим аргументом, якщо величина старшої похідної в будь-який момент часу  $t$  визначається через значення молодших похідних в попередні моменти  $t + \Theta$ , де  $\Theta \leq 0$ .

Нехай вектор  $x(t) \in r^n$  визначений при кожному значенні  $t$ , а  $M$  – деякий функціональний простір з елементами  $\varphi(\Theta)$ , де  $-h \leq \Theta \leq 0$  ( $h = \text{const} > 0$ ). Позначимо через  $x(t)$  елемент простору  $M$ , визначений рівністю

$x_t = x_t(\theta) = x(t + \theta)$ . Рівняння з аргументом, що запізнюється, можна записати у вигляді

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \quad (8.45)$$

Тут  $f(t, x_t)$  – задане відображення (оператор)  $f: R^1 \times M \rightarrow R^n$ .

Найпростіше диференціальне рівняння з аргументом, що запізнюється, має такий вигляд:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), h > 0. \quad (8.46)$$

Тут  $f$  – задана функція змінних  $t, x(t)$  і  $x(t-h)$ , наприклад,  $f = tx(t) + x^2(t-1)$ .

Подібні рівняння називають рівняннями із зосередженим запізненням на відміну від рівнянь з розподіленим запізненням. Їх прикладом може бути рівняння

$$\dot{x}(t) = tx^2(t) + \int_{-1}^0 r^2 x(t+r) dr.$$

Основна початкова задача для рівняння (8.45) ставиться так: нехай  $t_0$  – початковий момент часу і  $\varphi(\theta)$  – деяка задана функція,  $-h \leq \theta \leq 0$ . Задача Коші для рівняння (8.45) полягає у визначенні функції  $x(t)$ , яка при  $t > t_0$  задовольняє рівнянню (8.45), а при  $t \leq t_0$  – початкову умову  $x_0 = x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta)$ .

Позначимо через  $g_{s,l}(\theta), s, l = \overline{1, n}$  сукупність функцій обмежених варіацій, заданих на  $[-h, 0]$ . Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{X}_S(t) = \sum_{l=1-h}^n \int x_l(t+\theta) dg_{s,l}(\theta); \\ s = \overline{1, n} \end{cases}$$

або, при  $G(\theta) = \{g_{s,l}(\theta)\}$ , систему

$$x(t) = \int_{-n}^0 dG(\theta)x(t+\theta), \quad (8.47)$$

де  $x$  – вектор, а  $dG(\theta) = \{dg_{s,l}(\theta)\}_{sl=1}^n$ .

Якщо  $g_{sl}(\theta)$  – кусково-постійні функції, то система (8.47) прийме вигляд

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{\nu} a_j x(t - r_j), \quad (8.48)$$

де  $0 \leq r_0 < r_1 < \dots < r_\nu$ .

Нехай для  $t \in [-h, 0]$   $x(t) = \varphi(t)$ , де  $\varphi(t)$  – векторна неперервна функція, що задовольняє на  $[-h, 0]$  умови Діріхле. Тоді можна знайти неперервний розв’язок задачі Коші, поданий у вигляді контурного інтеграла або у вигляді невласного інтеграла. Для цього розглянемо характеристичне рівняння системи (8.49)

$$\det \left( \lambda E - \int_{-h}^0 e^{\lambda \theta} dg(\theta) \right) = 0. \quad (8.49)$$

Для рівняння (8.49) функція

$$f(\lambda) = \det \left( \lambda E - \sum_{j=0}^{\nu} e^{-\lambda r_j} a_j \right) = \lambda^n + \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^m d_k \lambda^{n-k} e^{-s} \lambda, \quad (8.50)$$

де величини  $r_s (s=1, m)$  є лінійними формами запізнювань з цілими невід’ємними коефіцієнтами, називається характеристичним квазіполіномом.

Позначимо через  $i\lambda_1, \dots, i\lambda_0, \dots$  всі точки комплексної площини, які є коренями рівняння (8.49), при цьому занумеруємо їх так, що  $\operatorname{Re}(\lambda_1) \geq \operatorname{Re}(\lambda_2) \geq \dots$ . Ці корені лежать у півплощині  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq C$ , де  $C$  – деяка константа, причому їх число в вертикальній смузі скінченне  $a \leq \operatorname{Re}(\lambda) \leq b$ ,  $a > -\infty$ . Нехай  $S_j$  є кратність кореня  $\lambda_j$ .

**Теорема.** Кожному кореню  $\lambda_j$  рівняння (8.50) відповідає ціла функція  $x_j(t) = P_j(t) e^{\lambda_j t}$ , що є розв’язком системи (8.47), де  $P_j(t)$  є поліномом щодо  $t$  степеня не вище  $(S_j - 1)$  з векторними постійними коефіцієнтами.

Природно, що будь-яка кінцева лінійна комбінація окремих  $\sum_j C_j x_j(t)$  розв’язків також є окремим розв’язком. Однак отримати за аналогією з звичайними диференціальними рівняннями загальний розв’язок у вигляді суми окремих розв’язків не завжди вдається. Справа в тому, що коренів  $\lambda_j$  рівняння (8.49), взагалі кажучи, зліченне число, і нескінченний ряд  $\sum_{j=0}^{\infty} C_j x_j(t)$  може не збігатись.

Однак, як і у випадку рівнянь без запізнення, за коренями характеристичного рівняння можна судити про стійкість системи: якщо всі корені  $\varphi$  рівняння (8.49) мають від'ємні дійсні частини, то система (8.48) асимптотично (експоненціально) стійка, тобто для будь-якої початкової функції  $\varphi$  розв'язок  $x(t, \varphi)$  має властивість  $\|x(t, \varphi)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ , при цьому існують числа  $\gamma > 0, C = C(\varphi)$  такі, що  $\|x(t, \varphi)\| \leq C e^{-\gamma t}$ .

### Вплив запізнення керувального сигналу на стійкість системи

У системах автоматичного регулювання керувальний сигнал формується із затримкою. Тому стан системи може виявитися нестійким.

Побудуємо матрицю оптимального стабілізуючого керування  $M$ . Це керування формується на основі вимірювання фазових змінних і надходить на виконавчі органи з запізненням  $U = M^* X(t - h)$ . Вважаючи затримку постійною, потрібно знайти найбільше значення  $h_0 > 0$  таке, що при будь-якому  $h \in [0, h_0]$ , система

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + BM^* X(t - h) \quad (8.51)$$

має асимптотично (експоненціально) стійке положення рівноваги  $x = 0$ .

Для експоненціальної стійкості розв'язку (8.51) необхідно і достатньо, щоб всі корені квазіполінома  $\varphi(\lambda) = \det(\lambda E - BM^* e^{-\lambda h} - A)$  лежали в лівій півплощині. За умовою задачі при  $h = 0$  це має місце. Корені  $\varphi(\lambda)$  неперервно залежать від  $h$ , отже при малих  $h$  вони лежать в лівій півплощині.

При подальшому збільшенні  $h$  корені  $\varphi(\lambda)$  можуть потрапити на праву півплощину. Очевидно, що значення  $h_0$ , при якому корені вперше виходять на праву півплощину, і дає розв'язок задачі.

Для пошуку  $h_0$  квазіполіном  $\varphi(\lambda)$  розглянемо як поліном  $f(\lambda, \mu)$  від двох змінних:  $\varphi(\lambda) = f(\lambda, e^{-\lambda h})$ ,  $f(\lambda, \mu) = a_0(\lambda)\mu^s + a_1(\lambda)\mu^{s-1} + \dots + a_g(\lambda)$ .

Якщо при деякому  $h$  корінь  $\varphi(\lambda)$  потрапив на уявну вісь ( $\lambda = i\lambda_0$ ), то поліном від  $\mu$   $f(i\lambda_0, \mu) = a_0(i\lambda_0)\mu^s + a_1(i\lambda_0)\mu^{s-1} + \dots + a_s(i\lambda_0)$  має корінь на одиничному колі  $\mu = e^{-\lambda h_0}$ ,  $|\mu| = 1$ .

Використовуючи це, наведемо алгоритм побудови  $h_0$ .

1. Знайти ті значення  $\lambda$ , при яких  $f(\lambda, \mu)$  як поліном від  $\mu$  має корені на одиничному колі. Для цього достатньо, щоб результат скалярного добутку поліномів  $f(\lambda, \mu)$  і  $f^*(\lambda, \mu) = a_s(-\lambda)\mu^s + a_{s-1}(-\lambda)\mu^{s-1}, \dots, a_0(-\lambda)$ ,

$$\operatorname{Re} s(f, f^*) = \begin{bmatrix} a_0(\lambda) & a_1(\lambda) & \dots & a_s(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0(\lambda) & \dots & a_{s-1}(\lambda) & a_s(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0(\lambda) & a_1(\lambda) & \dots & a_s(\lambda) \\ a_s(-\lambda) & a_{s-1}(-\lambda) & \dots & a_0(-\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_s(-\lambda) & \dots & a_1(-\lambda) & a_0(-\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_s(-\lambda) & a_{s-1}(\lambda) & \dots & a_0(-\lambda) \end{bmatrix},$$

перетворюювався в нуль. Цим результатом є поліном за  $\lambda$ . Знайдемо його чисто уявні корені  $i\lambda_1, \dots, i\lambda_p$  (це завдання можна звести до задачі пошуку дійсних коренів полінома).

2. Для кожного уявного кореня  $i\lambda_k$  побудуємо поліном  $\Phi_k(\mu) = f(i\lambda_k, \mu)$  ( $k = 1, \dots, p$ ) і знайдемо його корені, розташовані на одиничному колі

$$\mu_{ks} = e^{i\tau_{ks}} \quad (s = 1, 2, \dots, q_k, \tau_{ks} \in [0, \pi)).$$

3. З кожним коренем  $\mu_{ks}$  зв'яжемо додатну постійну

$$h_{ks} = \begin{cases} \frac{\tau_{ks}}{\lambda_k} & \lambda_k > 0 \\ \frac{\tau_{ks} - 2\pi}{\lambda_k} & \lambda_k < 0 \end{cases}.$$

4. Як  $h_0$  беремо мінімальне значення з усіх чисел  $h_{ks}$ .